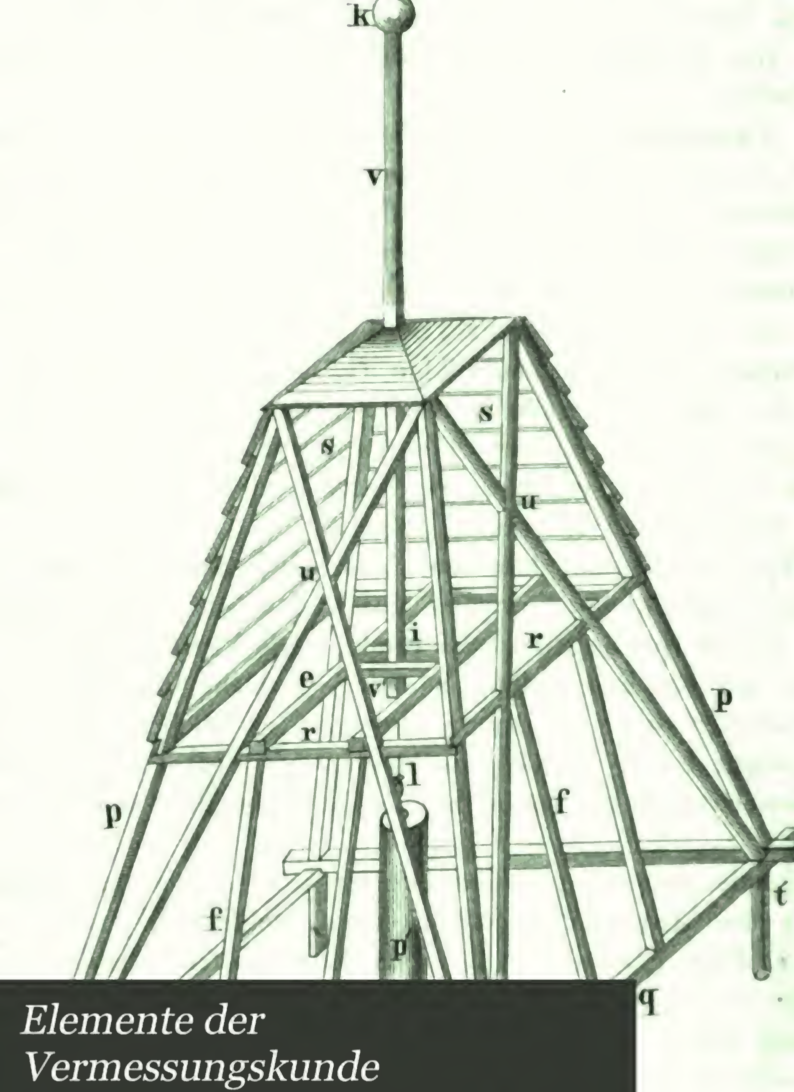


Elemente der Vermessungskunde

Carl Maximilian von Bauernfeind



ELEMENTE

DER

VERMESSUNGSKUNDE

VON

Dr. CARL MAXIMILIAN BAUERNFEIND,
BAURATH UND PROFESSOR DER INGENIEUR-WISSENSCHAFTEN IN MÜNCHEN.

ZWEITE VERMEHRTE UND VERBESSERTE AUFLAGE.

MIT 580 HOLZSCHNITTEN UND 22 TAFELN.

MÜNCHEN.
LITERARISCH-ARTISTISCHE ANSTALT
DER J. G. COTTA'SCHEN BUCHHANDLUNG.
1862.



Buchdruckerei der J. G. Cotta'schen Buchhandlung in Stuttgart und Augsburg.

Vorrede zur ersten Auflage.

I.

Der Leipziger Ostermesskatalog vom Jahre 1846 kündigte dieses Werk bereits vor neun Jahren an; es erschien aber damals nicht, weil mir bald nach jener Ankündigung neben meinem Lehrberufe noch ein praktischer Wirkungskreis als Ingenieur angewiesen wurde, der mich fünf Jahre lang abhielt, etwas drucken zu lassen. Unterdessen versuchte es ein Anderer, das von mir schon früher erkannte Bedürfniss eines Handbuchs der Messkunst, das namentlich die Instrumentenlehre gründlich behandle, dadurch zu befriedigen, dass er aus den in Büchern und Zeitschriften enthaltenen Arbeiten fast aller Schriftsteller der praktischen Geometrie eine Musterkarte von Styl- und Zeichnungsproben zu Tage förderte.

Dieses Machwerk, worüber ich mich vor nahezu drei Jahren in Dingler's polytechnischem Journale (Bd. 127 S. 159 und Bd. 128 S. 79) näher ausgesprochen habe, hat viele durch die schöne Ausstattung, welche ihm der Verleger gab, bestochen und, weil auch Gutes darin aufgenommen ist, das man aus Mangel an Kenntniss der geodätischen Literatur irrthümlich als die eigene Arbeit seines Verfassers ansah, mehrere Lobredner gefunden. Es war und ist aber nicht im Stande, in das Wesen der Messkunst einzuführen oder zur wissenschaft-

lichen d. i. gründlichen Beurtheilung und Behandlung der Messinstrumente zu befähigen, weil ihm geradezu alles, worauf es in diesem Falle ankommt, abgeht.

Darum glaube ich, dass auch heute noch das Bedürfniss besteht, dem ich, nach lange fortgesetzten Studien und praktischen Arbeiten, vor neun Jahren entgegen kommen wollte, ohne zu ahnen, dass sich an dem grösseren Theile meines Manuscriptes die Horazische Regel erfüllen würde: „nonum prematur in annum."

Ob sich diese zunächst nur für Dichter gegebene Vorschrift auch in dem vorliegenden Falle bewährt hat, müssen entweder diejenigen entscheiden, welche sich dieses Buches als Leitfaden für ihre Vorträge, oder als Compendium beim Studiren, oder als Rathgeber bei ihren Vermessungsarbeiten bedienen werden; oder jene, welche eben so gut mit der Literatur als mit der Praxis der Messkunde vertraut sind und sich die Mühe geben, dieses Buch wirklich zu lesen und mit anderen Büchern seiner Art zu vergleichen.

Um die Beurtheilung meiner Arbeit zu erleichtern und die Gesichtspunkte zu bezeichnen, welche ich bei ihrer Durchführung festgehalten habe, finde ich mich zu den nachfolgenden Bemerkungen veranlasst.

Ich gab diesem Buche, das von der Land-, Berg- und Wassermessung handelt, den Titel „Vermessungskunde", weil er dem Inhalte, welcher umfangreicher ist als jener der Geodäsie und weniger ausgedehnt als jener der praktischen Geometrie, nach meiner Meinung am bessten entspricht. Ich fügte ferner der allgemeinen Bezeichnung des Inhalts den beschränkenden Beisatz „Elemente" bei, nicht um damit etwa nur die Anfangslehren, sondern alle wesentlichen Grundlagen der gesammten Vermessungskunde anzudeuten. Bei gehöriger Benützung sollen diese Elemente die Fähigkeit verleihen, alle

Vermessungen für technische und staatswirthschaftliche Zwecke mit Sicherheit auszuführen und das Studium der grösseren Werke über Landes- und Gradmessungen mit gutem Erfolg zu betreiben.

Das Materiale, welches der Verarbeitung unterlag, habe ich in drei Hauptabtheilungen gesondert, von denen die erste die Mittel zur Messung oder die Messinstrumente, die zweite die Anwendung dieser Mittel oder die Ausführung und Berechnung der Messungen, und die dritte den eigentlichen Zweck der Messungen oder die Herstellung von Plänen und Karten behandelt. Diese Eintheilung der Messkunde erscheint mir als die natürlichere um so mehr, als sie keine Trennung der letzteren in eine niedere und höhere erfordert.

Der ersten Abtheilung, welche nebst der Einleitung diesen Band ausfüllt, gab ich eine grössere Ausdehnung als jeder der beiden anderen Abtheilungen, die zusammen den zweiten Band bilden und im künftigen Sommer erscheinen werden. Auf die im ersten Theile enthaltene Instrumentenlehre lege ich nämlich ein besonderes Gewicht, und zwar desshalb, weil von der genauen Kenntniss des Baues, der Prüfung, der Berichtigung und des Gebrauchs der Messinstrumente die Zuverlässigkeit geometrischer Arbeiten vorzugsweise abhängt, und weil bis jetzt nur wenige Schriftsteller mit hinreichender Sachkenntniss auf die Theorie aller Messinstrumente, um die es sich hier handelt, eingingen.

Dieser Band enthält, wie ich glaube, mehr Neues als sein Titel erwarten lässt. Der sachkundige Leser wird namentlich finden, dass ich nicht bloss bemüht war, den vorliegenden Gegenstand klar und übersichtlich zu machen, sondern dass ich es auch an einer auf Erfahrung ruhenden Beurtheilung häufig angewendeter Instrumente nicht fehlen liess und in vielen Fällen, wo es sich um den Bau oder die Theorie eines Instruments

handelte, meine eigenen Wege ging. Zeuge dessen sind die Artikel: Prismenkreuz, Winkelprisma, Spiegelkreis, Distanzmesser, Stromquadrant, Pitot'sche Röhre u. s. w., welche sich wohl alle wie der erstere zu besonderen Abhandlungen geeignet hätten. Auch das glaube ich als einen Vorzug meines Buches, wenn auch nicht als mein Verdienst anführen zu dürfen, dass es eine gedrängte Darstellung der ausgezeichneten Arbeit G. S. Ohm's, meines unvergesslichen Lehrers, über die Helligkeit und das Gesichtsfeld der Fernrohre enthält.

Dass sich ein Lehrbuch der Vermessungskunde auf die Mathematik stützen muss, versteht sich eben so von selbst, als dass mit Formelentwickelungen allein oder mit blossen Beschreibungen der Instrumente und receptenartigen Anleitungen zu ihrem Gebrauche nichts gethan ist. Ich war bemüht, mich von den Uebertreibungen nach beiden Seiten hin fern zu halten und habe vor Allem getrachtet, der Theorie der Messinstrumente eine wissenschaftliche Grundlage zu geben und sie so einfach und anschaulich als möglich vorzutragen. In Folge dieses Strebens sind allerdings manche Entwickelungen weniger allgemein als sie seyn könnten, aber ohne diesen scheinbaren Mangel wäre der Vortheil der Anschaulichkeit nicht zu erreichen gewesen.

Man wird finden, dass ich die in Rede stehenden Entwickelungen nicht mit der Ausführlichkeit darlegte, wie dieses sonst wohl in Büchern zu geschehen pflegt, sondern dass ich meist nur den Gang der Rechnung, einzelne Zwischenergebnisse und die Endresultate angeführt habe. Dieses Verfahren gewährt den mit den nöthigen mathematischen Kenntnissen ausgerüsteten Lesern Gelegenheit, sich in der Herleitung der Formeln zu üben, und ist für jene, welche von der Mathematik nur wenig verstehen und sich mit Resultaten begnügen, völlig ausreichend, während es allen Käufern des Buchs den

mit der Raumersparniss verbundenen Vortheil grösserer Wohlfeilheit darbietet.

Die Abbildungen der Instrumente, womit dieser Band ausgestattet ist, wurden alle neu und gewiss auch so gezeichnet, dass sie an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig lassen. Zur Herstellung dieser Zeichnungen dienten die Instrumente und Apparate, welche ich bei meinen Vorlesungen über Geodäsie und zu den praktischen Uebungen meiner Zuhörer benütze; ausserdem aber mehrere Werkzeichnungen des Ertel-schen mechanischen Instituts dahier, einige Abbildungen zu dem Preissverzeichnisse von Breithaupt in Cassel und je vier oder fünf Figuren aus der „Gradmessung in Ostpreussen" von Bessel und aus der „Anleitung zum Nivelliren" von Stampfer. Einen Theil der grösseren Original-Zeichnungen hat einer meiner vorzüglichsten Schüler, der Baucandidat Herr Adolph Döhlemann, mit eben so viel Einsicht als Geschick angefertigt, während den Holzschnitt aller Figuren der bereits rühmlich bekannte Künstler Herr Leo Bock dahier in meisterhafter Weise besorgte.

Obwohl hier viele Instrumente abgebildet sind und deren Einrichtung, Wirkungsweise, Untersuchung und Gebrauch erklärt ist, so konnten doch nicht alle, welche in verschiedenen Ländern und Orten Anwendung finden, aufgenommen werden. Es war dieses jedoch auch nicht nöthig, da es Aufgabe der Theorie ist, das Wesen jeder brauchbaren Classe von Instrumenten allgemein so darzulegen und an einigen Beispielen so zu erläutern, dass man hienach die besonderen Eigenthümlichkeiten jedes dieser Classe angehörigen Instruments sofort sicher erkennen und beurtheilen kann. Von diesem Gesichtspunkte aus lässt sich aber behaupten, dass in dem vorliegenden Bande alle nur einigermassen wichtigen Messinstrumente vertreten sind.

Wenn ich mir nun das Zeugniss geben darf, dass ich nach Kräften darauf bedacht war, diesem Buche inneren Werth zu verleihen, und wenn nicht bezweifelt werden kann, dass die Verlagshandlung in der äusseren Erscheinung desselben ein Muster vorzüglicher Ausstattung aufgestellt hat: so können wir wohl beide, Verleger und ich, jeder unbefangenen Beurtheilung unseres Werks mit Ruhe entgegensehen. (Weihnachten 1855.)

II.

Verschiedene ungünstige Verhältnisse, deren Beseitigung nicht in meiner Macht stand, haben den Druck dieses Bandes, der schon im September 1856 begann, ungewöhnlich verzögert. Indem ich diese Verzögerung denjenigen gegenüber, welche dadurch unangenehm berührt worden seyn sollten, bedaure, erlaube ich mir, unter Bezugnahme auf das Vorwort des ersten Bandes, über den Inhalt des zweiten Folgendes zu bemerken.

Fast alle Lehrbücher der praktischen Geometrie sind in so ferne einseitig abgefasst, als sie ihr Hauptaugenmerk nur dem Aufnehmen des Geländes zuwenden. In unserer Zeit aber, wo man ausserordentliche Summen auf Bauwerke verwendet, die vorzugsweise in Terrainveränderungen bestehen, sind die dem Aufnehmen entgegengesetzten Messoperationen, die Absteckungen, durch welche jene Veränderungen eingeleitet und geregelt werden, von der grössten Wichtigkeit, und ausserdem haben dieselben auch an und für sich ein Interesse: ich habe sie desshalb ausführlich behandelt. Namentlich gilt dieses von dem Abstecken langer gerader Linien und grosser Curven, so wie von jenen Absteckungen, welche sich auf das Nivelliren gründen.

Gleichwie ich die Einseitigkeit in Bezug auf die Behandlung der Hauptabtheilungen der Lehre von den Messungen zu

vermeiden suchte, eben so war ich auch bestrebt, in den Unterabtheilungen den verschiedenen Methoden gerecht zu werden. Ich nenne hier nur die Aufnahmen mit dem Messtische und dem Theodolithen, von welchen jeder mit der hierauf bezüglichen Literatur Vertraute weiss, dass die letzteren, trotz ihrer grösseren Genauigkeit, in den Lehrbüchern der Geodäsie äusserst dürftig behandelt werden. Diesem Mangel, welcher auch von jedem einsichtsvollen praktischen Geometer gefühlt wird, suchte ich nach Kräften zu begegnen, und ich hätte dieses vielleicht noch ausführlicher gethan, wenn mir die freundlichen Mittheilungen des Herrn Regierungsgeometers Fleischhauer in Warza über die von Herrn Hofrath Hansen geleitete Vermessung des Herzogthums Sachsen-Gotha, bei welcher die Detailaufnahme mit dem Theodolithen geschieht, nicht erst nach Vollendung meines Manuscripts zugekommen wären, in Folge dessen ich sie leider nur noch theilweise bei der Correctur dieses Bandes benützen konnte.

Mehrere Lehrbücher der Messkunde sind nach der Meinung ihrer Verfasser dann schon „nach dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft“ bearbeitet, wenn sie eine grössere Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate und deren Anwendung auf gewöhnliche Messungen, z. B. mit der Kette, enthalten. Nach diesem neuesten Standpunkte habe ich nicht gestrebt, da ich der Ansicht bin, dass die Fehler der Messungsresultate der sogenannten niederen Geodäsie ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgeglichen werden können und sollen; dass also eine Ausgleichung der Fehler nach der Methode der kleinsten Quadrate nur bei den feinsten geodätischen Messungen, wozu vor allen die Winkelbestimmungen der Dreiecke erster und zweiter Ordnung gehören, am Platze ist; und dass endlich ein Lehrbuch der Geodäsie, welches von diesen Messungen wirklich handelt, wohl die Anwendung jener Methode zu zeigen

hat, aber eine weitläufige Abhandlung darüber eben so wenig als über Geometrie und Algebra, ebene und sphärische Trigonometrie, Reihenlehre und Einrichtung der Logarithmentafeln zu enthalten braucht. Wer sich mit dem Studium der Geodäsie befassen will, muss das der Mathematik bis zu einem hinreichenden Grade schon vollendet haben und darf rein mathematische Abhandlungen nur da suchen, wo sie hin gehören.

Getreu seiner Bestimmung gibt dieser Band nur Anleitung zur sicheren Ausführung aller Vermessungen für technische und staatswirthschaftliche Zwecke und überlässt daher die Lehre von den Gradmessungen besonderen Werken. Selbst die trigonometrischen Arbeiten für grosse Landesvermessungen sind nur so weit behandelt als nöthig ist, eine klare Einsicht in das Wesen derselben und den Zusammenhang der Steuerblätter und topographischen Karten mit den Dreiecknetzen und dieser mit den Meridianen und Parallelkreisen der Erde zu gewähren. Denn dieses reicht für diejenigen, welche nicht selbst solche Landesvermessungen zu leiten haben, vollständig aus und bereitet künftige Dirigenten grosser Triangulirungen hinreichend vor, das für diesen Zweck unerlässliche Studium von Specialwerken, wie die von Gauss, Bessel, Hansen u. A., erfolgreich zu betreiben und sich durch Betheiligung an bedeutenden praktischen Arbeiten dieser oder ähnlicher Art vollständig auszubilden.

Zu den wichtigsten Messungen für die oben genannten Zwecke gehört ohne Zweifel das Nivelliren und dessen Anwendung zur Figurirung des Geländes mittels Horizontalcurven. Diesem selbst von den besseren Lehrbüchern der praktischen Geometrie nicht genug gewürdigten Gegenstande habe ich eine um so grössere Sorgfalt zugewendet, je mehr ich Gelegenheit hatte zu beobachten, wie sehr derselbe von vielen Ingenieuren noch vernachlässigt wird, obgleich die Darstellung des Terrains

durch Horizontalcurven die Grundbedingung rationeller Entwürfe von Strassen, Eisenbahnen und Canälen, die durch Berg- oder Hügelland führen, bildet.

Der Entwickelung der Barometerformel legte ich die von den bisherigen Ansichten abweichende Ohm'sche Annahme zu Grunde, dass die drückende Luftsäule die Form einer vertikal stehenden Pyramide habe, deren Spitze im Erdmittelpunkte liegt. Auf dieser richtigeren Grundlage baut sich eine Formel auf, deren Resultate selbst in den günstigsten Fällen noch um $^1/_{400}$ des Höhenunterschieds von denen der bekannten Laplace'schen Formel abweichen, und zwar liefert die neue Entwickelung alle Höhen um so viel kleiner als die alte, während diese meist auch schon geringere Höhenunterschiede ergab als trigonometrische Messungen. Dieser Umstand macht eine Revision des barometrischen Coefficienten nothwendig. Was ich in dieser Beziehung auf Seite 326 als Wunsch aussprach, habe ich nach dem Drucke jener Stelle mit Unterstützung von mehreren meiner zuverlässigsten Schüler im bayerischen Hochgebirge selbst vollzogen; da aber die hierauf bezüglichen umfangreichen Messungen noch nicht berechnet und verglichen sind, so muss ich die Mittheilung des Ergebnisses unserer Arbeit einer besondern Abhandlung vorbehalten, in der ich vielleicht auch Einiges zur Berichtigung des so ausserordentlich schwankenden Urtheils über die relative Genauigkeit der Barometermessungen werde beitragen können.

Das Markscheiden ist hier selbstverständlich im Sinne der „neuen Markscheidekunst" aufgefasst, wonach alle Arbeiten, deren Zweck es fordert und deren Oertlichkeit es zulässt, an der Stelle des Compasses und Gradbogens mit den vollkommneren Instrumenten der praktischen Geometrie, der Libelle, dem Messtische und dem Theodolithen, ausgeführt werden. Da jedoch die Behandlung und Anwendung dieser Messwerkzeuge theils

im ersten Bande, theils in den beiden ersten Abschnitten des zweiten Bandes enthalten sind, so blieb für den dritten Abschnitt, der von den Grubenmessungen handelt, nur dasjenige auszuführen übrig, was sich ohne die daselbst bezeichneten Vorkenntnisse vom Bergbaue den Horizontal- und Vertikalmessungen nicht anreihen liess, und was sich auf jene Arbeiten des Markscheiders bezieht, die er bei dem bessten Willen und der gründlichsten geometrischen Ausbildung nur mit den althergebrachten Hilfsmitteln vollziehen kann.

Von den Wassermessungen wurde nur so viel aufgenommen, als zur Erforschung der Wassermenge und mechanischen Arbeit eines Flusses erforderlich ist. Hätte ich den Umfang des betreffenden Abschnitts erweitern wollen, so wären dem Zwecke dieses Buchs ferne liegende Abschweifungen in die Gebiete der Hydraulik unvermeidlich gewesen, während der hier behandelte engere Kreis von Messungen in und an Flüssen vorzugsweise nur geometrische Operationen erheischt, also den übrigen Gebieten der praktischen Geometrie ganz nahe verwandt ist.

Dem Umfange nach ist die vom Plan- und Kartenzeichnen handelnde dritte Abtheilung dieses Werks ziemlich mager ausgefallen, und nicht bloss desshalb, weil sich ihr Inhalt nur theilweise wissenschaftlich behandeln lässt, sondern hauptsächlich aus dem Grunde, weil die theoretischen Anleitungen zum Entwerfen von Karten nur für ein kleines Publikum praktisches Interesse haben, während sie für das, dem dieses Buch vorzugsweise gewidmet ist, nur in so ferne von Belang sind, als sie ihm die Einrichtung und den Gebrauch der Kartennetze wirklich erklären, was in den meisten Lehrbüchern der Geographie nicht geschieht, noch geschehen kann. (Ostern 1858.)

Vorrede zur zweiten Auflage.

Die erfreuliche Thatsache, dass seit dem vollständigen Erscheinen der ersten starken Auflage der „Elemente der Vermessungskunde“ noch keine vier Jahre verflossen sind, ist mir ein Zeichen, dass dieses Buch bei seinem Leserkreise dieselbe günstige Aufnahme fand, wie bei den Fachgelehrten, welche es öffentlich beurtheilten. Ich habe mir desshalb auch nicht erlaubt, diese zweite Auflage prinzipiell zu verändern; wohl aber war ich bemüht, ihren Inhalt zu vermehren und zu verbessern, während die Verlagshandlung durch Anwendung von etwas kleinerem Druck und schwächerem Papier es möglich machte, die früheren zwei Bände zu vereinigen und den Preiss des Buchs zu vermindern, ohne der Eleganz der Ausstattung zu schaden.

In der neuen Auflage ist die Instrumentenlehre um zehn Paragraphen und dreissig Abbildungen vermehrt, die Theorie der Messungen aber theilweise abgekürzt und umgearbeitet. Die Kürzungen betreffen namentlich die Kapitel von der Messung der Linien und den fehlerzeigenden Dreiecken, welche mir bei wiederholter Durchsicht noch etwas zu ausführlich erschienen, obgleich ich schon bei der ersten Bearbeitung alle theoretischen Sätze wegliess, welche keine Beziehung zur Praxis haben. Eine gänzliche Umarbeitung erfuhr die Lehre vom

barometrischen Höhenmessen, nachdem ich in der Zwischenzeit über diesen Gegenstand umfassende Beobachtungen und Untersuchungen angestellt hatte, welche nicht unwichtige theoretische und praktische Ergebnisse lieferten und auch zu neuen hypsometrischen Tafeln führten, die im Anhange enthalten sind. Die meisten Kapitel liess ich unverändert, insbesondere jenes von den Grubenmessungen, über welches sich zwei öffentliche Stimmen insoferne widersprachen, als eine behauptete, dasselbe sey zu lang, und eine andere, es sey zu kurz. In diesem Widerspruche fand ich einerseits den Beweis, dass ich gerade den für ein Lehrbuch passenden Mittelweg getroffen habe, und andrerseits die Aufforderung, jenem Wege auch ferner zu folgen, mit offenen Augen für das Neue, das er bietet.

Dieser Aufforderung leistete ich sofort Genüge, indem ich in die Instrumentenlehre alle brauchbaren neuen Erfindungen, welche unterdessen gemacht wurden, aufnahm. Der Markscheide-Apparat ist hiedurch so vervollständigt worden, als es die Lehre von den damit auszuführenden Arbeiten schon vorher war. Man darf jedoch, wie ich bereits in der Vorrede zur ersten Auflage angeführt habe, die ganze Markscheidekunde nicht in der kleinen Zahl von Blättern suchen, welche die Ueberschrift „Grubenmessungen" führen, sondern muss bedenken, dass jene wesentlichen Theile der bergmännischen Messkunst, welche mit den gleichnamigen geodätischen übereinstimmen, bereits in der Instrumentenlehre und in den Abschnitten von den Horizontal- und Vertikalmessungen enthalten sind. In dem von den Grubenmessungen handelnden Abschnitte ist wesentlich nur das vorgetragen, was man die „alte Markscheidekunst" zu nennen beliebt, und was sich bis auf Weiteres weder aus dem Gebiete der Messkunde hinausweisen noch gut mit der Geodäsie vereinigen lässt.

Diejenigen praktischen Geometer, welche der Meinung sind, dass der Messtisch und die Kippregel einer unwissenschaftlichen Vergangenheit angehören, werden diese Auflage vielleicht desshalb tadeln, weil ich in ihr neben dem älteren Reichenbach-schen Menselapparate auch den neuen dargestellt habe, welchen ich voriges Jahr in dem hiesigen Ertel'schen mechanischen Institute für meinen Gebrauch anfertigen liess. Dieselben mögen aber bedenken, dass dieser Apparat gegenwärtig durch die Bemühungen mehrerer Ingenieure und Mechaniker dem Theodolithen ziemlich nahe gebracht und desshalb zu Aufnahmen von geringer Genauigkeit geeigneter ist als jede andere Vorrichtung, welche die Abbildung des Gemessenen nicht unmittelbar zulässt. Diese Aufnahmen sind sehr bequem und schnell zu machen, wenn das Fernrohr der Kippregel zum Distanzmessen eingerichtet ist; eine Einrichtung, welche man auffallenderweise viel weniger verbreitet findet, als sie verdient. Um jedoch nicht missverstanden zu werden, bemerke ich ausdrücklich, dass ich für genaue Messungen, und selbst schon für die Aufnahme des Details der Katasterpläne, die Dreiecks- und Coordinatenmethode jeder anderen vorziehe, wie ich dieses auch bereits in der ersten Auflage deutlich ausgesprochen und durch umständliche Behandlung jener Methode thatsächlich bewiesen habe.

Schliesslich fühle ich mich verpflichtet, meinem bisherigen Assistenten, Herrn Professor Döhlemann, hiemit öffentlich zu danken nicht bloss für die mit grösster Sorgfalt durchgeführte Correctur dieses Werks, sondern auch für die mühsame Anfertigung des alphabetischen Sachregisters, womit die neue Auflage bereichert ist. (Weihnachten 1861.)

Carl Bauernfeind.

Inhaltsverzeichniss.

Originalliteratur,

welche bei Abfassung dieses Werkes benutzt wurde.

A. Bücher.

Amsler, über einen neuen Planimeter. Schaffhausen, 1856.
Baeyer, Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin. Berlin, 1840.
Bauernfeind, Theorie und Gebrauch des Prismenkreuzes. München, 1851.
——— die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen. München, 1853.
——— Beobachtungen und Untersuchungen über barometrische Höhenmessungen und die Temperaturänderungen der Atmosphäre. München, 1862.
Bessel und **Baeyer**, Gradmessung in Ostpreussen. Berlin, 1838.
Bohnenberger, Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung. Göttingen, 1795.
Breithaupt, Magazin mathematischer Instrumente. Cassel, 1835.
Gauss, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Göttingen, 1844.
Grunert, Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik. Brandenburg, 1838.
Hansen, Instruction für die Triangulation von Thüringen. Weimar, 1848.
Hanstadt, Anleitung zur Markscheidekunst. Pesth, 1835.
Ohm, Grundzüge der Physik als Compendium zu seinen Vorlesungen. Nürnberg, 1854.
Salneuve, Cours de topographie et de géodésie. Paris, 1841.
Schwerd, die kleine Speyerer Basis. Speyer, 1822.
Stampfer, Anleitung zum Nivelliren. Wien, 1852.
Woltman, Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels. Hamburg, 1790.

B. Zeitschriften.

Crelle, Journal der reinen und angewandten Mathematik. Berlin.
Dingler, polytechnisches Journal. Augsburg.
Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch. Berlin.
Grunert, Archiv für Mathematik und Physik. Greifswald.
Schlömilch und **Witzschel**, Zeitschrift für Mathematik und Physik. Leipzig.
Schumacher, astronomische Nachrichten. Altona.
Zeuner und **Bornemann**, der Civilingenieur. Freiberg.

Einleitung.

1. Allgemeine Betrachtungen und Begriffe.

§. 1. **Messen.** Die Bestimmung des Verhältnisses zweier gleichartiger Grössen heisst messen. Bei der Verrichtung dieses Geschäftes kommen in Betracht: die zu messende Grösse, welche sich als Linie, Fläche, Körper, Zeit, Kraft darstellt; die Masseinheit oder die gegebene Grösse, womit eine andere noch unbekannte gleicher Art verglichen wird; und das Mass oder die Zahl, welche den Inhalt der gemessenen Grösse in Masseinheiten angibt.

Bestimmt man das Mass durch wirkliches Ausgleichen der zu messenden Grösse mit der Masseinheit, so verrichtet man eine unmittelbare Messung; wird aber dieses Mass aus bekannten Grössen, welche mit der zu messenden in einem bestimmten mathematischen Zusammenhange stehen, gefunden, so heisst dieser Vorgang eine mittelbare Messung. So misst man z. B. eine gerade Linie unmittelbar durch Anlegen eines die einfache oder zusammengesetze Längeneinheit darstellenden Massstabes, und mittelbar, indem man sie mit zwei anderen Geraden zu einem Dreiecke verbindet und ihre Länge aus drei entsprechenden vorher gemessenen Stücken des Dreiecks berechnet oder zeichnet.

Zu den mittelbaren Messungen gehören auch jene, bei welchen die gemessene Grösse durch eine ihr zwar ungleichartige aber in bestimmter Beziehung zu ihr stehende Masseinheit ausgedrückt wird, wie z. B. die Geschwindigkeit v eines Körpers durch den Weg w, welchen er in der Zeiteinheit zurücklegt, oder die Temperatur t durch die Länge g der Quecksilbersäule im Thermometer. Bei diesen Messungen geht die Vergleichung zwar auch nur zwischen je zwei gleichartigen Grössen vor sich, aber man drückt von jedem Paare der verglichenen Grössen nur eine aus, da die andere stillschweigend als Einheit angenommen wird. In dem vorhin angeführten ersten Beispiele bilden die Geschwindigkeiten 1 und v das erste und die in der Zeiteinheit zurückgelegten Wege 1 und w das zweite Verhältniss

einer geometrischen Proportion, aus welcher somit die Geschwindigkeit v gleich dem Wege w folgt. Nach dem zweiten Beispiele stehen zwei Temperaturen 1 und t in dem ersten und zwei Säulenlängen 1 und g in dem zweiten Verhältniss einer Proportion, welche die Temperatur t gleich g Grad liefert.

§. 2. **Vermessungskunde.** Mit dem Ausdrucke Vermessungskunde verbindet man Begriffe von verschiedener Ausdehnung. Im weitesten Sinne versteht man darunter die Lehre von der Ausmessung aller räumlich ausgedehnten irdischen Gegenstände mit Einschluss des Erdkörpers: die praktische Geometrie; im engsten Sinne aber bloss die Lehre von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche oder einzelner Theile derselben: die Geodäsie.

Nach der ersten Auffassung ist der Umfang der Vermessungskunde schwer zu begrenzen, indem er sich in alle Gebiete des menschlichen Wissens und Schaffens, welche eine Messung physischer Grössen erfordern oder zulassen, erstreckt; nach der zweiten wird er aber so beschränkt, dass die wichtigen Messungen in Bergwerken und an Flüssen, obwohl sie ganz auf den Lehren der Landmessung beruhen und nur noch einige besondere Hilfsmittel erfordern, keinen Platz darin finden. Es erscheint desshalb angemessen, dem Begriffe der Vermessungskunde diejenige Ausdehnung zu geben, nach welcher er die Land- und Erdmessung nebst der Markscheide- und Wassermesskunst umschliesst und sich als die Lehre von der Bestimmung der gegenseitigen Lage von festen Punkten auf und unter der Erdoberfläche und der Geschwindigkeiten fliessender Gewässer definiren lässt.

Die gegenseitige Lage von Punkten der Erdrinde wird eben so wie die Lage bloss gedachter Punkte durch Linien und Winkel bestimmt; die Geschwindigkeit eines fliessenden Wassers aber ergiebt sich aus einer Verbindung von Zeit- und Längenmessungen. In der Vermessungskunde hat man es also wie in der reinen Geometrie mit Linien und Winkeln, und ausserdem noch wie in der Mechanik mit Zeiten zu thun. Diese Grössen sind in der Geometrie und Mechanik, weil sie nur gedacht werden, mit der grössten Schärfe gegeben; in der Anwendung aber, wo sie beobachtet werden müssen, fällt diese Schärfe weg, da die Hilfsmittel der Beobachtung, Sinne und Mess-Werkzeuge, selbst bei der grösstmöglichen Vollkommenheit, welche sie von Natur oder durch Kunst besitzen, nie gestatten, irgend eine Grösse ganz und gar fehlerfrei zu messen. Die uns von der Natur gesetzte Grenze der Genauigkeit des Messens ist übrigens so weit hinausgerückt, dass wir innerhalb derselben alle technischen und wissenschaftlichen Bedürfnisse recht wohl befriedigen können; denn es lassen sich Längen bis auf den tausendsten Theil einer Linie und Winkel bis auf halbe Sekunden sicher messen.

§. 3. **Gestalt und Grösse der Erde.** Die Bestimmung der Gestalt und Grösse der Erde gehört zu den schwierigsten Arbeiten der Messkunst und erfordert desshalb die feinsten mechanischen und geistigen Hilfsmittel zur Durchführung. Es kann demnach auch jetzt nur von den Ergebnissen

dieser lange fortgesetzten und nunmehr in der Hauptsache abgeschlossenen Arbeiten die Rede seyn und erst später gezeigt werden, auf welchen Wegen man zu ihnen gelangt. Diese Ergebnisse müssen wir aber schon hier kennen, nicht bloss um eine richtige Vorstellung von dem eigentlichen Gegenstande der Vermessungskunde zu erhalten, sondern auch um sie bei den folgenden Betrachtungen über Messinstrumente und Messungen zu benützen.

Nach den Arbeiten von Bessel, welche die genaueste Bestimmung der Gestalt und Grösse der Erde aus eigenen und fremden Messungen zum Ziele hatten, ist es sehr wahrscheinlich, dass die mathematische Figur der Erde, welche als Umdrehungs-Ellipsoid betrachtet wird, nicht regelmässig ist, sondern nur diesem Ellipsoid sehr nahe kommt, zu dem sie sich wie die Oberfläche eines bewegten Wassers zu der eines ruhigen verhält. Die Abweichungen von dem Ellipsoid sind aber so gering, dass sie bei den feinsten Erdmessungen unberücksichtigt bleiben können.

Somit sehen wir die Erde als einen Körper an, dessen mathematische Oberfläche entsteht, wenn sich eine Ellipse, deren grosse Halbaxe a = 3 272 077 Toisen = 6 377 400 Meter, und deren kleine Halbaxe b = 3 261 139 Toisen = 6 356 080 Meter ist, um ihre kleine Axe dreht. Dieses Ellipsoid weicht auch nur wenig von einer Kugel ab, da der Unterschied der beiden Axen bloss den 300sten Theil der grossen Axe beträgt. Das Verhältniss dieses Unterschieds zur grossen Axe nennt man die *Abplattung der Erde* und es ist dieselbe gleich

$$A = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{299{,}1528} \text{ oder nahezu } = \frac{1}{300} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Berechnet man den Halbmesser einer Kugel, welche dieselbe Oberfläche wie das Erdellipsoid hat, so beträgt dessen Länge 3 266 608 Toisen; und bestimmt man den Halbmesser derjenigen Kugel, welche an Inhalt dem Erdellipsoid gleichkommt, so ist derselbe = 3 266 604 Toisen: zwei Grössen, wovon die eine gar nicht, die andere aber nur um 4 Toisen von dem arithmetischen Mittel der beiden Halbaxen a und b abweicht. Wegen dieser geringen Verschiedenheit kann man für die meisten Arbeiten der Vermessungskunde die Erde als eine Kugel von 3 266 608 Toisen oder 6 366 740 Meter Halbmesser betrachten.

§. 4. **Geographische Begriffe.** Zur genauen Bezeichnung von Punkten der Erde denkt man sich auf und in dieser gewisse Linien gezogen, deren Bedeutung und Namen man kennen muss. Die kleine Axe der das Erdellipsoid erzeugenden Ellipse heisst die *Erdaxe*. Jede durch diese Axe gelegte Ebene heisst eine *Meridianebene*, und der Schnitt einer solchen Ebene mit der Erdoberfläche ein *Meridian*. Jeder Meridian ist der erzeugenden Ellipse des Erdsphäroids gleich. Sieht man die Erde als Kugel an, so ist er ein grösster Kreis. Die Ebene, welche durch den Erdmittelpunkt geht und auf der Umdrehungsaxe senkrecht steht, heisst *Aequatorebene*, und der grösste Kreis, nach welchem sie die Erdoberfläche schneidet, der *Aequator*. Jeder Durchschnitt einer dem Aequator parallelen Ebene mit

der Erdoberfläche wird ein Parallelkreis oder kürzer ein Parallel genannt.

Die Lage eines Punktes auf dem Erdsphäroid wird durch zwei Bögen bestimmt, von denen der eine seine geographische Länge und der andere seine geographische Breite heisst. Denkt man sich nämlich durch den zu bestimmenden Punkt eine Meridianebene gelegt, so heisst der Bogen, welcher den Neigungswinkel dieser Meridianebene gegen eine bestimmte als erste angenommene Meridianebene misst, die geographische Länge jenes Punkts, während der Neigungswinkel der Normale des zu bestimmenden Punkts gegen die Aequatorebene seine geographische Breite genannt wird. Die geographischen Breiten werden auf den Meridianen vom Aequator aus gezählt und man unterscheidet nördliche und südliche Breiten, je nachdem sie sich auf die nördliche oder südliche Halbkugel beziehen. Die Längen werden dagegen von den Deutschen und Franzosen von jenem Meridian an gezählt, welcher 20° westlich von dem Meridiane der Pariser Sternwarte liegt und an der Insel Ferro vorbeigeht; von den Engländern aber von dem Meridian ihrer Sternwarte zu Greenwich an. Von diesen ersten Meridianen aus zählt man die Längen gegen Ost bis zu 360°, oder man zählt sie gegen Ost nur bis zu 180° und über West auch bis zu 180°; dann muss man aber östliche und westliche Längen unterscheiden.

Nach diesen Erklärungen ist die am Ende dieses Buchs beigefügte Tafel I. über die Längen verschiedener Grade auf der Erdoberfläche von selbst verständlich. Dieselbe vervollständigt die im vorigen Paragraph enthaltenen Angaben über die Gestalt und Grösse der Erde und leistet bei vielen Rechnungen gute Dienste.

§. 5. **Lothrechte Linien und Ebenen.** Es ist eine bekannte Wirkung der Schwerkraft, dass sie jeden auf der Erde befindlichen Körper nach einer Richtung anzieht, welche auf der Erdoberfläche senkrecht steht. Diese Richtung nennt man lothrecht oder vertikal und stellt sie in Wirklichkeit ganz einfach durch einen Faden dar, welcher an dem einen Ende festgehalten und an dem anderen mit einem schweren Körper belastet wird (Senkel, Loth). Jede durch eine lothrechte Linie gelegte Ebene heisst eine lothrechte oder vertikale Ebene.

Sieht man die Erde als Kugel an, so schneiden sich alle lothrechten Linien und Ebenen in deren Mittelpunkt; betrachtet man sie aber als Umdrehungsellipsoid, so gehen nicht alle Lothe durch die Mitte, sondern nur diejenigen, welche auf dem Aequator oder an den Polen stehen, und die übrigen begegnen sich nur dann, wenn sie in einer und derselben Meridianebene liegen oder zu einem und demselben Parallelkreise gehören. Es versteht sich demnach von selbst, dass man bei dieser Annahme nicht durch irgend zwei beliebige lothrechte Linien eine Vertikalebene legen kann, sondern nur durch je zwei, welche sich schneiden.

Alle Lothe auf einem Erdabschnitte sind gegeneinander geneigt; der Neigungswinkel ist aber in vielen Fällen so klein, dass er der Null gleich

geachtet werden kann. Denn nimmt man die Erde als Kugel vom Halbmesser $r = 3\,266\,608$ Toisen an, so wird der Mittelpunktswinkel C der Lothe L und L', welche um den grössten Kreisbogen $LL' = b$ von einander abstehen, nach der Proportion:

$$2\,r\,\pi : b = 360^\circ : C^\circ = 60.60.360'' : C''$$

ausgedrückt durch die Gleichung:

$$C = 206\,265 \frac{b}{r} \text{ Sekunden}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

wobei sich von selbst versteht, dass b und r mit einerlei Masseinheit gemessen werden müssen. Hieraus findet man

für $b = 6000$ Pariser Fuss den Winkel $C = 63{,}14$ Sekunden;

es beträgt somit die Neigung zweier Lothe, welche eine Viertelmeile auseinanderstehen, erst eine Minute: man kann demnach in sehr vielen Fällen die lothrechten Linien als parallel ansehen.

§. 6. **Wagrechte Linien und Flächen.** Mit dem Begriffe der lothrechten Linie ist auch jener der wagrechten gegeben; denn jede Richtung, welche auf einem Lothe senkrecht steht, heisst wagrecht oder horizontal. Da die Lothlinien zweier Punkte der Erdoberfläche einen Winkel mit einander bilden, so ist klar, dass eine Gerade, welche auf dem einen Lothe senkrecht ist, es nicht auch zugleich auf dem anderen seyn kann; dass folglich die wagrechte Richtung für jeden Punkt der Erde eine andere ist und strenggenommen nur diejenigen Horizontallinien parallel sind, welche zu einem und demselben Lothe gehören.

Stellt man sich die Erde wieder als eine Kugel vor und denkt sich durch irgend einen Punkt L der Oberfläche und den Mittelpunkt C eine lothrechte Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene die Kugelfläche nach einem grössten Kreise, welcher auf allen in ihm liegenden lothrechten Linien, da sie Halbmesser sind, senkrecht steht. Dieser Kreis heisst die wahre Horizontallinie des Punktes L, und eine Berührende an den Kreis in diesem Punkte dessen scheinbare Horizontallinie. Da nun durch die Punkte L und C unendlich viele lothrechte Ebenen gelegt werden können, so gibt es auch unendlich viele wahre und scheinbare Horizontallinien eines Punktes (L). Denkt man sich aber alle wahren Horizontallinien zu einer krummen, und alle scheinbaren Horizontallinien zu einer ebenen Fläche vereinigt, so heisst die erstere, welche eine der Erdgestalt concentrische Kugelfläche ist, der wahre Horizont, und letztere, welche den wahren Horizont berührt, der scheinbare Horizont des Punktes L.

Die scheinbaren horizontalen Linien oder Ebenen zweier Punkte L und L', welche um den Erdbogen b von einander abstehen, schneiden sich unter einem Winkel C, der sich aus der Gleichung (2) ergibt. Es dürfen somit die Horizontalebenen nahe gelegener Punkte in den meisten Fällen als parallel angenommen werden, und wenn es z. B. auf einen Neigungswinkel von 4 Minuten nicht ankäme, sogar noch die Horizontalebenen zweier Punkte, die eine geographische Meile von einander entfernt sind.

Betrachtet man die Erdoberfläche als Ellipsoid, so stellt zwar die Berührungsebene in irgend einem Punkte L dessen scheinbaren Horizont vor, aber der wahre Horizont ist jetzt keine Kugelfläche und die wahre Horizontallinie kein grösster Kreis mehr. Jener wird unter dieser Annahme ein Umdrehungsellipsoid, dessen Axen mit denen der Erde zusammenfallen, und diese eine Curve von doppelter Krümmung, welche die geodätische Linie heisst. Unter anderen Eigenschaften besitzt diese Curve die, dass sie die kürzeste Linie ist, welche man auf dem Erdellipsoid von einem Punkte zu einem anderen ziehen kann. In der höheren Analysis und bei genauen Bestimmungen der Erdgestalt wird das Wesen der geodätischen Linie näher erörtert.

§. 7. **Karte und Plan.** Denkt man sich an irgend einen Punkt des Erdellipsoids eine Berührungsebene gelegt, so wird dieselbe auf eine kleine Strecke um diesen Punkt herum mit der mathematischen Erdoberfläche zusammenfallen. Denkt man sich weiter auf diese Ebene alle bemerkenswerthen Punkte des Erdbodens durch lothrechte (hier als parallel zu betrachtende) Linien projicirt und die Fusspunkte dieser Linien unter sich durch gerade Linien verbunden, so gibt diese Verbindung einen natürlichen Grundriss der Gegend. Verjüngt man diesen Riss auf einer Ebene so, dass alle Seitenverhältnisse und alle Winkel sich gleich bleiben, so heisst diese dem natürlichen Grundrisse geometrisch ähnliche Abbildung ein Grund- oder Situationsplan der Gegend.

Schneidet man die vorhin gelegte Berührungsebene durch eine lothrechte Ebene oder Cylinderfläche und denkt sich darin den Schnitt derselben mit der Erdoberfläche dargestellt, so ist dieser Schnitt der natürliche Aufriss der Gegend nach der Spur der lothrechten Schnittfläche. Wickelt man diese Fläche, falls sie nicht eben ist, in eine Ebene ab und zeichnet die in ihr enthaltene gebrochene Durchschnittslinie im verjüngten Massstabe auf eine ebene Fläche, so heisst das Bild, welches so entsteht, ein Aufriss, oder ein Nivellementsplan, oder auch ein Profil nach der Richtung der schneidenden Vertikalebene oder Cylinderfläche.

Hat die aufzunehmende Erdstrecke eine grosse Ausdehnung, so kann man die in der Mitte derselben an das Erdellipsoid gelegte Berührungsebene nicht mehr für die ganze Strecke als horizontal ansehen und muss sich desshalb jetzt alle hervorragenden Punkte des Erdbodens mittels lothrechter Linien auf das Erdellipsoid selbst projicirt und die Fusspunkte der Lothe durch geodätische Linien verbunden denken. Die so erhaltene natürliche Projection kann man aber auf einer Ebene nicht geometrischtreu abbilden, weil sich eine kugelförmige Fläche nicht abwickeln lässt. Ein richtiges Bild ist nur auf einer Kugel (einem Globus) möglich. Dergleichen Abbildungen werden jedoch theils der Bequemlichkeit, theils der Kosten halber nur in sehr kleinem Massstabe [1] ausgeführt und sind folglich für die genauere Dar-

[1] Ein nur im Massstabe von 1 : 4 000 000 ausgeführter Globus hat schon 10 Fuss Durchmesser.

stellung eines Landes nicht zu gebrauchen. Man war desshalb auf Hilfsmittel bedacht, durch welche mit verhältnissmässig geringer Aufopferung von Genauigkeit grössere Theile der Erdoberfläche, ja selbst Hälften derselben auf Ebenen abgebildet werden können. Diese Hilfsmittel sind Systeme von Linien, welche die Meridiane und Parallelkreise des abzubildenden Erdtheils vorstellen, und in welche alle bemerkenswerthen Punkte nach ihren geographischen Längen und Breiten eingezeichnet werden. Die Abbildung eines Landes nun, welche sich auf ein solches Liniennetz gründet, nennen wir eine Karte desselben, eine Landkarte.

§. 8. **Eintheilung.** Man pflegt die Vermessungskunde in eine niedere und höhere einzutheilen und zu jener das Aufnehmen solcher Landstrecken, bei welchen die Erdkrümmung nicht in Betracht kommt, zu dieser aber die grösseren Landesvermessungen und die Gradmessungen, welche die Ermittelung der Erdgestalt bezwecken, zu rechnen. Mit andern Worten: man rechnet zur niederen Messkunst das Aufnehmen der Pläne und zur höheren die Herstellung der Karten.

Diese Eintheilung ist zunächst einseitig; in so ferne sie nur auf einen Theil der Vermessungskunde, die Geodäsie, Rücksicht nimmt, und die übrigen Theile bald da bald dorthin weist. Sie ist aber auch überflüssig. Denn da sie eigentlich doch nichts anderes als eine Trennung der einfacheren Messungen und Rechnungen von den schwierigeren bewirken will, so lässt sich dieser Zweck auch dadurch erreichen, dass man, von einer natürlichen Eintheilung ausgehend und in jeder Abtheilung vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreitend, nur so viel in seine Betrachtungen und Entwickelungen aufnimmt, als zur Erreichung eines vorgesteckten Zieles erforderlich ist. Wir unterscheiden daher nur folgende Hauptabtheilungen der Vermessungskunde:

I. Die Lehre von den Hilfsmitteln der Messungen oder die Theorie der Messinstrumente;

II. die Lehre von der Anwendung der Messinstrumente auf die Lagenbestimmung von Punkten der Erdrinde und auf die Ermittelung von Geschwindigkeiten fliessender Gewässer, oder die Theorie der Messungen;

III. die Lehre von der bildlichen Darstellung des Gemessenen oder die Theorie der Plan- und Kartenzeichnung.

Jeder dieser drei Hauptabschnitte wird hier so weit abgehandelt, als nöthig ist, um darnach alle Messungen für technische und staatswirthschaftliche Zwecke mit Sicherheit und Zuverlässigkeit ausführen und das Studium der grösseren Werke über Landes- und Gradmessungen mit Nutzen betreiben zu können.

2. Von den bei Vermessungen gebräuchlichen Massen.

§. 9. **Masse im Allgemeinen.** So lange sich, wie bei den meisten Vermessungen, die Lage der zu messenden Gegenstände gegen den Beobachter

nicht ändert, hat es der praktische Geometer nur mit Längen-, Winkel-, Flächen- und Körpermassen zu thun. Tritt aber während der Beobachtung eine Aenderung in der Lage des zu messenden Gegenstandes ein, wie z. B. bei Geschwindigkeitsmessungen fliessender Gewässer, dann kommt auch noch das Zeitmass in Anwendung. Dieses ausgenommen lassen sich alle übrigen Masse auf das Längenmass zurückführen, wesshalb dessen genaue Bestimmung von der grössten Wichtigkeit ist.

In Bezug auf das Resultat einer Grössenbestimmung ist es gleichgültig, welches Mass ihr zu Grunde liegt, da sich mit jeder gleichartigen Masseinheit, wenn sie recht angewendet wird, eine richtige Vorstellung von der Ausdehnung der gemessenen Grösse erlangen lässt. Anders aber verhält es sich, wenn man darnach fragt, wie verschiedene Masseinheiten den Bedürfnissen des gesellschaftlichen Verkehrs entsprechen. Diese Frage wird allgemein dahin beantwortet; dass es besser wäre, wenn alle Völker sich nur eines und desselben Masses bedienten, weil dann keine Zeit mit Massverwandlungen verloren ginge und eine Menge von Irrungen nicht vorkäme.

Wirft man einen flüchtigen Blick auf das Entstehen der Masse, so wundert man sich vielleicht weniger mehr über deren Mannichfaltigkeit und Verschiedenheit. Für Längen hat man ursprünglich die Grösse gewisser menschlicher Körpertheile als Masseinheiten genommen; so z. B. die Länge der Füsse (Fuss, Schuh), den Abstand derselben beim Gehen (Schritt), die Breite des Daumens (Zoll), die Höhe der Faust (Palm), die Entfernung der äussersten Endpunkte der ausgespannten Hand (Spanne), die Länge eines Arms (Elle), die Länge der beiden seitwärts gestreckten Arme (Klafter), u. s. w. Eben so wurden die Flächenmasse, wo sie sich nicht auf die vorausgehenden Längeneinheiten stützten, von ganz zufälligen Dingen entlehnt; so z. B. die Feldmasse von der Arbeitsleistung der Menschen oder Thiere in einer bestimmten Zeit, oder von der Menge Aussaat an Getreide u. dgl. mehr, wie schon die Namen der Flächeneinheiten des genannten Masses: Morgen, Tagwerk, Mannsmahd, Joch, Scheffel etc. andeuten.

Nicht weniger willkürlich als mit der Festsetzung der Masseinheit verfuhr man mit der Zusammensetzung derselben zu grösseren Einheiten, oder mit ihren Unterabtheilungen. Hier bildeten 12, dort 15, dort 16 Fuss eine Ruthe; hier 6, dort 7 und anderswo 8 Fuss eine Lachter. Bei den Unterabtheilungen huldigte man bald dem System des fortgesetzten Halbirens, wodurch man Halbe, Viertel, Achtel, Sechszehntel erhielt; bald zerfällte man die Einheit nach dem Duodecimalsysteme in Halbe, Drittel, Viertel, Sechstel, Zwölftel. Von dem Wirrwarr, der dadurch entstand, kann man einen Begriff bekommen, wenn man ältere und namentlich deutsche Masstabellen durchsieht.

Um diesem Gewirre zu entrinnen, ging schon seit dem 17. Jahrhundert das Bestreben mehrerer Gelehrten und einiger Staatsregierungen dahin, eine von individuellen Zufälligkeiten unabhängige Masseinheit, ein sogenanntes

Naturmass aufzufinden, das, wenn es verloren ginge, jederzeit wieder bestimmt werden könnte, in soferne sich nur seine Definition durch Ueberlieferung erhielte. Zu dem Ende wurden verschiedene Längen in Vorschlag gebracht: zu Ende des 17. Jahrhunderts von Huyghens die Länge des einfachen Sekundenpendels; in der Mitte des 18. Jahrhunderts von A. Böhm der Fallraum eines Körpers während der ersten Sekunde; endlich zu Ende des 18. Jahrhunderts von einer aus Borda, Lagrange, Laplace, Monge und Condorcet bestehenden Commission der Pariser Akademie der Wissenschaften die Länge des zehnmillionsten Theils eines Erdquadranten oder des elliptischen Meridianbogens vom Aequator bis zum Pole.

Zur Ausführung eines dieser drei Vorschläge war für Frankreich in dem letzten Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts ein günstiger Zeitpunkt eingetreten und es wurde derselbe auch von der damaligen Nationalversammlung benützt, indem sie sich im Jahre 1790 für die Pendellänge als Masseinheit erklärte. Nachdem man aber in der Veränderlichkeit dieser Länge mit der Lage des Ortes, an welchem sie bestimmt wird, und in dem Umstande, dass die Längeneinheit von einer ihr ungleichartigen Masseinheit, jener der Zeit, abhängig gemacht würde, Schwierigkeiten fand, die sich nicht beseitigen liessen, nahm dieselbe Versammlung drei Jahre später den Vorschlag der obengenannten Commission an, damit man, wie sie sich ausdrückte, ein unveränderliches Mass erhalte, bei dessen Bestimmung nichts zu Grunde liege, was willkürlich oder den Verhältnissen irgend eines Volks besonders angepasst sey.

Die Genauigkeit dieses Masses hing von der Schärfe ab, mit welcher die Länge des Erdquadranten bestimmt wurde, und da man von diesem doch nur einige Grade unmittelbar messen konnte, seine ganze Länge also berechnen musste, von der richtigen Bestimmung der Abplattung der Erde. Diese war damals aus den französischen Gradmessungen in Peru und Lappland = 1 : 304 abgeleitet worden. Man traute aber diesen Messungen nicht ganz und liess desshalb durch Mechain und Delambre eine neue Messung vornehmen. Es wurde dazu der Meridian der Pariser Sternwarte gewählt und von diesem zwischen Dünkirchen und Barcellona ein Bogen von 9,6738 Graden gemessen, welcher eine Länge von 551 584,72 Toisen (und zwar der Toise, welche der Peruanischen Gradmessung zu Grunde lag) ergab. Nach diesem Ergebniss wurde die Abplattung auf 1 : 334 vermindert und die Länge des Meridianquadranten auf 5 130 740,74 Toisen berechnet. Der zehnmillionste Theil dieser Länge = 0,513074 der Toise von Peru = 443,296 Pariser Linien ist seit jener Zeit die französische Masseinheit und heisst **Meter** (fr. mètre von *μέτρον*, Mass). Die Regierung liess einen parallelepipedischen Platinastab von etwa 1 Zoll Breite und 2 Linien Dicke anfertigen, dessen Endflächen bei der Temperatur des schmelzenden Eises genau um 1 Meter von einander abstehen.

Ein eigentliches Naturmass ist der Meter so wenig als die Toise von Peru oder irgend ein anderes genau bestimmtes Längenmass. Denn abgesehen

davon, dass nach neueren Messungen und Rechnungen von Bessel die Meridiane der Erde wahrscheinlich ungleich lang sind und folglich aus einigen gemessenen Graden nicht mit Sicherheit berechnet werden können, hat derselbe Geometer und Astronom aus den der Bestimmung des Meters zu Grunde liegenden französischen und mehreren anderen Gradmessungen, welche er einer neuen strengen Prüfung unterwarf, gefunden, dass der elliptische Meridianquadrant nicht 10 000 000, sondern 10 000 859 Meter lang ist, und dass folglich der jetzige Meter seiner Definition nicht ganz entspricht, indem er statt des zehnmillonsten den 10 000 859sten Theil des Meridianbogens vom Aequator bis zum Pole beträgt. Dieser Bruchtheil ist aber durch Ueberlieferung fast eben so schwer zu erhalten als jener, welcher z. B. das Verhältniss des preussischen Fusses zur Länge des Quadranten angibt, nämlich 1 : 31 864 735.

Wenn nun auch die Idee, welche der Einführung des Meters zu Grunde lag, in Beziehung auf die Masseinheit selbst nicht ganz verwirklicht werden konnte, so wurde sie doch hinsichtlich der Unterabtheilungen und Zusammensetzungen der Einheit zu grösseren Einheiten mit einer Folgerichtigkeit durchgeführt, welche allgemein anerkannt und nachgeahmt zu werden verdient. Seinem strengen inneren Zusammenhange hat es das französische Masssystem zu verdanken, dass es als das vorzüglichste anerkannt und für wissenschaftliche Bestimmungen fast überall angenommen ist.

§. 10. **Französische Masse.** Nach dem französischen Masssystem wird der Meter zehntheilig zerlegt und zusammengesetzt; die Unterabtheilungen werden durch lateinische, die Zusammensetzungen durch griechische Vorsylben bezeichnet. Demnach heisst der zehnte Theil eines Meters Decimeter, der hundertste Theil Centimeter, der tausendste Theil Millimeter, der zehntausendste Theil Decimillimeter u. s. w. Zehn Meter geben einen Dekameter, hundert einen Hektometer, tausend einen Kilometer, zehntausend einen Myriameter u. s. w.

Als Zeichen des Meters gilt der Buchstabe m, welcher der zugehörigen Zahl in Form eines Exponenten beigefügt wird; z. B. 18 Meter = 18^m. Die Unterabtheilungen werden entweder durch Decimalbrüche oder durch Zusammenstellung der Anfangsbuchstaben ihrer Vorsylben mit dem Buchstaben m angedeutet, so dass z. B. ein Decimeter durch $0^m,1$ oder 1^{dm}, 1 Centimeter durch $0^m,01$ oder 1^{cm}, 1 Millimeter durch $0^m,001$ oder 1^{mm} bezeichnet werden kann. Für die Vielfachen des Meters bedarf man begreiflicherweise keiner besonderen Zeichen.

Die Quadrate der Längenmasse geben die Flächenmasse. Als Zeichen derselben dient ein dem m beigefügtes q (von quarré Quadrat), und es bedeutet demnach z. B. 5^{mq} fünf Quadratmeter. Die Flächeneinheit der Feldmasse heisst Are (von arare pflügen) und ist einem Quadratdekameter oder hundert Quadratmetern gleich. Die auf einander folgenden Unterabtheilungen heissen: Deciare, Centiare, Milliare, und die Zusammensetzungen: Dekare, Hektare, Kiliare.

Als Körpermasse gelten die Würfel der Längenmasse. Ihr Zeichen ist ein dem m beigesetztes c (von cube Würfel), so dass 5mc fünf Kubikmeter bedeutet. Für Brennholz hat der Kubikmeter den besonderen Namen Stère (von στερεός fest); und für Flüssigkeiten bildet der Kubikdecimeter die Einheit, welche Liter (litre) heisst. Dieser Name ist von λίτρα, das ein bestimmtes griechisches Gewicht von ungefähr einem Pfunde bezeichnet, genommen und passt für ein Hohlmass in so ferne, als das Gewicht eines Liter reinen Wassers im Zustand seiner grössten Dichtigkeit bei + 4° C die am häufigsten gebrauchte Gewichtseinheit, das Kilogramm, welches 2 deutschen Zollpfunden gleich ist, bestimmt. Die eigentliche Gewichtseinheit in Frankreich heisst Gramm und ist gleich dem Gewichte eines Cubikcentimeters Wasser von der vorhin angegebenen Beschaffenheit; 1000 Gramme geben 1 Kilogramm. Näheres über die Gewichte gehört nicht hierher.

§. 11. **Deutsche Masse.** In Deutschland wurden in neuerer Zeit die Längenmasse der meisten Staaten nach dem Pariser Fuss, wovon 6 eine Toise geben, oder nach dem Meter gesetzlich geordnet; gleichwohl herrscht noch die grösste Verschiedenheit sowohl in den Einheiten als in den Unterabtheilungen und Zusammensetzungen derselben. Und wenn auch in allerneuester Zeit (Januar 1861) auf Veranlassung mehrerer deutscher Regierungen (jener von Oesterreich, Bayern, Sachsen, Hannover, Württemberg, Baden, Hessen etc.) in Frankfurt eine Commission von Sachverständigen zur Ausarbeitung eines Gutachtens über einheitliches deutsches Mass und Gewicht zusammentrat, und dieses Gutachten einstimmig dahin ging, das Metermass mit seiner Decimaltheilung in Deutschland einzuführen: so wird doch bei dem Widerstande Preussens gegen diese Vorschläge, die allgemeine Annahme des Metermasses noch lange auf sich warten lassen. Käme aber auch wirklich der Commissionsvorschlag zur Durchführung, so wären doch noch auf Jahrzehnte hinaus Massreductionen und folglich Angaben von Massverhältnissen nöthig, wesshalb wir uns veranlasst finden, hier die gebräuchlichsten Längen- und Feldmasse der grösseren Staaten zusammenzustellen.

Oesterreich. Die Klafter bildet die Einheit des Längenmasses. Ihre Länge beträgt 1,8966657 Meter oder 840,7843 Pariser Linien. Der sechste Theil der Klafter heisst Fuss. Derselbe wird für den gewöhnlichen Verkehr nach dem Duodecimalsystem in Zolle, Linien und Punkte abgetheilt, so dass $1' = 12'' = 144''' = 1728''''$. Für Feldmessungen ist das Decimalsystem eingeführt, nach welchem 1 Klafter = 10 Feldschuhen = 100 Feldzollen = 1000 Feldlinien. Beim Bergwesen heisst die Einheit des Längenmasses Lachter, ist aber der Klafter genau gleich und wird wie diese zwölf- und zehntheilig zerlegt. Zu Markscheidungen dient die Decimaleintheilung. Eine Meile ist = 4000 Klafter = 24 000 Fuss. Für den gewöhnlichen Verkehr bildet die Quadratklafter von 36 Quadratfuss die Flächeneinheit; für Feldmessungen aber das Joch, welches 1600 Quadratklafter oder 57 600 Quadratfuss umfasst, und die zehntheilig zerlegte Quadratklafter.

Preussen. Die Längeneinheit ist der preussische oder rheinländische Fuss, welcher = 0,31385 Meter = 139,13 Pariser Linien ist. Für den gewöhnlichen Verkehr bilden 12 Fuss eine Ruthe und wird der Fuss nach dem Duodecimalsystem abgetheilt. Für Vermessungen bedient man sich aber des Decimalsystems, nach welchem eine Ruthe in Zehntel-, Hundertel- und Tausendstelruthen abgetheilt wird. Der Seefaden enthält 6 preuss. Fuss, die Berglachter 80 preuss. Zoll, die Meile 2000 preuss. Ruthen. Die Lachter wird in 8 Achtel zu 10 Lachterzollen und jeder Zoll in 10 Primen zu 10 Sekunden eingetheilt. Als Flächeneinheit für den gewöhnlichen Verkehr dient der Quadratfuss zu 144 Quadratzoll à 144 Quadratlinien; für Feldmessungen aber der Morgen von 180 Quadratruthen, jede zu 144 Quadratfuss, oder die Quadratruthe und deren Unterabtheilungen nach Zehnteln.

Bayern. Der Fuss = 0,29186 Meter = 129,38 Pariser Linien bildet die Längeneinheit. Für den bürgerlichen Verkehr ist die zwölftheilige, für Vermessungen aber die zehntheilige Zerlegung im Gebrauche. Jene gibt das Werkmass, diese das Feldmass. Demnach ist eine Werkruthe = 12 Fuss = 144 Werkzoll = 1728 Werklinien und 1 Feldruthe = 10 Fuss = 100 Decimalzoll = 1000 Decimallinien. Eine bayerische Meile (= 2 Poststunden = 25406 Fuss bayr.) ist um 15,6 bayr. Fuss kleiner als 1 geographische Meile, wovon 15 auf 1 Aequatorgrad gehen. Der Quadratfuss bildet die Einheit des Flächenmasses für den gewöhnlichen Verkehr, und das Tagwerk zu 40000 Quadratfuss für Feldmessungen. Den 100sten Theil eines Tagwerks von 400 Quadratfuss Inhalt nennt man eine Decimale, und es werden alle kleineren Feldflächen in Zehntel- und Hundertel-Decimalen ausgedrückt.

Hannover. Die Längeneinheit ist der Fuss = 0,2920947 Meter = 129,4844 Pariser Linien. Er wird zwölftheilig in Zoll und Linien, die aus 16 Fuss bestehende Ruthe aber für Feldmessarbeiten in Zehntel-, Hundertel und Tausendstel-Ruthen eingetheilt. Beim Nivelliren müssen die Höhenunterschiede in Fussen und D. D. Zollen ausgedrückt werden. Die im Bergbau übliche Lachter ist = 78,082 hann. D. D. Zoll und wird in 8 Achtel, jedes zu 10 Zoll à 10 Linien getheilt. Die Meile ist = 1587,5 Ruthen = 7419,206 Meter und es gehen 14,976 auf 1 Grad des Aequators. Das Flächenmass besteht aus den Quadraten des Längenmasses; der Morgen hat 120 Quadratruthen à 256 Quadratfuss oder 2621 Quadratmeter.

Sachsen. Der Vermessung der Staatsgüter und dem neuen Steuersystem liegt der sächsische Fuss von 0,28319 Meter oder 125,537 Pariser Linien Länge zu Grunde, und es wird derselbe sowohl zwölf- als zehntheilig zerlegt. Die am häufigsten gebrauchte Längeneinheit ist aber die sächsische Elle, welche 2 sächsische Fuss umfasst und wovon 13100 gerade 1 geographische Meile geben. Die beim Feldmessen gebräuchliche Feldruthe ist = 7 Ellen 14 Zoll = 182 Zoll = 13,215 Pariser Fuss und wird in 10 Decimalfuss zu 10 Zoll à 10 Linien abgetheilt; die beim Strassenbau

übliche Landruthe hat aber 8 Ellen = 192 Zoll = 13,9486 Pariser Fuss. Die sächsische Meile umfasst 2000 Landruthen oder 32 000 sächsische Fuss. Die Lachter enthält gerade 2 Meter und wird entweder zehntheilig zerlegt oder auch in 7 Lachterfusse eingetheilt; 2 solche Fuss bilden 1 Bergelle, welche bei allen Bergbauten als Einheit genommen wird. Die Quadrate der Längen dienen als Flächenmasse; für Felder aber kommt noch der Acker mit 300 geom. Quadratruthen oder 5534,2325 Quadratmeter und der Morgen, welcher = $^1/_2$ Acker ist, hinzu.

Württemberg. Der Fuss bildet die Längeneinheit und ist = 0,28649 Meter = 127 Pariser Linien. Er wird in 10 Zolle zu 10 Linien abgetheilt und zehnfach zu einer Ruthe zusammengesetzt. Eine Meile ist = 2600 Ruthen = 26 000 Fuss. Die Quadrate der Längen geben die Flächenmasse: 1 Quadratfuss ist = 0,0820767 Quadratmeter, 1 Quadratruthe = 100 Quadratfuss, 1 Morgen, die Einheit der Feldflächen, = 384 Quadratruthen = 38400 Quadratfuss. Der Morgen wird in 4 Viertel abgetheilt. Die württembergischen Masse gelten auch in Hohenzollern-Sigmaringen.

Baden. Der badische Fuss ist = 3 Decimeter ($0^m,3$) = 132,989 Pariser Linien. Er wird nach dem Decimalsysteme in Zolle, Linien und Punkte eingetheilt; 10 Fuss bilden eine Ruthe, welche auch im Bergbaue statt der Lachter gebraucht wird; 29 629,63 Fuss geben 1 Meile von 2 Wegstunden, deren 25 auf einen Grad des Aequators gehen. Die Quadrate der Längenmasse sind die Flächenmasse: 1 Quadratruthe von 100 Quadratfuss ist = 9 Quadratmeter; 400 solcher Ruthen bilden 1 Morgen, der wie in Württemberg in 4 Viertel getheilt wird.

Hessen-Darmstadt. Die Längeneinheit ist der Zoll, welcher 25 Millimeter oder 11,0824 Pariser Linien misst. Er wird zehntheilig abgetheilt und zusammengesetzt: 10 Zoll bilden 1 Fuss, 10 Fuss 1 Klafter und 3000 Klafter 1 Meile. Die Quadratklafter zu 100 Quadratfuss bildet die Einheit des Flächenmasses für alle Räume mit Ausnahme der Grundstücke, für welche der Morgen zu 400 Quadratklaftern oder 2500 Quadratmetern, der in 4 Viertel getheilt wird, die Einheit ist.

Hessen-Cassel. Der jetzige kurhessische Fuss ist = 0,287699 Meter = 127,536 Pariser Linien = 11 rheinl. Zollen und wird nach dem Duodecimalsystem eingetheilt. Der alte Casseler oder Katasterfuss, welcher noch bei Feldmessungen im Gebrauche ist, enthält 0,2849 Meter oder 126,3 Pariser Linien. Eine (Kataster-) Ruthe ist = 14 alte Casseler Fuss = 3,98876 Meter. Diese Ruthe wird in 10 Decimalfuss zu 10 Decimalzollen à 10 Decimallinien eingetheilt. Die Quadratruthe hält 196 alte Quadratfuss und 150 solche Ruthen geben 1 Acker, die Einheit der Feldflächen.

Braunschweig. Der Fuss hat 12 Zoll zu 12 Linien und ist = 0,285362 Meter = 126,5 Pariser Linien; 2 Fuss geben 1 Elle und 16 Fuss oder 8 Ellen 1 Ruthe, welche beim Feldmessen in Zehntel- und Hundertelruthen abgetheilt wird; 1625 solcher Ruthen oder 26 000 Fuss bilden 1 Meile. Die Lachter enthält 968$^1/_2$ braunschw. oder 850,8 Pariser Linien und wird

in 8 Spann zu 10 Lachterzoll à 10 Primen eingetheilt. Der Morgen hat 120 Quadratruthen à 256 Quadratfuss.

Nassau. Für Feldmessungen gilt ein in 10 Zolle getheilter Fuss, welcher = 0,5 Meter = 221,648 Pariser Linien ist; die zugehörige Ruthe hat 5 Meter oder 10 Fuss, die Quadratruthe folglich 100 Quadratfuss oder 25 Quadratmeter; 100 solcher Quadratruthen oder 25 franz. Aren bilden 1 Morgen. Für Vermessungen im Landesbauwesen bedient man sich eines Fusses, welcher wie der badische 3 Decimeter oder 132,989 Pariser Linien lang ist und zehntheilig eingetheilt wird.

§. 12. **Schweizerische Masse.** Die Längeneinheit der schweizerischen Masse ist der Fuss, welcher wie in Baden 0,3 Meter oder 132,989 Pariser Linien enthält und in 10 Zoll zu 10 Linien à 10 Strichen eingetheilt wird; 2 Fuss geben 1 Elle, 4 Fuss 1 Stab, 6 Fuss 1 Klafter, 10 Fuss 1 Ruthe. Letztere, gerade 3 Meter lang, ist der waadtländischen Toise gleich. Die Wegstunde hat 16000 Fuss oder 4800 Meter. Bisher war theils die Züricher Wegstunde zu 4520,7 Meter, theils die Berner von 5278,6 Meter Länge im Gebrauch. Die Quadrate der Längenmasse geben die Einheiten der Flächenmasse. Bei technischen Messungen wird den Längen die Klafter und den Flächen die Quadratklafter zu 36 Quadratfuss zu Grunde gelegt. Die Quadratruthe = 100 Quadratfuss = 9 Quadratmeter dient als Feldmass für kleinere Flächen; grössere werden nach Juchart zu 40 000 Quadratfuss = 400 Quadratruthen = 36 franz. Aren ausgedrückt.

§. 13. **Englische Masse.** Die Längeneinheit des englischen Masses, der Yard, soll bereits im Jahre 1101 durch König Heinrich I., welcher die Länge seines Arms dafür gelten liess, eingeführt worden seyn. Nachdem seit jener Zeit gegen 200 Gesetze über Massbestimmungen erschienen waren, wurde schliesslich die Länge des Sekundenpendels, welche auf dem Meeresspiegel in der Breite von London 405,3425 Pariser Linien beträgt, als die unveränderliche Grundlage des englischen Masssystems angenommen und durch die Parlamentsacte vom 17. Juni 1824 der von dem Mechaniker Bird verfertigte und mit „Standard Yard 1760“ bezeichnete Massstab als derjenige erklärt, welcher bei 62^0 F durch den Abstand zweier auf goldenen Stiften befindlicher Punkte das englische Normalmass darstellt. Dieser Massstab verbrannte im Jahre 1829 mit dem Parlamentsgebäude und ist seitdem durch einen neuen ersetzt worden, welcher sich ebenfalls auf das angeführte Gesetz gründet und dessen 1760fache Länge die englische Meile darstellt. (Hieraus erklärt sich die Zahl 1760 neben der Bezeichnung „Standard Yard.“)

Der englische Yard hat eine Länge von 0,9143835 Meter oder 405,3425 Pariser Linien. Sein dritter Theil, die Länge von 0,3047945 Meter oder 135,114 Pariser Linien, heisst Fuss und wird in 12 Zolle, der Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Punkte getheilt; 16$^1/_2$ Fuss oder 5$^1/_2$ Yard bilden 1 Ruthe (rod oder pole), 66 Fuss = 22 Yard = 4 Ruthen geben 1 Kette (chain); 5280 Fuss = 1760 Yards = 320 Ruthen = 8 Furlongs sind =

1 Meile (mile). Die Kette ist die Längeneinheit der Feldmasse und wird für diese Messungen in 100 Glieder (links) eingetheilt, wovon demnach jedes 0,66 Fuss misst. Die Flächeneinheit dieser Masse ist der Acker (acre), welcher = 10 Quadratketten = 160 Quadratruthen = 4840 Quadratyards = 43560 Quadratfuss ist. Die Seemeile ist der zwanzigste Theil eines Aequatorgrads und daher = 5564 Meter = 18255 engl. Fuss, also fast $3^1/_2$mal so gross als die Landmeile.

§. 14. **Winkelmasse.** Für die Winkelmasse bildet glücklicherweise in allen Ländern der rechte Winkel die Einheit. Er wird aber nicht überall gleich eingetheilt, indem theilweise das Decimalsystem, nach welchem der rechte Winkel in 100 Grade, jeder Grad in 100 Minuten und jede Minute in 100 Sekunden getheilt wird, weit mehr aber noch das Sexagesimalsystem, wornach der rechte Winkel aus 90 Graden, jeder Grad aus 60 Minuten, jede Minute aus 60 Sekunden besteht, in Uebung ist. Selbst in Frankreich konnte die Decimaltheilung nicht ganz durchdringen, weil die Astronomen sie nicht annahmen, indem die häufigen Vergleichungen älterer und neuerer Beobachtungen zu bedeutende Reductionen veranlassen würden.

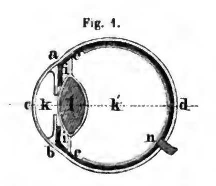
Die Centesimaltheilung der Winkel gewährt in der Schreibweise und bei Rechnungen dieselben Vortheile wie das Decimalsystem bei Längen-, Flächen- und Körpermassen. Ein Winkel von 74 Graden, 37 Minuten und 25 Sekunden der Centesimaltheilung wird ganz einfach $74^0,3725$ geschrieben. Zur Verwandlung der Centesimal- und Sexagesimalgrade in einander dienen die Gleichungen: $90^0\,S = 100^0\,C$, oder $9^0 S = 10^0 C$, oder endlich $1^0 C = 0^0,9\,S$. Obige $74^0,3725$ C sind somit $= 0,9 \times 74^0,3725 = 66^0,935$ $S = 66^0\,56'\,7''$ nach der Sexagesimaltheilung.

3. Vom Sehen mit dem freien Auge.

§. 15. **Bau des Auges.** Ohne richtige Vorstellung von dem Baue des menschlichen Auges und dem Hergange des Sehens ist die Einrichtung und Wirkungsweise mehrerer Messinstrumente nicht vollständig zu beurtheilen, wesshalb hierüber Einiges mitgetheilt wird.

Der Haupttheil des Auges ist der Augapfel, von dem Fig. 1 einen Durchschnitt vorstellen soll. Derselbe liegt in einer Höhle des Kopfknochens auf einer weichen elastischen Fettmasse und kann durch Muskeln, welche ihn an die Höhle binden, innerhalb gewisser Grenzen nach allen Richtungen hin bewegt werden. Man kann sich ihn aus zwei Kugelabschnitten (a b c, a b d) von ungleichen Halbmessern, die sich an ihrer Grundfläche (a b) berühren, zusammengesetzt denken. Der grössere Abschnitt ist von einer weissen undurchsichtigen Haut a d b (tunica sclerotica) und der kleinere von einer hellen

Fig. 1.



durchsichtigen Haut a e b (tunica cornea), welche mit jener auf's Innigste verbunden ist, eingeschlossen. An die innere Seite der harten Haut a d b schliesst sich zunächst eine nur aus Zellgewebe und Adern bestehende, von einem schwarzbraunen zähen Stoffe durchdrungene zarte Hülle, die Aderhaut (tunica choroidea) an, und darüber breitet sich ein feines netzartiges Nervengeflechte, die Netzhaut (tunica nervea s. retina), aus, welche als ein Ausläufer des bei n in das Auge gelangenden und aus dem Gehirne kommenden Sehnervs betrachtet werden kann. Die beiden den Augapfel bildenden Abschnitte werden durch eine aus Adern, Nerven und Muskelfasern bestehende Haut a b, die Iris, getrennt. Dieselbe erscheint als eine Fortsetzung der Aderhaut und hat in der Mitte ein kleines Loch, das die Pupille oder Augenöffnung heisst. Die beiden durch die Iris geschiedenen Theile des Augapfels sind mit durchsichtigen Flüssigkeiten ausgefüllt, von denen die in der Vorderkammer (k) die wässrige Feuchtigkeit (humor aqueus) und die in der Hinterkammer (k') die Glasfeuchtigkeit (humor vitreus) genannt wird. Zwischen beiden, in einer häutigen durchsichtigen Kapsel, welche von den Augenlidergeweben (e, e) gehalten wird, befindet sich ein durchsichtiger fester Körper (l), der die Krystalllinse heisst. Diese Linse ist nach Innen stärker gebogen als nach Aussen, indem der Halbmesser der Vorderfläche durchschnittlich 0,5 und jener der Hinterfläche 0,4 Pariser Linien beträgt.

§. 16. **Hergang beim Sehen.** Stellt D in Fig. 2 einen leuchtenden Punkt vor, der in der Augenaxe (D d) liegt, so dringt der von jenem Punkte ausgehende Strahlenkegel nur zum Theil in das Auge. Es wird nämlich alles ausserhalb der Hornhaut (a c b) auffallende Licht wegen der Undurchsichtigkeit der harten Haut zerstreut und das zwischen a und b eindringende Licht erleidet zunächst durch die wässerige Feuchtigkeit in der Vorderkammer eine Brechung gegen die Axe hin (D u d, D v d). Von den so gebrochenen Strahlen trifft ein Theil auf die Iris und macht ihre Farbe und ihr Gefüge sichtbar, während der andere durch die Pupille zur Krystalllinse gelangt, wo er eine zweite Brechung erfährt, auf die eine dritte von Seite der Glasfeuchtigkeit folgt. Durch diese verschiedenen Brechungen werden die durch die Linse dringenden Strahlen in dem Punkte d der Netzhaut zu einem Bilde von D vereinigt, wenn das Auge gesund ist und seine Entfernung vom Punkte D wenigstens acht Zolle beträgt. Bei kleinerer Entfernung des leuchtenden Punktes, oder wenn das Auge weit- oder kurzsichtig wäre, würde das Bild d hinter oder vor der Netzhaut, also nicht auf ihr liegen. In gleicher Weise erzeugt sich von dem Punkte E, der ausserhalb der Axe liegt, ein

Fig. 2.

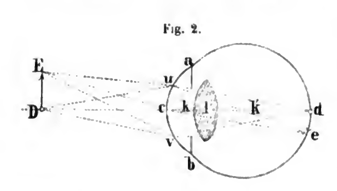


Bild in dem Punkte e, den man durch Verlängerung der Verbindungslinie des Punktes E mit dem optischen Mittelpunkte des Auges erhält. Was von E gilt, ist für jeden Punkt zwischen D und E wahr; folglich bildet sich wie bei einer Convexlinse die Linie D E auf der Netzhaut wieder als solche, aber in der umgekehrten Stellung d e ab, wovon man sich durch Versuche mit den Augen frisch getödteter Thiere (namentlich der Ochsen) leicht überzeugen kann.

Das auf der Netzhaut erzeugte Bild eines Gegenstandes reizt den Sehnerv und ruft auf eine noch unerklärte Weise die Empfindung des Sehens hervor. Da wir den Gegenstand trotz der verkehrten Stellung seines Bildes, wie die tägliche Erfahrung lehrt, aufrecht sehen, so kann man billigerweise nach dem Grund dieser Erscheinung fragen. Man erklärt dieselbe aber genügend durch die gewiss nicht unnatürliche Annahme, dass die Sehnerven nicht bloss jeden Eindruck auf die Netzhaut, sondern auch die Richtung, in welcher der Eindruck erfolgt, zu unserem Bewusstseyn bringen und wir alsdann das Empfundene in derselben Richtung nach Aussen versetzen. Da wir nun z. B. den Eindruck des Bildes e in der Richtung E e empfangen, so versetzen wir das Bild e in die Richtung e E, folglich über D, welches in der Richtung d D gedacht wird.

§. 17. **Deutliches Sehen.** Der Gegenstand, welcher sich auf der Netzhaut des Auges abbildet, wird nur dann vollständig wahrgenommen werden, wenn sein Bild eine hinreichende Deutlichkeit, Helligkeit, Grösse und Dauer besitzt.

Zur Deutlichkeit gehört erstens, dass das Auge keine Kugel- und Farbenabweichung hat, damit sich jeder leuchtende Punkt wieder als solcher abbildet, und zweitens, dass jeder Bildpunkt gerade auf der Netzhaut liegt. Der Kugelabweichung ist theils durch die Iris, welche als Blende nur auf einen kleinen Theil der Krystalllinse Licht fallen lässt, theils durch die Form dieser Linse und die Wölbung der Netzhaut vorgebeugt; was aber die Farbenabweichung betrifft, so wird diese zwar durch die verschiedenen Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse der durchsichtigen Mittel des Auges grösstentheils, jedoch nicht ganz aufgehoben, wie man an einem dunklen Gegenstande beobachten kann, der nur wenige Zolle vom gesunden Auge entfernt gehalten wird, während dieses gleichzeitig an dem Gegenstande vorbei nach einem weiter entfernten Objecte sieht: der dunkle Gegenstand hat an den Rändern farbige Säume. Wegen der zweiten Anforderung sehe man §. 18.

Die Helligkeit des Bilds hängt von der Lichtmenge ab, welche vom Gegenstand in's Auge gelangt. Diese Lichtmenge richtet sich aber nach der Stärke des Lichts und nach der Grösse der Pupille; bei gleicher Stärke ist sie der Pupillenfläche und bei unveränderlicher Pupille der Stärke proportional. Die Pupille ist indessen nicht unveränderlich: sie zieht sich nämlich bei starkem Lichte zusammen und dehnt sich bei schwachem aus, so dass in dem ersteren Falle weniger und in dem letzteren mehr Licht in das

Auge gelangt, als bei einer mittleren Oeffnung hineingelangen würde. Dieses Ausdehnen und Zusammenziehen hat übrigens ziemlich enge Grenzen, wesshalb bald wegen zu starken bald wegen zu schwachen Lichts kein Sehen mehr möglich ist.

Was die Grösse des Netzhautbildes betrifft, so muss dasselbe unter gewöhnlichen Umständen erfahrungsgemäss wenigstens 0,01 D. D. Linie betragen, wenn es noch auf die Sehnerven wirken soll; in aussergewöhnlichen Fällen, wenn nämlich entweder die Beleuchtung des Gegenstands sehr stark und sein Hintergrund dunkel, oder wenn die Netzhaut besonders empfindlich ist, kann die Grösse des Bilds viel weniger als 0,01 Linie betragen. So sehen wir z. B. die Fixsterne deutlich, obwohl ihre Bilder auf der Netzhaut vielleicht nur 0,0001 Linie Durchmesser haben. Die Grösse der Bilder auf der Netzhaut bestimmt die scheinbare Grösse der Gegenstände, von der in §. 19 noch weiter die Rede ist.

Endlich ist die Dauer des Lichteindrucks nicht ohne Bedeutung für die Deutlichkeit der angesehenen Gegenstände. Ein zu kurzer Eindruck gelangt nicht zu unserem Bewusstseyn, ein hinreichend langer hinterlässt noch einige Zeit nach seinem Aufhören die Empfindung seines Daseyns, und ein zu langer stumpft die getroffenen Theile der Netzhaut durch Ueberreizung so ab, dass sie auf einige Zeit keine Lichtempfindungen hervorrufen. Unter übrigens gleichen Umständen wirkt der Eindruck des weissen Lichts länger als der des gelben, dieser länger als der des rothen und dieser wieder länger als der des blauen Lichts nach, und man kann annehmen, dass jeder Lichteindruck wenigstens 0,2 Sekunden dauert.

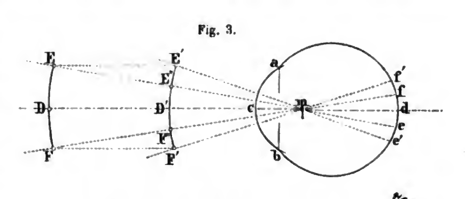
§. 18. **Weite des deutlichen Sehens.** Im vorigen Paragraphen wurde angeführt, dass zum deutlichen Sehen eines Gegenstands gefordert werde, dass dessen Bild genau auf der Netzhaut des Auges liege, und aus der Optik ist bekannt, dass eine Glaslinse das Bild eines Gegenstands in um so grösserer Ferne erzeugt, je mehr ihr der letztere genähert wird. Da nun das Auge wie eine achromatische Glaslinse wirkt, so sollten folglich nur die Bilder genau auf die Netzhaut fallen, welche von Gegenständen kommen, die einen entsprechenden Abstand vom Auge haben; die Bilder fernerer Gegenstände müssten demnach vor und die näher gelegener Objecte hinter der Netzhaut liegen. Die Erfahrung lehrt jedoch, dass ein gesundes Auge in verschiedenen Entfernungen deutlich sehen kann, und es muss desshalb angenommen werden, dass etwas im Auge veränderlich ist, wodurch es die Fähigkeit erlangt, sich innerhalb gewisser Grenzen den Entfernungen der Gegenstände anzubequemen. Einige glauben, dass die Krystalllinse in solchen Fällen mehr oder weniger convex werde; andere, dass sich die Form des Augapfels entsprechend abändere; und wieder andere, dass beide Aenderungen gleichzeitig im Spiele sind. Die letztere Ansicht ist wahrscheinlich die richtigere. Wie dem aber auch sey, so hat das Anbequemungsvermögen des Auges seine bestimmte Grenzen: ein gesundes Auge sieht nämlich nur diejenigen Gegenstände ohne Anstrengung deutlich, welche ihm nicht über

8 oder 10 Zoll genähert werden; es kann zwar diese Gegenstände auch in grösserer Entfernung noch gut erkennen, aber nicht so leicht und deutlich als in dem genannten Abstande, den man desshalb die Weite des deutlichen Sehens oder kürzer die Sehweite nennt. Ein Auge, das in der Entfernung von 8 bis 10 Zoll noch nicht deutlich sieht, also einen grösseren Abstand fordert, heisst weitsichtig; und wenn die Sehweite weniger als 8 Zoll beträgt, kurzsichtig.

Dass ein gesundes Auge in geringerer Entfernung als 8 Zoll nicht deutlich sieht, liegt darin, dass die zu stark auseinander gehenden Lichtstrahlen, welche von den betrachteten Punkten in's Auge gelangen, nicht auf, sondern hinter der Netzhaut zu einem Bilde vereinigt werden. Bei Weitsichtigen erzeugt sich, wenn sie den Gegenstand nur 8 bis 10 Zoll vom Auge weg halten, das Bild ebenfalls hinter der Netzhaut, wesshalb sie es auf diese zu bringen suchen, indem sie den Gegenstand so lange entfernen, bis sie ihn deutlich erkennen. Kurzsichtige Augen vereinigen die von einem 8 bis 10 Zoll weit entfernten Gegenstande kommenden Strahlen vor der Netzhaut; nähert man aber diesen Gegenstand dem Auge immer mehr, so wird er an einer bestimmten Stelle am deutlichsten gesehen, und in dieser Stellung trifft sein Bild gerade auf die Netzhaut.

§. 19. **Scheinbare Grösse.** Wir beurtheilen die Grösse der Gegenstände, welche wir mit freiem Auge betrachten und an denen wir keine eigentliche Messung vornehmen, nach der Ausdehnung des Bildes, welches sie auf der Netzhaut des Auges erzeugen, und daher können wir diese Ausdehnung, welche sich bei gleicher Entfernung direct mit der Grösse, und bei gleicher Grösse umgekehrt mit der Entfernung der Gegenstände ändert, deren scheinbare Grösse nennen. Dass diese proportionale Aenderung stattfindet, ist durch viele Versuche an Menschen- und Thieraugen dargethan. Diese Versuche lehrten, dass die Verbindungslinien irgend welcher Punkte eines Gegenstandes mit deren Netzhautbildern sich alle in einem und demselben Punkte des Auges, der hinter der Krystalllinse nahe in der Mitte des Augapfels liegt und Kreuzungspunkt heisst, schneiden.

Fig. 3.



Bezeichnet (in Fig. 3) m diesen Punkt und E F irgend einen Gegenstand, so ist e f dessen Bild auf der Netzhaut. Rückt dieser Gegenstand dem Auge näher in die Stellung E′ F′, so wird sein Bild e′ f′ in dem Masse grösser als e f, in welchem der Abstand m D′ kleiner ist als m D. Bleibt aber der Gegenstand in der Entfernung m D′ und nimmt seine Grösse von E′ F′ bis auf E″ F″ ab, so wird

sein Bild in e f in dem gleichen Verhältnisse dieser Abnahme kleiner als e' f', wie sich aus ganz einfachen geometrischen Sätzen ergibt. Um diese Aenderungen auf die einfachste Weise zu übersehen, fassen wir sie in einem analytischen Ausdruck zusammen. Bezeichnet nämlich

H die Grösse des Gegenstandes E F,

E dessen Abstand D m vom Kreuzungspunkte,

h die Grösse des Netzhautbildes e f, und

e dessen Abstand d m vom Kreuzungspunkte,

so verhält sich, weil die beiden Kreisausschnitte E m F und e m f ähnlich sind, $H : h = E : e$, und es ist folglich die scheinbare Grösse

$$h = e \cdot \frac{H}{E} \qquad (3)$$

Der Abstand e ist für ein und dasselbe Auge eine unveränderliche Grösse, und die Kreisbögen E F und e f können so lange, als die betrachteten Gegenstände deutlich gesehen werden, als gerade Linien gelten, weil nur diejenigen Gegenstände gleichmässig deutlich zu sehen sind, für welche die Winkel E m F, e m f und folglich auch die Bögen E F, e f im Vergleich zu ihren Halbmessern sehr klein sind.

Den Winkel $E\,m\,F = e\,m\,f = \varphi$ nennt man den Seh- oder Gesichtswinkel, und es ist nun klar, dass die scheinbare Grösse eines Gegenstandes seinem Sehwinkel proportional ist. Da wir in §. 17 gesehen haben, dass unter gewöhnlichen Umständen ein Gegenstand nur dann noch erkannt wird, wenn sein Netzhautbild wenigstens 0,01 D. D. Linie beträgt, so kann man hiernach den kleinsten Sehwinkel φ' bestimmen, wenn man den Abstand e kennt. Diesen Abstand kann man aber aus Gleichung (3) finden, indem man die Entfernung E' misst, in welcher dem Auge ein heller Gegenstand vom Durchmesser H bei guter Beschaffenheit der Luft und dunklem Hintergrunde gerade verschwindet. Mit H und E' ist übrigens der kleinste Sehwinkel schon bestimmt, indem $E' \operatorname{tg} \varphi' = H$ gesetzt werden darf.

Erste Abtheilung.

Die Lehre von den Hilfsmitteln der Beobachtung

oder

von den Messinstrumenten und ihrem Zugehör.

Theorie der Messinstrumente.

§. 20. Die Genauigkeit geometrischer Arbeiten hängt vorzugsweise von der Beschaffenheit der Messwerkzeuge und der Einsicht und Geschicklichkeit ab, womit sie gehandhabt werden. Es muss desshalb der praktische Geometer vor allen Dingen seine Instrumente genau kennen, d. h. er muss wissen, wie sie eingerichtet sind, auf welchen Principien oder Naturgesetzen diese Einrichtung beruht und wie davon ihre Wirkungsweise abhängt; er muss ferner die Instrumente prüfen können, ob sie den Anforderungen, die sie befriedigen sollen, überhaupt genügen, oder in welchem Grade der Genauigkeit es der Fall ist; er muss auch seine Messwerkzeuge zu berichtigen oder diejenigen Unvollkommenheiten derselben zu beseitigen verstehen, welche sich durch besondere hiefür bestimmte Vorrichtungen wegschaffen lassen; und endlich muss er wissen, wie man die Instrumente gebraucht, um auf die vortheilhafteste Weise den Zweck zu erreichen, für den sie bestimmt sind.

Die Anleitung zum Erlangen dieser Kenntnisse nennen wir Instrumentenlehre. Dieselbe ist somit die wissenschaftliche Begründung und Beschreibung des Baues, der Prüfung, der Berichtigung und des Gebrauchs der Messwerkzeuge. Von der Ansicht ausgehend, dass diejenige Zusammenstellung der Instrumente die besste sey, welche die klarste Uebersicht der Hilfsmittel der Vermessungskunde gewährt, und um die Wiederholungen zu vermeiden, welche sich ergeben würden, wenn man nicht die wesentlichsten Bestandtheile der Messwerkzeuge besonders betrachtete, theilen wir die Instrumentenlehre in folgende sechs Abschnitte ein:

1. Bestandtheile der Messinstrumente.
2. Mittel zur Bezeichnung der Punkte auf dem Felde.
3. Instrumente zum Abstecken und Messen der Winkel.
4. Instrumente zum Messen der Längen.
5. Instrumente zum Höhenmessen.
6. Instrumente zum Messen der Geschwindigkeiten.

Erster Abschnitt.

Bestandtheile der Messinstrumente.

§. 21. Wenn man die Messinstrumente zerlegt, so findet man, dass einige Bestandtheile derselben so zu sagen eine eigene Lebensfähigkeit besitzen, d. h. für sich schon zu gewissen Messverrichtungen geeignet sind, während die übrigen bloss zur Herstellung dieser Theile oder deren Verbindung unter einander dienen. Jene Bestandtheile höherer Art, von denen allein hier die Rede ist, da sich die Kenntniss der übrigen am einfachsten aus der Anschauung oder der Abbildung und Beschreibung jedes Instruments ergibt, haben immer je eine der folgenden Aufgaben zu lösen: nämlich entweder Visirlinien herzustellen, oder loth- und wagrechte Richtungen anzugeben, oder sehr kleine nahe und grössere ferne Gegenstände deutlich sichtbar zu machen, oder endlich sehr kleine Theile von geraden Linien und Kreisbögen zu messen. Nach dieser ihrer Bestimmung werden dieselben nunmehr betrachtet.

A. Mittel zur Herstellung von Visir- oder Absehlinien.

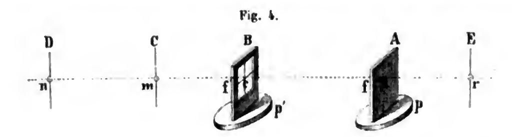
§. 22. Die gerade Richtung zwischen einem leuchtenden Punkte und dem Auge heisst ein Sehstrahl dieses Punktes. Ein freiliegender Punkt sendet dergleichen Strahlen nach allen Seiten aus und kann folglich überall gesehen werden. Will man die Lage einer Richtung, in der man ihn erblickt, gegen eine andere feststehende angeben, so gehört dazu eine Vorrichtung, welche durch zwei Punkte, deren Lage bekannt ist, eine Gerade bezeichnet, die in den Sehstrahl gebracht werden kann. Diese Gerade nennt man eine Visir- oder Absehlinie. Die Träger solcher Linien können sehr verschieden seyn, da man die sie bestimmenden Punkte auf sehr verschiedene Weise darstellen kann. Die bis jetzt gebräuchlichen Mittel zur Herstellung von Absehlinien sind die Fernrohre, die Diopter, die Spiegel und die Glasprismen. Wir werden aber zunächst nur die drei letztgenannten Vorrichtungen, so weit es unser Zweck fordert, behandeln und erst später die Fernrohre als diejenigen Mittel, wodurch entfernte Gegenstände deutlich sichtbar gemacht werden, betrachten.

Die Diopter.

§. 23. **Einrichtung und Prüfung.** Jedes Diopter besteht aus zwei Theilen, dem Ocular und dem Objectiv. Das Ocular ist der Träger desjenigen Punkts der Absehlinie, welcher bei der Beobachtung dem Auge zunächst steht, und das Objectiv der Träger des zweiten entfernteren

Punktes dieser Linie. Beide Theile sind in der Regel fest mit einander verbunden; in einzelnen Fällen stehen sie aber auch lose nebeneinander.

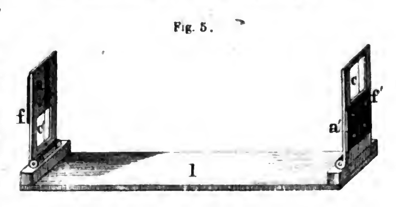
Fig. 4.



Vorstehende Figur stellt ein Diopter der letzten Art vor: A ist das Ocular, B das Objectiv. Beide bestehen aus einer Grundplatte (p, p') und einem senkrecht darauf befestigten Flügel (f, f'). In A ist eine kleine runde Oeffnung a (das Schauloch) zum Durchsehen und in der grösseren viereckigen Oeffnung von B ein Fadenkreuz (c) angebracht. Die Mitte des Schauloches und der Schnittpunkt des Fadenkreuzes bestimmen die Absehlinie. Soll dieselbe mit den Grundebenen von A und B parallel laufen, so müssen die Abstände der Punkte a und c von den Grundflächen der Platten p und p' genau gleich seyn. Ob sie es sind, kann man durch folgendes Verfahren finden.

Man stelle die Diopter A und B auf einer festen Ebene etwa acht Zolle auseinander und bemerke auf zwei ziemlich weit entfernten Stäben C und D die Punkte m und n, in welcher sie von der in ihre Richtung gebrachten Absehlinie getroffen werden; hierauf verwechsele man die Diopter und bemerke auf einem dritten entgegengesetzt stehenden Stabe E den Punkt r, welcher von der neuen Absehlinie gedeckt wird; endlich rücke man die Diopter aus der durch die Stäbe bezeichneten Linie und sehe zu, ob die drei Punkte m, n, r in einer Geraden liegen oder nicht. Findet eine Deckung dieser Punkte statt, so sind die Diopter richtig, wo nicht, so muss das leicht zu erkennende höhere so lange abgeschliffen werden, bis die zweite Absehlinie mit der ersten genau zusammenfällt, vorausgesetzt, dass der Kreuzungspunkt c oder das Schauloch a nicht verstellbar sind.

Fig. 5.



Die beigedruckte Figur gibt ein Bild von einem Diopter der ersten Art. Die Flügel f und f' sind hier mit einem Lineale (l) so verbunden, dass sie bei dem Gebrauche senkrecht darauf stehen, ausserdem aber mit Hilfe von Scharniren umgeklappt werden können. Das Ocular kann wie bei A und das Objectiv wie bei B in Fig. 4 beschaffen seyn; es kann aber auch, wie hier angedeutet, das Ocular bloss aus einem

feinen Spalt und das Objectiv aus einem angespannten dünnen Draht oder Rosshaare bestehen. Der Spalt (die Schauritze) und das Haar (der Objectivfaden) sollen eine zur Grundfläche des Lineals senkrechte Visirebene bestimmen: es müssen also beide in einer lothrechten Ebene liegen, wenn das Diopter auf einer wagrechten Fläche liegt. Ob diese Bedingung erfüllt ist, erkennt man auf folgende Weise.

Man verschaffe sich ausser einer wagrechten Unterlage für das Diopter, in ziemlich grosser Entfernung von dieser, eine lothrechte Richtung durch einen langen Senkel, und überschaue, nach entsprechender Drehung des Diopters, durch den Spalt zugleich den Objectivfaden und das Loth. Wird dieses seiner ganzen Länge nach von dem Faden gedeckt, wenn auch das Auge vor der Schauritze bald höher bald tiefer steht, so ist die Vorrichtung fehlerfrei; findet aber diese Deckung nicht vollständig statt, so ist entweder in dem Objectiv, oder in dem Ocular, oder in beiden zugleich ein Fehler vorhanden, und es kommt nun darauf an, diese getrennt zu erkennen und wegzuschaffen.

Ob der Faden lothrecht steht, erfährt man dadurch, dass man, nach Verdeckung der übrigen Stellen, nur einen einzigen Punkt der Schauritze bei der vorhergehenden Untersuchung benützt und zusieht, ob der Faden nicht vom Lothe abweicht. Deckt er es, so steht er gut; weicht er aber ab, so wird er durch das Zäpfchen, womit er an dem einen Ende in ein kleines Loch gedrückt und also festgehalten wird, ein wenig zur Seite geschoben, bis die Deckung des Lothes stattfindet. Hat auf diese Weise der Faden die richtige Stellung erlangt, so wird zwar jeder Punkt der Schauritze für sich mit dem Faden in einer lothrechten Ebene liegen, aber diese Ebene wird für jeden Punkt eine andere Richtung haben und stets nur durch eine kleine Drehung des Diopters mit dem Lothe zur Deckung gebracht werden. Diese Drehung fällt weg, wenn die Schauritze senkrecht steht. Darnach lässt sich also auch das Ocular untersuchen; allenfallsige Fehler desselben kann aber nur der Mechaniker verbessern, wenn er nicht dafür gesorgt hat, dass die Platte mit der Schauritze ein wenig gedreht werden kann. An dem in Fig. 5 abgebildeten Diopter ist diese Drehung möglich; denn die durch vier helle Stellen angedeuteten Schräubchen gehen durch Schlitze in der Ocularplatte und folglich lässt sich diese nach Lüftung der Schräubchen etwas seitwärts drehen und dann wieder feststellen.

Manche Diopter sind so eingerichtet, dass sich in jedem Flügel Ocular und Objectiv zugleich befinden. Solche Einrichtungen geben zwei Visirlinien nach entgegengesetzten aber parallelen Richtungen. Häufig fallen diese Absehlinien in eine Ebene, wie es z. B. in Fig. 5 der Fall ist, wo durch a, c die eine und durch a′, c′ die andere Visirebene bestimmt ist, welche zusammen die Ebene a c′ a′ c bilden.

Einige andere Formen der Diopter werden später gelegentlich vorgeführt werden. Hier ist nur noch zu bemerken, dass diejenigen Diopter, deren Objective und Oculare durch eine innwendig geschwärzte Röhre

verbunden sind, ein schärferes Visiren (Zielen) gestatten als die eben beschriebenen, welche dem Seitenlichte freien Zutritt gewähren.

§. 24. **Genauigkeit der Diopter.** Ueber die mit Diopten zu erreichende Genauigkeit des Zielens und über die Bedingungen, wovon dieselbe vorzugsweise abhängt, hat Professor Stampfer umfassende Versuche angestellt und deren Ergebnisse in dem 18. Bande der Jahrbücher des Wiener polytechnischen Instituts veröffentlicht. Nach diesen Versuchen gewähren runde Schaulöcher eine grössere Schärfe der Visur als Spalten, und es darf der Durchmesser dieser Löcher auf eine halbe Pariser Linie und die Breite der Spalten auf ein Drittel Linie steigen, ohne dass die Genauigkeit des Zielens geringer wird als bei kleineren Oeffnungen, welche man indessen bei Ritzen nicht unter ein Fünftel Linie und bei Kreisöffnungen nicht weniger als ein Drittel Linie weit machen soll.

Diese Versuche widerlegten somit die früher verbreitete irrige Meinung, dass die Genauigkeit des Visirens dem Winkel proportional sey, welcher sich durch die Weite des Oculars und seine Entfernung vom Objectiv bestimmt; ein Winkel, der manchmal mehrere Minuten beträgt und der parallaktische Winkel genannt wird. Die Genauigkeit nimmt nur dann ab, wenn die Oeffnungen weiter sind als vorhin angegeben wurde. So lange sie jedoch in diesen Grenzen bleiben, kann man unter günstigen äusseren Bedingungen, d. h. bei scharfem Auge, guter Beleuchtung, dunklem Hintergrund und reiner Luft, mit einem fehlerfreien und geschickt behandelten Diopter bis auf 10 Sekunden genau visiren, wenn auch der parallaktische Winkel 5 bis 6 Minuten beträgt. Dass bis zu der angegebenen Grenze die Weite der Ocularöffnung keinen nachtheiligen Einfluss auf das Visiren äussert, erklärt sich dadurch, dass das Auge wegen der am Rande der Oeffnung stattfindenden Beugung der Lichtstrahlen, welche kein deutliches Sehen gestattet, von selbst die Mitte der Oeffnung aufsucht, wo es von dieser Beugung nicht beirrt wird.

Als weitere Ergebnisse der genannten Versuche sind noch anzuführen: dass die Entfernung der Absehen von einander, so lange sie nur nicht kleiner ist als die deutliche Sehweite von ungefähr 8 Zoll, keinen wesentlichen Einfluss auf die Genauigkeit des Zielens hat; und dass die Dicke des Objectivfadens am zweckmässigsten ist, wenn sie vom Oculare aus unter einem Sehwinkel von 1 bis 2 Minuten erscheint.

§. 25. **Ein Nachtheil der Diopter.** Die Diopter leiden an einer Unvollkommenheit, welche die Genauigkeit des Zielens sehr vermindert, aber sich nicht beseitigen lässt. Indem nämlich das Auge gleichzeitig auf den nahen Objectivfaden und den entfernten Zielpunkt sehen muss, erzeugen sich die Bilder beider nicht auf einer und derselben Stelle der Netzhaut, sondern hinter einander, wobei (nach §. 18) das des Fadens weiter zurückliegt. Es kann folglich nur eines derselben und zwar dasjenige, welches gerade auf der Netzhaut liegt, deutlich gesehen werden, wie die Erfahrung jeden Augenblick lehrt. Zwar besitzt das Auge die Fähigkeit, sich den

Entfernungen der betrachteten Gegenstände anzubequemen, aber dieses geschieht nur nach und nach, nicht auf einmal. Wenn nun bald der Faden bald der Zielpunkt deutlich, und beziehungsweise bald der Zielpunkt bald der Faden undeutlich erscheint, so findet in dem Urtheile über die Deckung der Bilder eine Unsicherheit und folglich im Zielen eine Ungenauigkeit statt. Die Grösse dieser Ungenauigkeit schätzt Prof. Stampfer auf mindestens 7 bis 8 Sekunden; sie mag aber in manchen Fällen wohl noch mehr betragen. Desshalb sollte das Bestreben derer, welche sich mit der Angabe oder der Verfertigung oder dem Gebrauche von Messinstrumenten befassen, dahin gehen, die Anwendung der Diopter möglichst zu beschränken.

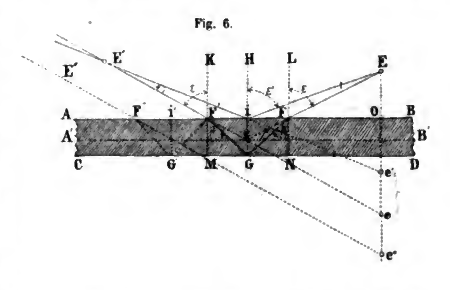
Die ebenen Spiegel.



§. 26. Jede glatte Oberfläche, welche das Licht regelmässig zurückwirft, ist ein Spiegel. Dergleichen Oberflächen geben polirte Metalle, reines Quecksilber, Glas, Wasser und andere Körper. Durch Versuche hat man gefunden, dass die Menge des senkrecht zurückgeworfenen Lichts von Metallspiegeln nahehin zwei Drittel, von Quecksilber die Hälfte, von Glas ein Vierzigstel und von Wasser ein Fünfzigstel der Menge des eingefallenen Lichts beträgt. Ganz reine Metallspiegel geben erfahrungsgemäss mehr Licht als Glasspiegel, welche mit Zinnamalgam belegt sind. Gleichwohl wendet man zu Messinstrumenten blosse Metallspiegel (von Stahl u. dgl.) fast gar nicht an, da ihre Reinheit durch atmosphärische und andere Einflüsse bald getrübt und demzufolge ihre Wirkung so geschwächt wird, dass sie guten Glasspiegeln weit nachstehen. Diese leiden zwar auch von denselben Einflüssen, allein, da ihre Metallfläche von zwei Seiten geschützt ist, in geringerem Grade und erst nach längerer Zeit. Am besten sind die Glasspiegel, welche nicht mit Zinnamalgam, sondern nach einem von Liebig angegebenen Verfahren mit reinem Silber erzeugt werden und Silberspiegel heissen. Wir werden hier bloss die ebenen Glasspiegel, so weit es für die Instrumentenlehre nöthig erscheint, ohne Rücksicht auf ihre Helligkeit untersuchen und dabei die Gesetze über Zurückwerfung und Brechung des Lichts als bekannt voraussetzen.

§. 27. **Parallelspiegel.** In Fig. 6 stelle A B C D den senkrechten Durchschnitt eines auf der Rückseite belegten parallelen Glasspiegels vor, E sey ein leuchtender Punkt und E F, E i mögen zwei von ihm ausgehende in der Ebene des Durchschnitts liegende Strahlen bezeichnen. Von diesen vertrete E F diejenigen Lichtstrahlen, welche in das Glas eindringen und nach der Zurückwerfung an der Rückfläche in das bei E′ befindliche Auge gelangen; und E i stelle jene Strahlen vor, welche von der Vorderfläche des Spiegels in das Auge E′ zurückgeworfen werden.

Der Strahl E F, welcher unter dem Winkel ε gegen das Loth einfällt, wird bei F unter dem Winkel β, der sich aus dem Brechungsgesetze $\sin \varepsilon = n \sin \beta$ ergibt, gebrochen, bei G unter dem gleichen Winkel zurück-



geworfen und bei F' abermals gebrochen. Da der letzte Brechungswinkel dem ersten gleich ist, so bildet der austretende Strahl F' E', welcher das Bild e von E in sich trägt, mit dem Lothe in F' denselben Winkel ε wie der einfallende Strahl E F mit seinem Lothe. Beide Strahlen schneiden sich in dem Punkte c unter dem Winkel $2\,\varepsilon$, woraus man sieht, dass der Glasspiegel den eingedrungenen Strahl gerade so leitet, als ob er bloss auf die durch c gelegte mit A B parallele Ebene A' B' gefallen wäre. Der zweite Strahl E i, welcher mit dem Lothe den Winkel ε' bildet, wird unter dem gleichen Winkel ε' nach i E' zurückgeworfen. In dieser Richtung liegt ein zweites Bild von E: wir nehmen e' dafür an. Von den zwei Bildern e und e', welche der Parallelspiegel gibt, ist das erste heller als das zweite, weil jenes von Metall, dieses von Glas erzeugt wird. Diese Helligkeiten dienen zur Unterscheidung der Bilder, so lange der Spiegel in gutem Zustande sich befindet; hat aber dessen Beleg durch den Einfluss der Atmosphäre etc. Veränderungen erlitten, so ist eine Verwechslung der Bilder und folglich ein Messungsfehler von der Grösse des Winkels e E' e' $= \varphi$ möglich.

Will man φ bestimmen, so kann man folgenden Weg einschlagen. Man suche vorerst die Lage des Schnittpunktes c auf. Nennt man x seinen Abstand (e i) von der Vorderfläche (A B) des Spiegels und a dessen Dicke (G i), so wird

$$x = \frac{a \cos \varepsilon}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Hierauf überzeuge man sich, dass der Abstand (e e') der beiden Bilder von einander 2 x ist, setze die Entfernung des Auges vom Bilde E' e' = d und entnehme aus dem Dreiecke e E' e' die Gleichung:

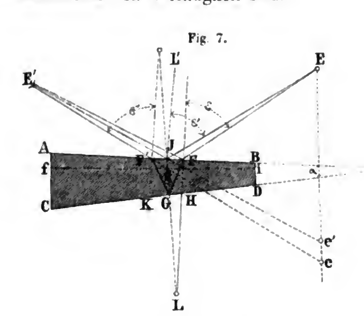
$$\sin \varphi = \frac{2\,a \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{d \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hieraus ist zu entnehmen, dass der Winkel φ mit der Spiegeldicke a wächst und mit der Entfernung d der betrachteten Gegenstände abnimmt. Um seine Grösse in bestimmten Fällen zu überschauen, bemerken wir, dass für $n = {}^3/_2$, $\varepsilon = 65^0$ und a = 0',01 der Winkel φ beziehlich 26,4 oder 2,6 Sekunden beträgt, je nachdem d = 50' oder = 500' ist. Für ausserordentlich weit entfernte Gegenstände, wie z. B. Sterne, wird φ null; bei

Betrachtung derselben hat also die Spiegeldicke gar keinen Einfluss. Ob übrigens dieser Einfluss in anderen Fällen zu beachten ist, hängt einzig und allein von dem Grad der Genauigkeit ab, den die Lage der durch den Spiegel bestimmten Absehlinien haben soll.

Die in der Richtung G F' zurückkehrenden Lichtstrahlen treten nicht alle bei F' gebrochen aus, sondern werden zum Theil wieder nach G' und F'' zurückgeworfen, wo derselbe Vorgang sich wiederholt, der eben in F' stattfand. Es erzeugen sich demnach mehrere Bilder von E, welche alle in der durch E F gelegten und auf dem Spiegel senkrecht stehenden Ebene liegen. Da aber diese Bilder immer weniger Licht erhalten und selbst bei sehr hellen Gegenständen kaum das dritte Bild (e^0) mehr zu bemerken ist, so geben sie auch keine Veranlassung zu Verwechslungen mit dem Hauptbilde (e) und sind desshalb nicht weiter zu beachten.

§. 28. **Prismatische Spiegel.** Wir nennen diejenigen Spiegel prismatisch, deren ebene Seitenflächen unter einem kleinen Winkel (α) gegen einander geneigt sind, und untersuchen ihre Wirkungsweise in der Absicht, sie mit den eben betrachteten Parallelspiegeln zu vergleichen und diejenigen Folgerungen daraus zu ziehen, welche für die mit Spiegeln versehenen Messinstrumente von Wichtigkeit sind.



Es sey A B C D in Fig. 7 ein Durchschnitt des Spiegels mit einer Ebene, welche zur Schnittlinie der beiden Spiegelebenen AB, CD senkrecht steht, und die Lichtstrahlen EF, EJ mögen in dieser Durchschnittslinie liegen. Von diesen zwei Linien vertrete EF diejenigen Lichtstrahlen, welche nach ihrem Gange durch den Spiegel, und E J jene, welche nach der Zurückwerfung auf der Ebene A B bei E' in das Auge des Beobachters gelangen. Der nicht in das Glas eindringende Strahl E J wird unter dem Einfallswinkel ε' von der Ebene A B zurückgeworfen und gibt in der Richtung E' J ein Bild e' des leuchtenden Punktes E. Der eindringende Strahl macht nach dem im vorhergehenden Paragraph erklärten Vorgange den Weg E F G F' E' und liefert in der Richtung E' F' das Hauptbild e.

Von dem nach E F einfallenden und nach G F' zurückgeworfenen Lichte wird nur ein Theil bei F' austreten, ein anderer aber wieder auf C D und von hier auf A B so zurückgeworfen werden, wie bei dem Parallelspiegel erklärt wurde. Es entstehen also auch hier mehrere Nebenbilder von E,

sie sind aber so schwach, dass sie gegen das Hauptbild e verschwinden und desshalb nicht weiter in Betracht kommen.

Es liesse sich auch hier wie bei dem Parallelspiegel der Winkel e E' e' = φ ausdrücken, um welchen die Bilder e und e' auseinander liegen; wir bedürfen aber dieses Ausdruckes gar nicht, um einzusehen, dass dieser Winkel bei einem prismatischen Spiegel gar nie null wird, auch wenn der leuchtende Punkt E unendlich weit entfernt ist. Denn da für diesen letzteren Fall $\varepsilon' = \varepsilon$ wird, so ist der Winkel E J E' des einfallenden und von A B zurückgeworfenen Strahls E J = 2ε, während der Winkel E g E', den der eindringende Strahl E F mit dem von C D zurückgeworfenen bildet, $\varepsilon + \varepsilon''$ ist. Es bilden also, selbst wenn E F und E J parallel sind, die Strahlen F' E' und J E' immer noch einen Winkel

$$\varphi' = (\varepsilon + \varepsilon'') - 2\varepsilon = \varepsilon'' - \varepsilon,$$

welcher null wird, wenn $\varepsilon'' = \varepsilon$ ist. Diese Gleichheit findet aber nur statt, wenn die Ebene A B der C D parallel d. h. der Spiegel nicht prismatisch ist.

Die Thatsache, dass der Winkel φ' bei einem prismatischen Spiegel nicht null werden kann, gibt ein Mittel an die Hand, einen solchen Spiegel von einem parallelen zu unterscheiden. Man braucht nämlich nur in beiden einen ausserordentlich weit entfernten sehr hellen uud scharf begrenzten Gegenstand (etwa einen Stern) zu betrachten und zuzusehen, ob sich mehr als ein deutliches Bild von demselben erzeugt. Entsteht nur eines, so ist der Spiegel parallel, zeigen sich aber mehrere, so ist er prismatisch. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Spiegelflächen vollkommene Ebenen sind. Ob sie aber diese Eigenschaft besitzen, erkennt man im Allgemeinen daran, dass sie scharf begrenzte Gegenstände rein und unverzerrt abbilden. Das besondere Verfahren bei dieser Untersuchung kann erst später, wenn von den Fernrohren die Rede gewesen seyn wird, beschrieben werden. Wer sich darüber ausführlich unterrichten will, lese die Abhandlungen über die Prüfung der Plan- und Parallelgläser von A. Oertling und A. Martins in dem 22. und 24. Jahrgange der „Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses in Preussen."

Um den nachtheiligen Einfluss eines prismatischen Spiegels, der statt eines parallelen an einem Messinstrumente angebracht ist, genauer zu erkennen, wollen wir für den besonderen Fall, dass der leuchtende Punkt E unendlich weit entfernt ist oder die von E kommenden Lichtstrahlen parallel sind, untersuchen, wie sich die Grösse des Winkels e E' e', der in diesem Falle $\varepsilon'' - \varepsilon$ ist und oben mit φ' bezeichet wurde, bestimmen lässt.

Für den einfallenden Strahl E F gilt nach den bekannten Bezeichnungen die Gleichung:

$$\sin\varepsilon = n \sin\beta,$$

und für den austretenden F' E' wird, da $\beta'' = \beta + 2\alpha$ ist:

$$\sin\varepsilon'' = n \sin(\beta + 2\alpha).$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so wird nach einigen einfachen Umformungen:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\varepsilon'' - \varepsilon) \cos \tfrac{1}{2} (\varepsilon'' + \varepsilon) = n \sin \alpha \cos (\beta + \alpha).$$

Da ε von ε'' nur sehr wenig abweicht und α sehr klein ist, so kann man näherungsweise $\cos \varepsilon = \cos \frac{1}{2} (\varepsilon'' + \varepsilon)$ und $\cos \beta = \cos (\beta + \alpha)$ setzen und statt $\sin \alpha$ und $\sin (\varepsilon'' - \varepsilon)$ die Bögen α und φ' einführen, wodurch man schliesslich erhält:

$$\varphi' = \frac{2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}}{\cos \varepsilon} \cdot \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Nimmt man beispielsweise den Neigungswinkel $\alpha = 1$ Minute, den Einfallswinkel $\varepsilon = 60^0$ und das Brechungsverhältniss $n = 1{,}5$ an, so wird $\varepsilon'' - \varepsilon = \varphi' = 4{,}9$ Minuten, woraus man zur Genüge den nachtheiligen Einfluss der prismatischen Gestalt eines ebenen Glasspiegels ersehen kann.

Die Glasprismen.

§. 29. In neuerer Zeit sind an verschiedenen Messinstrumenten statt ebener Spiegel Glasprismen angebracht worden, weil dieselben nicht bloss lichtstärkere Bilder, sondern auch vermöge ihrer Gestalt mannichfaltigere Richtungen der Absehlinien geben als die Spiegel. Die Anwendung dieser Prismen zu optischen und geometrischen Instrumenten gründet sich vorzugsweise auf den besonderen Fall der Zurückwerfung des Lichts, welcher die Totalreflexion heisst und worüber zum besseren Verständniss des Folgenden hier eine kurze Erläuterung folgt.

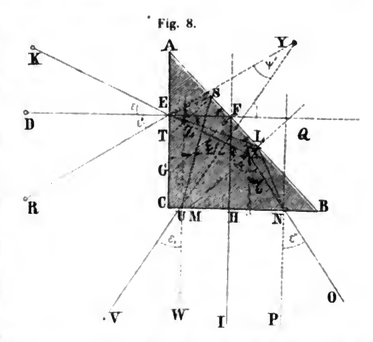
Haben die Grössen ε, β, n dieselbe Bedeutung wie in dem vorigen Paragraph, so ist bekanntlich durch die Gleichung $\sin \varepsilon = n \sin \beta$ ein Theil des Brechungsgesetzes ausgedrückt, während der andere Theil die Bestimmung enthält, dass der einfallende und gebrochene Strahl in einer Ebene mit dem Einfallsloth liegen. Der Brechungswinkel β erhält offenbar dann seinen grössten Werth, wenn ihn der Sinus des Einfallswinkels ε hat, und dieses ist der Fall für $\sin \varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = 90^0$. Man findet also den grössten Werth von β aus der Gleichung $n \sin \beta = 1$.

Nimmt man, wie es für Luft und Kronglas nahehin der Fall ist, das Brechungsverhältniss $n = 3 : 2$ an, so folgt aus der Gleichung

$$\sin \beta = \tfrac{2}{3}, \text{ der Winkel } \beta = 41^0\, 48'.$$

Für Luft und Glas, dessen Brechungszahl 1,5 ist, gibt es also keinen grösseren Brechungswinkel als $41^0\, 48'$. Trifft nun in einem Glase ein Lichtstrahl so auf eine Wand desselben, dass er mit dem Einfallslothe einen grösseren Winkel als $41^0\, 48'$ bildet, so tritt er gar nicht mehr aus, sondern wird in das Glas gerade so zurückgeworfen, als ob er auf eine vollkommene Spiegelfläche gefallen wäre. Diese Erscheinung nennt man die totale Reflexion des Lichts.

§. 30. **Dreiseitige Glasprismen.** Die meiste Anwendung fand bis jetzt dasjenige senkrechte Glasprisma, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges-rechtwinkliges Dreieck ist, wie A B C in der beigedruckten Fig. 8.



Stellt D E einen in der Ebene des Querschnitts A B C liegenden Lichtstrahl vor, der in der Richtung des Loths auf A C einfällt, so dringt derselbe, weil der Einfallswinkel null ist, ungebrochen in das Prisma ein und trifft die Hypotenuse A B und das Loth G F unter einem Winkel von 45°. Da der Winkel D F G $> 41^0\,48'$, so findet bei F eine gänzliche Zurückwerfung und demgemäss bei H ein auf B C senkrechter Austritt des Strahls D E statt. Die Richtung H I bildet mit dem Strahle D E, der das Bild des Punktes D, von welchem er ausgeht, in sich trägt, einen Winkel

$$\text{D F I} = \psi_0 = 90^0. \quad \text{. . . . . (7)}$$

Der Strahl K E, welcher mit dem Loth den Winkel ε macht und auf der Seite des Loths liegt, die einem spitzen Winkel (A) zugekehrt ist, wird nach der Richtung E L unter dem Winkel β gebrochen, der sich aus dem Brechungsgesetze $\sin \varepsilon = n \sin \beta$ bestimmt, und trifft gegen das Loth in L unter einem Winkel $\gamma = 45^0 + \beta$, der grösser ist als $41^0\,48'$. Er wird folglich in L zurückgeworfen und gelangt in der Richtung L N gegen das Loth N P, mit dem er, wie leicht einzusehen, den Winkel $\text{L N Q} = \beta'' = \gamma - 45^0 = \beta$ bildet. Da nun $\beta'' = \beta$, so muss nach dem Brechungsgesetze nothwendig auch $\varepsilon'' = \varepsilon$ seyn. Der einfallende Strahl (K E) bildet demnach mit dem austretenden (N O) einen Winkel

$$\text{K X O} = \psi = 90^0 + 2\,\varepsilon. \quad \text{. . . . . (8)}$$

Dieser Winkel wird für $\varepsilon = 45^0$ der Summe von zwei rechten gleich, d. h.: wenn ein Lichtstrahl (K E) parallel mit der Hypotenuse (A B) auf eine Kathete (A C) fällt, so tritt er auch parallel mit seiner anfänglichen Richtung an der anderen Kathete (B C) aus.

Verfolgen wir den Strahl R E, der unter dem Winkel ε' auf der Seite des Loths einfällt, die sich dem rechten Winkel des Prismas zuwendet, so geht dieser unter dem Winkel β' von E nach S und bildet mit dem Lothe S T den Winkel $\text{E S T} = \gamma' = 45^0 - \beta'$, welcher nur so lange grösser ist als $41^0\,48'$, als β' nicht mehr als $3^0\,12'$ beträgt. So lange wird auch alles in der Richtung E S auf A B treffende Licht nach S U zurückgeworfen. Wird aber $\beta' > 3^0\,12'$ und folglich $\gamma' < 41^0\,48'$, so geht der grössere Theil des in der Richtung E S ankommenden Lichts bei S durch das Prisma und nur ein kleiner Theil schlägt die Richtung S U ein. Diese Richtung bildet in U mit dem Lothe den Winkel $\text{S U Z} = \beta''' = 45^0 - \gamma' = \beta'$; es muss folglich auch der Winkel ε''', unter welchem der Strahl S U austritt,

nach dem Brechungsgesetze $= \varepsilon'$ seyn. Die Figur ergibt nun sofort, dass der einfallende Strahl R E mit dem austretenden U V einen Winkel

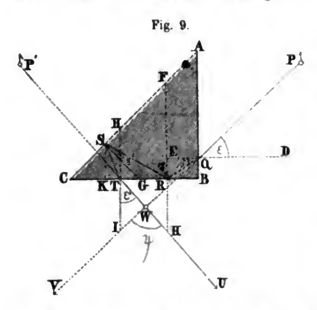
$$\text{R Y V} = \psi' = 90^0 - 2\,\varepsilon' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

bildet. Für $\varepsilon' = 45^0$ wird $\psi' = o$, d. h. wenn ein Lichtstrahl so auf eine Kathete fällt, dass er mit der Hypotenuse einen rechten Winkel bildet, so tritt er aus der anderen Kathete parallel mit seiner ursprünglichen Richtung wieder aus.

Die durch die Gleichungen 7 bis 9 ausgedrückten Ergebnisse der Analyse des Wegs, den das Licht in dem vorausgesetzten Prisma macht, lassen sich in dem folgenden Satz zusammenfassen: Alle auf eine Kathetenfläche eines gleichschenklig-rechtwinkligen Prismas fallenden Lichtstrahlen, welche zweimal gebrochen und einmal gänzlich zurückgeworfen werden, treten auf der anderen Kathetenfläche so aus, als ob sie gar nicht gebrochen, sondern nur von der Hypotenusenfläche einfach zurückgeworfen worden wären.

Untersuchen wir nunmehr den Gang des Lichts, welches in einem Prisma der angegebenen Art zweimal gebrochen und zweimal zurückgeworfen wird. Es sey in Fig. 9 A B C der senkrechte Querschnitt dieses Prismas und P Q ein vom Punkte P kommender Lichtstrahl, welcher in der Ebene des Schnitts A B C liegt und an einer Stelle Q der Kathete A B auffällt, welche ihn nicht auf die Hypotenuse, sondern auf die zweite Kathete B C leitet. Der Strahl P Q geht unter dem Winkel β, der sich aus $\sin \varepsilon = n \sin \beta$ ergibt, in der Richtung Q R gegen B C und macht mit dem Lothe R F einen Winkel $\gamma = 90^0 - \beta$, welcher, da β nie grösser werden kann als $41^0\ 48'$, jederzeit grösser ist als der eben angegebene Werth. Es muss folglich in R eine Totalreflexion stattfinden und der Strahl in der Richtung R S nach der Hypotenuse A C gehen, wo er das Loth S G unter dem Winkel $\gamma' = 45^0 - \beta$ trifft. So lange nun $\beta < 3^0\ 12'$ ist, wird das mit R S parallele Licht ganz zurückgeworfen, ausserdem aber tritt der grössere Theil bei S aus, der kleinere geht von S nach T zurück und bildet mit dem Lothe in T einen Winkel $\text{S T H} = \beta' = 45^0 - \gamma' = \beta$. Da $\beta' = \beta$ ist, so muss nach dem Brechungsgesetze der Austrittswinkel ε' nothwendig auch $= \varepsilon$ seyn. Man wird nun in der Richtung U T des austretenden Strahls das Bild P' von P erblicken, und man entnimmt sofort aus der Figur, dass der Winkel

Fig. 9.

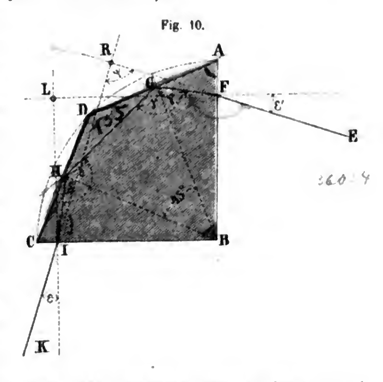


$$\text{U W V} = \omega = 90^0 + \varepsilon - \varepsilon' = 90^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ist und von dem Einfallswinkel ε gar nicht abhängt, der von 0 bis 90^0 jeden beliebigen Werth haben kann, aber nicht negativ werden darf, weil

sonst der durch Gleichung (9) bezeichnete Fall einträte, welcher $\omega = \psi = 90^0 - 2\varepsilon'$ liefern würde. Das in Gleichung (10) enthaltene Ergebniss lässt sich so ausdrücken: Alle auf eine Kathetenfläche eines gleichschenklig-rechtwinkligen Prismas fallenden Lichtstrahlen, welche zweimal gebrochen und zweimal zurückgeworfen werden, bilden nach ihrem Austritte aus der zweiten Kathetenfläche mit ihrer anfänglichen Richtung einen rechten Winkel.[1]

§. 31. **Vierseitige Glasprismen.** Von den vierseitigen Glasprismen lässt sich dasjenige zu Messinstrumenten anwenden, dessen Querschnitt A B C D der vierte Theil eines durch zwei senkrechte Durchmesser getheilten regelmässigen Achtecks ist und den man, wie in der folgenden Figur, erhält, wenn man über dem rechten Winkel B einen Kreisbogen A D C beschreibt, denselben halbirt und die Sehnen A D, C D zieht. In diesem Viereck ist Winkel C D A = 135⁰ und B A D = B C D = 67⁰,5.



Stellt K I einen in der Ebene des senkrechten Schnittes A B C D liegenden Lichtstrahl vor, welcher gegen das Loth in I unter dem Winkel ε einfällt, so wird er nach I H gebrochen, wobei L I H $= \beta =$ dem Brechungswinkel ist, der sich aus $\sin\varepsilon = n \sin\beta$ finden lässt. Der Strahl I H bildet mit dem Lothe in H einen Winkel $\delta = 67^0{,}5 + \beta$ und wird folglich total reflectirt. In G angekommen schliesst er mit dem Lothe daselbst einen Winkel $\gamma = 67^0{,}5 - \beta$ ein. Demzufolge wird alles in der Richtung H G ankommende Licht nach G F zurückgeworfen, so lange $\beta < 25^0\,42'$ ist, und nur ein Theil desselben, sobald $\beta > 25^0\,42'$ wird; der übrige Theil tritt bei G aus dem Glase. Der Strahl G F bildet mit dem Lothe in F den Winkel G F L $= \beta' = 67^0{,}5 - \gamma = \beta$, und tritt unter dem Winkel ε' aus, welcher, da $\beta' = \beta$, nach dem Brechungsgesetze nothwendig $= \varepsilon$ seyn muss. Die beiden Richtungen K I und F E bilden somit einen Winkel

$$\text{K R E} = \psi = 90^0 + \varepsilon - \varepsilon' = 90^0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Es versteht sich von selbst, dass an diesem Winkel nichts geändert wird, wenn das Licht in der entgegengesetzten Richtung von E nach F, G, H

[1] Auf diese Eigenschaft des dreiseitigen rechtwinklig-gleichschenkligen Prismas machte der Verfasser zuerst in seiner Abhandlung über das Prismenkreuz (München 1851), welches sich theilweise hierauf gründet, aufmerksam. Vergl. Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie, Bd. 93. S. 124.

geht und bei I austritt, oder wenn in dem ersten Falle ε und in dem zweiten $\varepsilon' = o$ wird. Der Winkel ψ ist demnach sowohl von der Lage als Grösse des Einfallswinkels ε oder ε' ganz unabhängig und wir können sagen:

Alle auf eine der Hauptflächen (A B, B C) eines vierseitigen Glasprismas, dessen Querschnitt der vierte Theil eines regelmässigen Achtecks ist, fallenden Lichtstrahlen treten, wenn sie eine zweimalige Brechung und Zurückwerfung erlitten haben, auf der zweiten Hauptfläche in einer Richtung aus, welche mit der anfänglichen einen rechten Winkel macht.

Dieser Satz gilt auch noch, wenn der Scheitel D des Winkels ADC nicht in dem Umfange eines regelmässigen Achtecks liegt und folglich die Winkel bei A und C ungleich sind, so lange nur deren Unterschied nicht 45^0 oder mehr beträgt, d. h. A oder C nicht 90^0 oder darüber ist.

B. Mittel zur Herstellung loth- und wagrechter Richtungen.

Die Senkel oder Lothe.

Der einfache Senkel.

Fig. 11.

a

c

d

b

§. 32. Jeder an einem Ende mit einem Gewichte beschwerte und am anderen Ende frei gehaltene Faden stellt einen Senkel dar und gibt bei ruhiger Luft eine lothrechte Richtung an. In dieser einfachen Gestalt benützt man den Senkel zur lothrechten Aufstellung von Latten und Stangen, oder um einen Punkt, an den man den Senkelfaden anlegen kann, auf eine unter ihm liegende Fläche zu projiciren. Für gewöhnliche Zwecke genügt es, den schweren kegel- oder birnförmigen Körper an einer dünnen seidenen Schnur aufzuhängen; zu sehr genauen Messungen aber wird erfordert, dass die Schnur durch einen feinen Silberdraht von etwa 0,1 Millimeter Dicke ersetzt und die auf's Sorgfältigste gearbeitete Birne so an diesen Draht befestigt werde, dass ihre Spitze genau in der Verlängerung des Drahts liegt.

Der Doppelsenkel.

§. 33. Dieser Senkel (Fig. 11) dient im Allgemeinen dazu, zwei durch kein Hinderniss getrennte Punkte in eine lothrechte Richtung zu bringen, wie z. B. eine bestimmte Stelle eines Messinstruments und einen auf dem Felde bezeichneten Punkt. Er unterscheidet sich von dem einfachen Senkel nur dadurch, dass er leicht aufgehängt und nach Belieben verlängert oder verkürzt werden kann. Zu dem Zwecke befindet sich die metallene Birne (b) an dem einen Ende einer seidenen Schnur, welche durch einen mit der Birne gleichschweren Messingcylinder (c) und einen

zum Aufhängen dienenden Ring (a) geht, während das andere Ende dieser Schnur in dem genannten Cylinder festgehalten wird. Sein Gebrauch versteht sich von selbst.

Die Lothgabel.

§. 34. Befindet sich zwischen den zwei Punkten, welche in eine lothrechte Richtung gebracht werden sollen, irgend ein Hinderniss, das die Anwendung des einfachen oder doppelten Senkels unmöglich macht, wie dieses z. B. der Fall ist, wenn der eine Punkt (m) auf einem Zeichenbrette gegeben ist oder gesucht wird: so kann man sich der Lothgabel (Fig. 12) bedienen, welche nichts anderes als ein an einem gabelförmigen Träger angebrachter einfacher oder doppelter Senkel ist. Die Gabel kann von Metall oder Holz seyn und die nebengezeichnete oder eine andere Form haben: immer kommt es nur darauf an, dass ihr oberer Schenkel eben aufgelegt werden kann und eine feine Spitze (m) hat, während der untere Schenkel gerade so lang ist, dass bei wagrechter Lage des oberen und angespannter Schnur deren lothrechte Richtung durch die Spitze (m) geht. Es ist klar, dass, wenn die Spitze der Lothgabel an den gegebenen Punkt m gebracht und so gehalten wird, dass der obere Schenkel m o wagrecht ist, die Birne b die Projection oder das Bild m′ des Punktes m anzeigt, und umgekehrt, dass, wenn die Birne erst über einen auf dem Felde gegebenen Punkt m′ gebracht und die Lothgabel wie vorhin gehalten wird, die Spitze den Punkt m′ in m projicirt (abbildet).

Fig. 12.

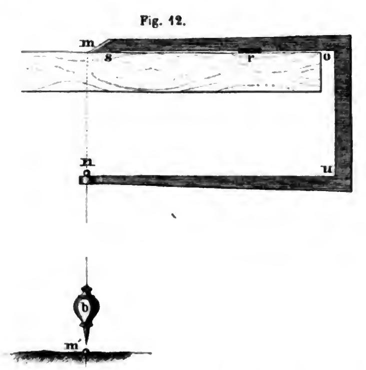
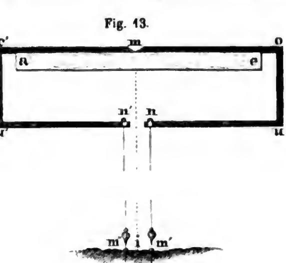


Fig. 13.



Will man untersuchen, ob eine Lothgabel richtig ist, so stelle man auf später anzugebende Weise ein ebenes Brett wagrecht und senkele einen auf demselben angenommenen

beliebigen Punkt m auf das Feld. Es sey m' dessen Bild. Hierauf bringe man, wie Fig. 13 zeigt, die Lothgabel in eine der vorigen entgegengesetzte Lage, ihre Spitze aber wieder genau an m, so erhält man ein zweites Bild (m'') dieses Punkts. Ist die Lothgabel richtig, so müssen nothwendig beide Bilder zusammenfallen; hat sie aber einen Fehler, so wird dieser, wie man leicht einsieht, durch den Abstand der Bilder m' und m'' seiner Grösse und Lage nach angezeigt. In dem hier gezeichneten Falle ist der obere Schenkel zu lang; läge aber m' in m'' und umgekehrt, so wäre er zu kurz. Er müsste also in dem ersten Falle um $\frac{1}{2}$ (m' m'') verkürzt, in dem zweiten aber um eben so viel verlängert werden. Da aus leicht begreiflichen Gründen für diese Verbesserungen an der Gabel keine Vorrichtungen angebracht sind, so müssten allenfallsige Abänderungen, wenn sie nöthig werden sollten, von dem Mechaniker selbst vorgenommen werden.

Die Libellen oder Wasserwagen.

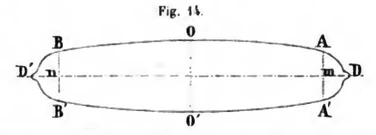
§. 35. Die Libellen sind die empfindlichsten und desshalb wichtigsten Vorrichtungen zur Herstellung wag- und lothrechter Linien und Ebenen. Ausserdem dienen sie zur Messung geringer Abweichungen der zu ihnen parallel oder senkrecht gestellten Richtungen von der wag- oder lothrechten Lage. Sie bestehen der Hauptsache nach aus einem in Messing gefassten verschlossenen Glasgefässe, welches mit zwei verschiedenen Flüssigkeiten, einer tropfbaren und einer luftförmigen, angefüllt ist, von denen die letztere als die specifisch leichtere auf der ersteren schwimmt und als Luftblase erscheint. Das Glasgefässe ist entweder wie eine Röhre oder eine runde Dose geformt, und man unterscheidet desshalb Röhren- und Dosenlibellen. Die letzteren sind aber nunmehr ziemlich ausser Gebrauch gekommen, und wo sie noch angewendet werden, bedürfen sie nur einer sehr geringen Empfindlichkeit. Die tropfbare Flüssigkeit in dem Gefässe war ehemals Wasser und die elastische atmosphärische Luft; daher die Namen „Wasserwage" und „Luftblase." In neuerer Zeit wendet man aber bei den weniger feinen Libellen Weingeist und bei den feineren und feinsten Schwefeläther (Vitriolnaphta) zur Füllung an, und lässt die Luftblase nicht aus atmosphärischer Luft, sondern aus Dampf der eingefüllten Flüssigkeit bestehen. Dieser Dampf wird dadurch erzeugt, dass man das Gefäss bei gewöhnlicher Temperatur bis auf einen kleinen Raum mit Flüssigkeit anfüllt und hierauf in ein Sandbad von etwa 30° Wärme bringt, wodurch die Flüssigkeit in Folge der Ausdehnung bis an den Rand des Gefässes steigt. Schliesst man in diesem Augenblicke das letztere durch Zuschmelzen oder auf andere Weise luftdicht ab, so wird sich in demselben mit der Entwärmung der Flüssigkeit ein luftleerer Raum zu bilden suchen, den aber sofort Dampf von der eingeschlossenen Flüssigkeit ausfüllt. Dieser Dampf verdichtet sich, wenn die Flüssigkeit durch Erwärmung wieder ausgedehnt wird, so weit es erforderlich ist; es werden auf diese Weise gefährliche Spannungen in

dem Gefässe vermieden, und hierin liegt der Vorzug einer Dampfblase vor der Blase aus atmosphärischer Luft.

Die Röhrenlibelle.

§. 36. **Ausschlag der Blase.** Stellt man sich unter A B in Fig. 14 einen sehr flachen Kreisbogen und unter D D' eine seiner Sehne parallele Linie vor, so kann man sich die mathematische Form einer Libellenröhre durch Drehung des Bogens A B um die Axe D D' erzeugt denken. Alle senkrechten Querschnitte der Röhre sind Kreise von verschiedenen Durchmessern, alle Längenschnitte durch die Axe aber einander und der Figur A B B' A' gleich. Für die nächstfolgenden mathematischen Betrachtungen wollen wir uns der Einfachheit halber den Längenschnitt der Libelle bloss aus einem Kreisbogen und seiner Sehne bestehend denken und dabei die Sehne oder eine mit ihr parallele Linie als Libellenaxe ansehen.

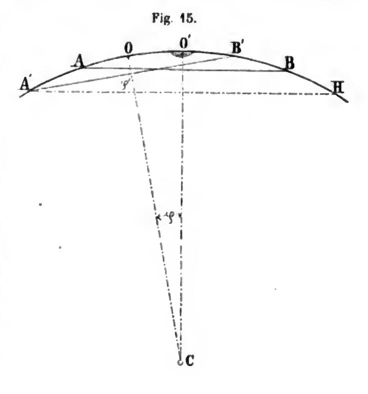
Fig. 14.



Unsere dermalige Absicht ist, die Abhängigkeit des Standes der Luftblase von der Lage der Libellenröhre zu zeigen. Diese Untersuchung stützt sich auf die physikalische Thatsache, dass die Luftblase stets den höchsten Theil der Röhre einnimmt, und auf die geometrische Wahrheit, dass der höchste Punkt eines Vertikalkreises dessen Durchschnitt mit dem lothrecht aufwärts gehenden Halbmesser ist.

Man überzeugt sich leicht, dass es gewisse Drehungen der Libelle gibt, bei welchen die Mitte der Luftblase ihren Ort im Raume nicht ändert, und wieder andere, bei welchen sie um einen bestimmten Bogen, den man ihren Ausschlag nennt, von der Mitte des Röhrenbogens abweicht.

Fig. 15.

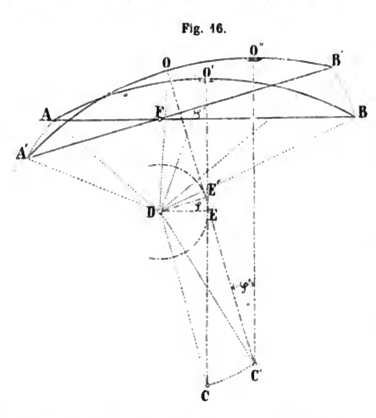


Steht die Libellenaxe wagrecht, so ist die Mitte des Röhrenbogens, weil sie am weitesten von der Axe absteht, auch der höchste Punkt der Libelle; mithin treffen die Punkte O und O' zusammen, was man dadurch ausdrückt, dass man sagt, „die Blase spielt ein.“ Dreht man die Libelle um ihre wagrechte Axe, so wird die Luftblase stehen bleiben, weil in jedem Augen-

blicke ihre Mitte und der höchste Punkt der Röhre zusammenfallen; dreht man bei wagrechter Axe die Libelle um ihren lothrechten Halbmesser, so erfolgt wieder keine Ortsveränderung der Blasenmitte, weil die Punkte O und O′ nicht aus der lothrechten Drehaxe heraustreten; und dreht man endlich die Libelle um eine wagrechte Axe, welche durch den Mittelpunkt C des lothrechten Längenschnitts der Libelle geht, so gehen zwar die Punkte O und O′ um den Ausschlag O O′ auseinander, die Blase aber verlässt ihren Ort O′ nicht, während der Bogen O O′ = a den Winkel φ misst, um welchen die Libelle gedreht wurde.

Denkt man sich in irgend einem beliebigen Punkte D der lothrechten Schnittebene A O′ B (Fig. 16) eine zu dieser Ebene senkrechte und folglich auch wagrechte Axe, um welche die einspielende Libelle A B gedreht wird, so ist der Vorgang dieser Drehung folgender: der wagrechte Hebelsarm D E kommt in die Lage D E′ und bildet nun mit dem Horizont einen Winkel E′ D E = φ. Zieht man in E′ eine Senkrechte auf D E′ und macht E′ C = E C, so ist C′ die neue Lage des Mittelpunkts C des Röhrenbogens, und wenn man mit C′ O = C O′ aus C′ den Bogen A′ O B beschreibt, so stellt A′ B′ die Libelle in ihrer neuen Lage mit dem Mittelpunkte O des Bogens vor. Führt man durch C′ den lothrechten Halbmesser C′ O″, so ist dessen Schnitt O″ mit dem Bogen A′ B′ die Mitte der Luftblase an ihrem neuen Standorte, und folglich O O″ der Ausschlag a, welchen die Libelle anzeigt. Dieser Ausschlag misst offenbar den Winkel O C′ O″, und dieser ist = E′ D E = φ, weil C′ O″ und C′ O beziehlich auf D E und D E′ senkrecht stehen. Es bildet aber auch die Libellenaxe A′ B′ mit dem Horizont den Winkel φ, da A B mit D E und A′ B′ mit D E′ parallel ist, folglich misst der Bogen O O″ auch den Neigungswinkel B′ F B. Da nun D irgend ein beliebiger Punkt der Ebene A O′ B ist, so folgt ganz allgemein der Satz:

Fig. 16.



Wenn man eine Röhrenlibelle um irgend eine zu ihrer eigenen Axe senkrecht gerichtete wagrechte Axe dreht, so ist der Ausschlag der Luftblase das Mass des Neigungswinkels der Libellenaxe gegen den Horizont.

§. 37. **Empfindlichkeit der Libelle.** Eine Libelle ist jedenfalls um so empfindlicher, je kleinere Abweichungen ihrer Axe von der wagrechten

Lage sie noch anzeigt, je grösser also ihr Ausschlag im Verhältniss zum Neigungswinkel ist. Dieses Verhältniss wollen wir die Empfindlichkeit der Libelle nennen und sofort durch einen analytischen Ausdruck darstellen. Zu dem Ende bezeichne

a den Ausschlag der Luftblase in irgend einer Längeneinheit,
r den Halbmesser des Röhrenbogens in derselben Einheit, und
φ den Neigungswinkel der Libellenaxe gegen den Horizont in Sekunden.
Nach Fig. 15 verhält sich

$$a : 2\,r\,\pi = \varphi : 360 \,.\, 60 \,.\, 60$$

und hieraus folgt:

$$\frac{a}{\varphi} = \frac{r}{206265} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

d. h. die Empfindlichkeit einer Libelle wächst unter übrigens gleichen Umständen mit dem Halbmesser des Röhrenbogens.

Bei cylindrischen Röhren ist r und folglich auch die Empfindlichkeit unendlich gross; mit anderen Worten: es geht bei der geringsten Neigung der Libellenaxe die Luftblase bis an das höher gelegene Röhrenende, wie weit es auch entfernt seyn mag, während bei wagrechter Lage der Axe die Blase an jeder Stelle der Röhre stehen bleiben kann. Solche Röhren eignen sich folglich nicht zu Libellen.

Ausser dem Krümmungshalbmesser haben die Weite der Röhre, die Länge der Luftblase und die Beschaffenheit der Flüssigkeit Einfluss auf die Empfindlichkeit der Libelle und zwar insoferne als von der richtigen Beschaffenheit derselben die regelmässige Bewegung der Luftblase abhängt: je weiter nämlich die Röhre im Verhältniss zur Länge ist, desto geringer wird der Einfluss des benetzten Umfangs auf die Bewegung der Flüssigkeit; die Weite soll nicht weniger als den neunten, aber auch nicht mehr als den sechsten Theil der Röhrenlänge betragen. Wenn ferner die Libellen mit Naphta gefüllt sind, so geht die Bewegung leichter und regelmässiger von statten als bei Füllungen von Weingeist; auf die Glätte der Röhrenwand kommt dabei wenig an. Durch die Länge der Luftblase wird endlich die Empfindlichkeit der Libelle nur dann einigermassen beeinträchtigt, wenn dieselbe mehr als ein Drittel und weniger als ein Fünftel der Röhrenlänge beträgt; lange Blasen bewegen sich unter sonst gleichen Verhältnissen schneller als kurze.

Die Grösse der Luftblase ändert sich mit der Temperatur in der Weise, dass sie bei grösserer Wärme kleiner und bei abnehmender Wärme grösser wird. Diese Aenderung hat nichts Auffallendes, wenn man bedenkt, dass der Weingeist und der Schwefeläther ein stärkeres Ausdehnungsvermögen besitzen als das Glas, in das sie gefüllt sind. Sie hindert aber auch nicht, dass die Mitte der Luftblase stets die höchste Stelle der Röhre einnehme, so lange die Temperatur der Libelle sich gleichmässig ändert. Nachtheilig wirken jedoch auf den Ausschlag der Blase örtliche Temperaturveränderungen an der Libelle, welche durch Anfassen, Anhauchen, Auffallen der

Sonnenstrahlen etc. entstehen. Diese müssen daher immer sorgfältig vermieden werden.

Auf feineren Libellen findet man das Mass ihrer Empfindlichkeit durch Angabe des Ausschlags für einen bestimmten Neigungswinkel angemerkt. Aus dieser Angabe kann man sofort mit Hilfe der Gleichung (12) den Krümmungshalbmesser

$$r = 206265 \cdot \frac{a}{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

finden, indem man für a und φ die gegebenen Werthe (a in irgend einer Längeneinheit, φ aber in Sekunden) setzt. So berechnet man z. B. nach der Aufschrift: „16‴ Par. = 1 Min." den Halbmesser r, wenn man in vorstehender Gleichung a = 16‴ und φ = 1 Min. = 60 Sekd. einstellt, gleich 55004 Par. Linien = 382 Pariser Fuss. Ganz feine Röhrenlibellen haben noch grössere Krümmungshalbmesser.

Ist dieser Halbmesser bekannt, so gibt die Gleichung (12) den zu einem bestimmten Ausschlage a gehörigen Neigungswinkel

$$\varphi = 206265 \cdot \frac{a}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Wäre z. B. r = 1000′ und a = 0′,005, so fände man φ = 1,03 Sekunden.

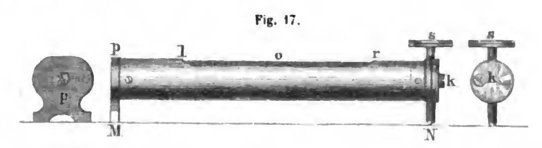
§. 38. **Libellenfassungen.** Reichenbach und Fraunhofer haben zuerst tonnenförmig ausgeschliffene Glasröhren zu Libellen angewendet und dadurch diese unentbehrlichen Hilfsmittel der Messung bedeutend vervollkommnet. Früher krümmte man, wie bei weniger feinen Libellen heute noch geschieht, cylindrische Glasröhren dadurch, dass man sie mit ihren Enden so lange über glühende Kohlen hielt, bis sie sich durch ihr eigenes Gewicht etwas bogen. Den Verschluss der Röhren nach der Füllung bewirkte man lange Zeit hindurch mit Glasplatten, die an die abgeschliffenen Enden gepasst und mit Blase und Gummi befestigt wurden; in neuerer Zeit sind aber die meisten Mechaniker davon wieder abgegangen und zu dem Zuschmelzen der Röhrenenden zurückgekehrt, was ohne Zweifel dem erstgenannten Verschlusse vorzuziehen ist.

Jede Libellenröhre erhält auf der Seite, welche die gleichförmigste Krümmung zeigt, eine Scala mit gleichen Theilen, um darnach die Luftblase einstellen oder ihren Ausschlag ablesen zu können. Diese Eintheilung hat in der Regel nur e i n e n Nullpunkt in der Mitte des Röhrenbogens; manchmal aber auch z w e i, welche dann gleichweit von der Mitte und unter einander etwas weniger abstehen als die Blase lang ist, damit deren Enden noch in die beiderseitigen Theilungen reichen. Die Grösse eines Theiles der Scala ist zwar willkürlich, weicht aber gewöhnlich wenig oder gar nicht von einer Duodecimallinie ab. Die Theilstriche werden entweder in das Glas geritzt oder mit Oelfarbe fein aufgetragen; bei längeren Röhren erhalten sie eine von der Mitte ausgehende Bezifferung, welche bei kleineren wegbleiben kann.

Die fertige Röhre kommt in eine messingene Fassung, mit der sie

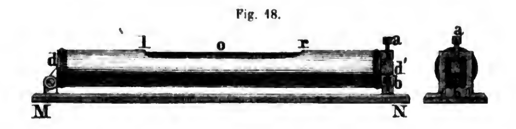
entweder auf eine Ebene oder ein cylindrisches Rohr gestellt oder an feste Gegenstände aufgehängt werden kann. Je nach der Fassung unterscheidet man stehende und hängende Libellen. Die Fassungen sind nicht bloss nach der Art der Unterlage, sondern auch bei einer und derselben Unterlage nach dem Grad der Feinheit der Libelle und nach der Ansicht des Mechanikers verschieden. Wie aber auch die Fassung eingerichtet seyn mag, so muss sie die Bedingung erfüllen, dass die Libellenaxe der Axe der Unterlage parallel gestellt werden kann, und desshalb müssen an ihr Stellschrauben und was dazu gehört angebracht seyn. Wir wollen nunmehr einige Fassungen näher beschreiben.

Fig. 17.



Vorstehende Libelle dient zum Horizontalstellen von Ebenen, auf welche sie aufgesetzt werden kann. Die Glasröhre ist von einem oben offenen Messingcylinder umgeben, welcher auf einem senkrechten Fusse (p) und einer Stellschraube (s) ruht. Durch diese Schraube kann die Röhre, indem sich die Fassung um die Unterkante (M) des Fusses dreht, gehoben und gesenkt, folglich berichtigt werden. Zur Vermeidung des todten Gangs der Schraube wird ihre zur Hälfte aufgeschlitzte Mutter mit einer Klemmschraube (k) zusammengehalten.

Fig. 18.



Auch diese Libelle (Fig. 18) wird auf ebenen Unterlagen gebraucht, um sie wagrecht zu stellen oder ihre geringe Neigung gegen den Horizont zu messen. Der oben offene Messingcylinder ruht auf einem ebenen Lineale (M N), mit dem er durch zwei Träger (d, d′) verbunden ist, wovon der eine (d) als Stütze des Drehpunktes dient, während der andere (d′) die beiden Stellschrauben a, b aufnimmt, deren Wirkungsweise sehr einfach ist. Dreht man nämlich zuerst die untere und hierauf die obere Schraube vorwärts (d. h. in die Mutter), so senkt sich der Cylinder; dreht man aber zuerst die obere und dann die untere Schraube rückwärts (also aus der Mutter), so hebt sich der Cylinder. Auf diese Weise kann die Libellenaxe mit der ebenen Unterlage der Fassung parallel gestellt werden. Damit diese

Stellung möglichst gesichert ist, müssen die Schräubchen a und b fest an dem Ansatz d' anliegen.

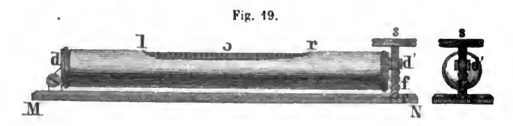


Fig. 19.

Bei der Libelle Fig. 19, welche dieselbe Bestimmung wie die vorige hat, ist die Vorrichtung zum Parallelstellen einfacher, indem sie bloss aus einer Schraube (s) mit einer ihr gegenwirkenden und um sie gewundenen Stahlfeder (f) besteht. Die Schraube greift in das Lineal ein, während sich die Feder auf dasselbe und an den Vorsprung d' des Messingcylinders stützt. Da sich die Fassung um den Punkt d drehen kann, so wird sie durch das Vor- und Rückwärtsdrehen der Schraube gesenkt und gehoben.

Würde man bei den vorstehenden drei Libellen (Fig. 17—19) die cylindrische Fassung unten, der Stelle l o r gegenüber, genau so ausschneiden wie oben und die Röhre selbst eintheilen, so könnte man diese Libellen auch dazu benützen, zu untersuchen, ob ein ebener Körper auf seiner unteren Seite horizontal ist, indem man eine dieser Libellen anlegte und zusähe, ob die Luftblase einspielt oder nicht. Eben so würde eine auf zwei entgegengesetzten Seiten (unten und oben) getheilte Libelle, die auf einer um ihre Axe drehbaren cylindrischen Unterlage befestigt ist, durch blosses Drehen dieser Unterlage um 180⁰ anzeigen, ob ihre Axe mit jener der Unterlage parallel ist oder nicht.

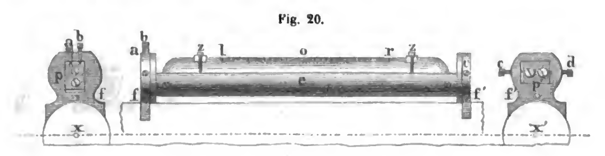


Fig. 20.

Die Libelle Fig. 20 wird auf eine cylindrische Röhre oder massive Axe aufgesetzt und dient zur Horizontalstellung derselben oder zur Messung ihrer Abweichung von der wagrechten Lage. Die Glasröhre ruht auf untergelegten Stanniolblättchen in einem Halbcylinder (e) und wird darin durch zwei sanft angedrückte Stege (z, z) festgehalten. Das Lager der Röhre steht durch zwei Ansätze (p, p') mit eben so vielen senkrecht gestellten und unten cylindrisch ausgeschliffenen Füssen (f, f') in Verbindung und kann durch vier Schräubchen (a, b und c, d) gegen die Axe der Unterlage verstellt, d. h. auf und ab oder nach rechts und links geschoben werden.

Da nämlich c und d auf den Ansatz p' drücken, so erfolgt, wenn c

rück- und d vorwärts gedreht wird, eine Bewegung der Libellenaxe von d nach c; und es tritt die entgegengesetzte Bewegung ein, wenn d rück- und c vorwärts geschraubt wird. Von den Schräubchen a und b greift das erstere in den Ansatz p ein, während das andere nur auf ihn drückt. Dreht man nun a zurück und b um gleichviel vor, so senkt sich die Libellenaxe bei f so weit als a zurückging; und dreht man erst b zurück und hierauf a vor, so hebt sich die Axe bei f um die rückgängige Bewegung von b.

Man sieht hieraus leicht, dass man von den vier Stellschräubchen immer je zwei mit einander und in der rechten Folge behandeln muss, wenn sie die beabsichtigte Wirkung geben und nicht beschädigt werden sollen. An sehr feinen Libellen kann der Cylinder e, wenn die Axe richtig gestellt ist, mit den Füssen f und f' noch fester verbunden werden als es durch die vier Stellschräubchen allein möglich ist. Es steht nämlich, wie weiter unten an der Libelle des Ertel'schen Repetitionstheodolithen zu ersehen, jeder der Ansätze p und p' mit einem Plättchen q in Verbindung, das durch zwei Klemmschrauben, welche auch auf p und p' angedeutet sind, gegen die Aussenfläche der Füsse gedrückt werden kann, um jede zufällige Bewegung des Lagers e zu verhüten. Wenn diese Plättchen angebracht sind, müssen selbstverständlich die Klemmschrauben gelüftet werden, ehe man die Stellschrauben dreht.

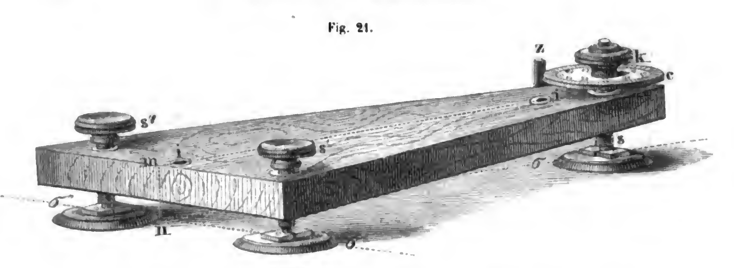
§. 39. **Prüfung und Berichtigung.** An einer Röhrenlibelle sind vorzugsweise zwei Eigenschaften zu untersuchen: nämlich ihre Empfindlichkeit und die Neigung ihrer Axe gegen die Unterlage, auf der sie ruht. Von diesen beiden Untersuchungen ist die erstere nur ein für allemal, die letztere aber von Zeit zu Zeit und jedesmal vor einer grösseren Messung vorzunehmen.

1) Die Prüfung der Empfindlichkeit einer Libelle besteht darin, dass man die Ausschläge der Luftblase für bestimmte Neigungswinkel der Axe bestimmt und untersucht, ob sich diese Ausschläge in demselben Verhältnisse ändern wie die Neigungswinkel.

Diese Prüfung erfordert eine Vorrichtung, womit man die Neigung der Libelle verändern und genau messen kann. Eine solche Vorrichtung gewährt zwar jeder Theodolith oder jedes feine Nivellirinstrument; da wir aber diese Instrumente hier noch nicht als bekannt voraussetzen können, so bedienen wir uns des einfachen Apparats, welcher ausschliesslich zur Prüfung der Libellen bestimmt ist und den man das Justir- oder Legebrett nennt. Die folgenden zwei Figuren stellen das Legebrett dar, welches wir für die Münchener polytechnische Schule anfertigen liessen.

Ein trapezförmiges Brett (m i) von 1 Zoll Dicke und 15 Zoll Länge wird von 3 mit beweglichen Fussplatten (σ, σ', σ'') versehenen Stellschrauben (s, s' s'') getragen und damit nach Belieben in eine wagrechte oder geneigte Lage gebracht. Die an der Spitze des Bretts befindliche Schraube (s) trägt eine am Rande in 100 gleiche Theile getheilte Kreisplatte (c), wodurch mit

Fig. 21.



Hilfe eines neben ihr stehenden festen Zeigers (z) ganze und Hundertel Umdrehungen der Schraube genau gemessen und kleinere Theile als Hundertel noch geschätzt werden können. Steht das Brett auf einer festen Unterlage, so wird es sich bei rechtseitiger Drehung der Schraube s an der schmalen Seite erheben und bei entgegengesetzter Drehung senken, indem es sich dabei um die Linie $\sigma' \sigma''$ dreht, welche durch die Fusspunkte der Schrauben s' und s" gelegt gedacht wird.

Wie viel die Neigung beträgt, hängt offenbar von der Länge e der Mittellinie n s, welche auf $\sigma' \sigma''$ senkrecht steht und bis an die Axe der Schraube s reicht, von der Höhe h eines Gangs dieser Schraube und von der Anzahl u der Umdrehungen ab, welche nöthig sind, um die Linie m i, die auf der Oberfläche des Bretts und in der Ebene n σ s liegt, um einen Winkel α zu bewegen. Setzt man voraus, dass die Drehungslinie $\sigma' \sigma''$ nahehin mit s' s" parallel und annähernd horizontal ist, so hat man genau genug

$$e \tang \alpha = u\, h$$

und hieraus, da α stets ein sehr kleiner Winkel ist,

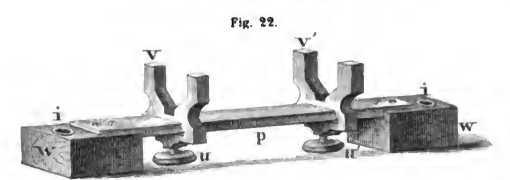
$$\alpha = 206265 \frac{h}{e} u \text{ Sek.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

An unserem Apparate ist nach sehr genauen mittel- und unmittelbaren Messungen das Verhältniss h : e = 0,001491 und demnach für denselben $\alpha = 307{,}54$ u Sekunden.

So weit der Apparat bis jetzt beschrieben ist, dient er zur Prüfung bereits gefasster Libellen, welche sich auf das Brett längs der Linie m i aufsetzen lassen; aber er ist noch nicht geeignet, ungefasste Libellenröhren aufzunehmen. Hiezu dient das Lager, welches die Figur 22 darstellt.

Dasselbe besteht aus einer $1\frac{1}{2}$ Zoll breiten, 10 Zoll langen Messingplatte (p), welche auf 2 würfelförmige Holzstücke (w, w) von gleicher Höhe geschraubt ist, und aus 2 Gabeln (v, v'), welche sich längs der Platte p verschieben und auf ihr durch Schrauben (u, u') feststellen lassen. Diese Gabeln nehmen die Röhre und zwar so auf, dass ihre Axe nahe genug mit p parallel ist. Will man dieses Lager nicht lose auf das Brett (m i)

Fig. 22.



stellen, so kann man es mit Schrauben in den Punkten (i, i) befestigen. Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass die Axe einer auf diese Weise mit dem Legebrette verbundenen Libelle alle Bewegungen der Linie m i theilt, und dass folglich die Gleichung (15) auch für die Libellenaxe gilt. Die Prüfung der Empfindlichkeit der Libelle besteht somit nur mehr darin, die nach dieser Gleichung bestimmten Winkel mit den auf der Röhrenscala beobachteten recht- und linkseitigen Ausschlägen zu vergleichen. Sollte sich zeigen, dass letztere sich nicht wie die Drehungswinkel ändern, so hat man, wenn es nicht schon vorher geschehen, erst die Theilung auf der Libellenröhre nachzumessen, und wenn diese gleichmässig ist, die Röhre entweder besser ausschleifen oder durch eine neue ersetzen zu lassen, vorausgesetzt, dass die Abweichungen nicht so klein sind, dass sie übersehen werden können.

2) Die Prüfung der Lage der Libellenaxe erfordert, dass man sich erst überzeugt, ob die Axen der Libelle und ihrer Unterlage in einer Ebene liegen und, wenn dieses der Fall ist, zweitens untersucht, ob beide mit einander parallel sind. Man macht diese Anforderungen desshalb, weil im Falle ihrer Erfüllung das Horizontalstellen von Linien und Ebenen am leichtesten und einfachsten geschehen kann, in so ferne die parallele Axe der Unterlage gleichzeitig mit der Libellenaxe horizontal wird.

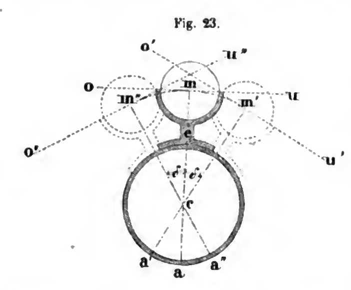
Eine Libelle wird in den meisten Fällen entweder auf einer Ebene oder auf einem Cylinder stehen.[1] In dem ersten Falle ist die Axe der Unterlage deren Schnitt mit einer durch die Libellenaxe gelegten und auf der Unterlage senkrecht stehenden Ebene: es liegen folglich in diesem Falle die Axen beider immer in einer Ebene und es bedarf daher hier der ersten Prüfung nicht. In dem zweiten Falle aber wird als Axe der Unterlage die des Cylinders angesehen, auf dem die Libelle steht, oder an dem sie hängt. Soll nun die Libellenaxe mit dieser Cylinderaxe parallel werden, so muss sie vor allen Dingen mit ihr in einer Ebene liegen.

Um zu erfahren, ob diese Bedingung erfüllt ist, bedienen wir uns vorläufig, da wir noch keine andere Vorrichtung kennen, des Legebrettes (Fig. 21) mit dem aufgeschraubten Lager (Fig. 22), in das wir uns einen genau gearbeiteten Cylinder gelegt denken. Auf diesen Cylinder, der in Fällen der Anwendung gewöhnlich einem Fernrohr angehört, stellen wir die nach Fig. 20 gefasste und

[1] Andere Fälle werden bei den betreffenden Instrumenten (z. B. dem Stampfer'schen Nivellirinstrument, dem Breithaupt'schen Grubentheodolithen etc.) betrachtet.

auf den Cylinder passende Libelle. Bringt man mit der Schraube s die Libelle zum Einspielen, so ist deren Axe wagrecht, mag es die des Cylinders seyn oder nicht und mögen beide in einer Ebene liegen oder nicht. Lägen beide Axen in einer Ebene, ohne parallel zu seyn, so ist klar, dass die Blase nicht mehr einspielte, wenn die Libelle, wie folgende Figur zeigt, auf dem Cylinder um einen Winkel δ zur Seite gedreht würde. Die Luftblase ginge nach einer von der Neigung der Cylinderaxe abhängigen Richtung vorwärts. Drehte man hierauf die Libelle auf die entgegengesetzte Seite des Cylinders, so bliebe die Bewegung der Blase dieselbe wie vorhin. Umgekehrt kann man hieraus schliessen, dass die Libellen- und Cylinderaxe in einer Ebene liegen, wenn bei entgegengesetzten Drehungen der Libelle auf dem Cylinder die Luftblase nach ein und derselben Richtung ausweicht.

Fig. 23.



Lägen aber die Libellen- und Cylinderaxe nicht in einer Ebene und stellte in Fig. 23, welche ein senkrechter Schnitt des Cylinders und der Libelle ist, die wagrechte Linie o u die Projection der Libellenaxe auf die Ebene der Figur in dem Augenblicke des Einspielens vor, während die Projection der Cylinderaxe in der Richtung a e liegt: so würde bei einer Seitendrehung der Libelle um den Winkel δ die Axe o u die Lage o′ u′ annehmen und folglich nicht mehr wagrecht seyn. Die Luftblase müsste sich in der Richtung von u′ nach o′ bewegen. Hätte man die Libelle um den Winkel δ auf die entgegengesetzte Seite gedreht, so wäre das Ende u der Axe über das o gekommen und die Luftblase von o″ nach u″ gegangen.

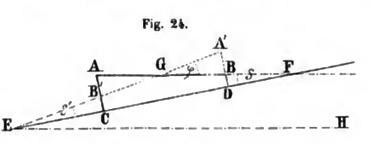
In diesem Vorgange besitzen wir nun ein Mittel, erstens den Fall zu erkennen, in welchem die Libellen- und Cylinderaxe nicht in einer Ebene liegen, und zweitens die gegenseitige Lage dieser Axen anzugeben. Wenn nämlich die zum Einspielen gebrachte Luftblase bei entgegengesetzten Drehungen der Libelle auf ihrer cylindrischen Unterlage nach entgegengesetzten Enden der Libellenröhre sich bewegt, so liegen die Libellen- und Cylinderaxe nicht in einer Ebene. Um über die gegenseitige Stellung dieser Axen klar zu werden, denke man sich vor der Fig. 23 stehend und nehme an, dass u das vordere und o das hintere Ende der Libellenaxe sey. Geht nun bei der Drehung nach rechts die Luftblase von vorn nach hinten, so liegt das vordere Ende der Libellenaxe zur Rechten der Cylinderaxe, und geht bei dieser Drehung die Blase von hinten nach vorne, so findet die entgegengesetzte Lage der Libellenaxe statt. Dreht man die Libelle links und es geht die Luftblase von vorn nach hinten, so liegt das vordere Ende

der Libellenaxe links von der Cylinderaxe, und bei der entgegengesetzten Bewegung der Blase das hintere Ende.

Hat man eine solche Abweichung erkannt, so wird sie mittels der Stellschräubchen c, d (Fig. 20) verbessert, indem man auf die in §. 38 angegebene Weise die Röhre gegen die Füsse so lange verrückt, bis die Luftblase, wenn sie anfänglich einspielte, bei jeder Seitendrehung der Libelle nach derselben Richtung ausweicht oder ihren Standort in der Mitte der Röhre beibehält.

Nachdem die Libellen- und Cylinderaxe in eine Ebene gebracht sind, ist es leicht zu erfahren, ob sie parallel sind und sie, wenn sie es nicht wären, parallel zu machen. Man stelle die Libelle wieder auf den in Fig. 21 abgebildeten Apparat und bringe sie zum Einspielen. Ist ihre Axe mit jener der Unterlage parallel, so sind jetzt beide horizontal, und es ist klar, dass, wenn man die Libelle umsetzt (d. h. um 180° dreht oder den Fuss f der Libelle nach f' und f' nach f bringt, ohne an der Unterlage etwas zu ändern), die Libellenaxe wieder horizontal ist und die Luftblase einspielt. Wenn aber beide Axen nicht parallel sind, so tritt diese Erscheinung nicht ein, sondern die Luftblase weicht nach dem Umsetzen von der Mitte so weit ab, dass der Ausschlag dem doppelten Winkel entspricht, unter welchem beide Axen gegen einander geneigt sind. Denn angenommen, in Fig. 24 stelle A B die horizontal gestellte Libellenaxe und C D die Axe der Unterlage vor, und beide bilden mit einander den Winkel $AFC = \delta$, welcher sich durch die ungleichen Abstände A C und B D bestimmt: so kommt die Libellenaxe nach dem Umsetzen in die Lage A'B', welche sich ergibt, wenn man $A'D = AC$ und $B'C = BD$ macht. Es ist folglich auch der Winkel $A'ED = \delta' = \delta$. Die Libellenaxe macht nach dem Umsetzen mit dem Horizont den Winkel $A'GB = \varphi$, welcher als Aussenwinkel des Dreiecks $GEF = 2\delta$ ist, was zu beweisen war.

Fig. 24.

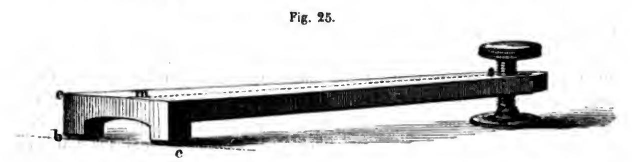


Will man nun den Fehler δ in der Lage der Axen wegschaffen, so hat man mittels der Stellschräubchen a und b auf die in §. 38 beschriebene Art die Röhre der Libelle so lange zu heben oder zu senken, bis die Blase um die Hälfte des angezeigten Ausschlags gegen die Mitte der Scala zurückgegangen ist. Die andere Hälfte dieses Ausschlags muss an der Unterlage mittels der Schraube s verbessert werden, da diese mit dem Horizont ebenfalls einen Winkel $DEH = CFA = \delta$ bildet. Da man bei der ersten Verbesserung nicht sofort genau die Hälfte des Ausschlags an den genannten Theilen wegschaffen wird, so muss man die Libelle, nachdem sie wieder zum Einspielen gebracht ist, abermals umsetzen und den noch vorhandenen Ausschlag halb durch die Libelle und halb durch die Unterlage beseitigen.

Es versteht sich von selbst, dass bei dieser Arbeit, wie überhaupt bei dem Messen, keine Spur von Staub zwischen dem Cylinder und den Füssen der Libelle sich befinden darf.

Hat man eine Libelle zu prüfen, welche auf keinen Cylinder, sondern nur auf eine Ebene aufgesetzt werden kann, so dient als Unterlage jedes ebene Brett, das sich durch Keile oder Schrauben etwas heben und senken lässt; es gibt aber auch besondere einfache Vorrichtungen für diesen Zweck, wovon eine unter dem Namen Legebrett in Fig. 21 abgebildet ist. Ein noch einfacheres Legebrett ist das folgende.

Fig. 25.



Die ebene Platte c e s, welche an dem einen Ende mit der Kante b c des senkrecht angesetzten Fusses und am anderen mit der Stellschraube s auf einer festen Unterlage ruht, kann mittels dieser Schraube beliebig gehoben und gesenkt werden; folglich ist durch diese Schraube eine Libelle, welche in der Richtung m s auf die Platte gestellt wird, zum Einspielen zu bringen. Setzt man die einspielende Libelle um, so steht die Blase entweder wieder in der Mitte oder nicht. In dem ersteren Falle ist die Libellenaxe mit der Unterlage parallel, in dem letzteren aber gibt der Ausschlag wie vorhin den doppelten Neigungswinkel der Libellenaxe gegen die Unterlage an, welcher demnach auch wie früher zur Hälfte an der Libelle und halb an der Unterlage zu verbessern ist.

§. 40. **Gebrauch der Röhrenlibelle.** Eine Röhrenlibelle dient entweder zur Horizontalstellung von Linien und Ebenen, oder zur Messung kleiner Vertikalwinkel. Diese Zwecke lassen sich leicht mit einer berichtigten, aber mit einiger Umständlichkeit auch mit einer unberichtigten erreichen.

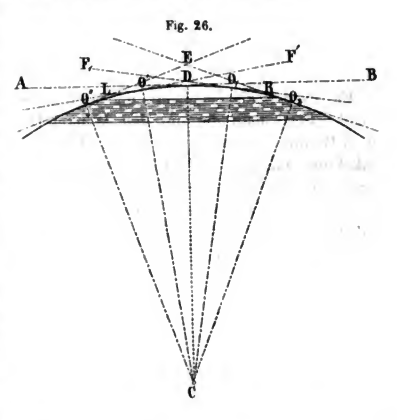
1) Horizontalstellung von Linien und Ebenen. Die Linien, welche durch Röhrenlibellen horizontal gestellt werden, sind entweder Abschlinien an Fernrohren und Diopteru, oder die Axen von hölzernen und metallenen Massstäben, oder zwei sich schneidende Richtungen einer ebenen Oberfläche. Wenn man dazu eine berichtigte Libelle hat, deren Axe also mit den Abschlinien oder den untergelegten Ebenen parallel ist, so bedarf das Verfahren zur Horizontalstellung nach dem Vorausgegangenen keiner Erläuterung mehr; wenn dagegen die Libelle unberichtigt ist, so kann folgender Betrachtung gemäss eine Linie oder Ebene horizontal gestellt werden.

Denkt man sich die Libelle auf eine wagrechte Unterlage gesetzt, so wird sie ihrer Unrichtigkeit wegen einen bestimmten Ausschlag geben. Setzt man sie auf dieser Unterlage um, so zeigt sich derselbe Ausschlag,

aber auf der entgegengesetzten Seite des Nullpunkts der Scala. Wenn man nun die horizontal zu stellende Unterlage einer Libelle so lange hebt oder senkt, bis die Libelle in zwei entgegengesetzten Lagen gleich grosse Ausschläge gibt, so ist die Aufgabe gelöst. Und wenn man ein ebenes Brett erst nach einer Richtung und dann nach einer die erste (am besten senkrecht) schneidenden zweiten Richtung auf die eben angegebene Weise wagrecht macht, so ist es nach allen Richtungen wagrecht.

2) Messung von kleinen Neigungswinkeln. Ist die Libelle berichtigt, so gibt der Ausschlag der Luftblase sofort die Neigung der Unterlage in der Richtung der Libellenaxe an. Um jedoch den Ausschlag genau zu erfahren, muss man die Mitte der Luftblase aus den Ablesungen an ihren Enden bestimmen. Nun kann aber der Mittelpunkt D der Luftblase gegen den Nullpunkt O der Scala folgende fünf Lagen annehmen:

Fig. 26.



a) Der Punkt O fällt mit D zusammen; dann steht die Libelle horizontal und die Enden L und R der Luftblase, welche beziehlich um n und m Theilstriche von O abstehen, sind gleichweit von O entfernt. In diesem Falle ist der Neigungswinkel $\varphi = 0$.

b) Der Punkt O fällt nach O' links von D, aber noch innerhalb der Blase; es liegen n Theilstriche links und m rechts, aber es ist $m > n$ und es sollen die Theilstriche links vom Nullpunkte der Scala als positive gelten. Der Neigungswinkel ist in diesem Falle $= O'CD = -\varphi'$.

c) Der Punkt O liegt links von D ausserhalb der Blase in O''; das linke Ende derselben steht um n, das rechte um m Theilstriche von O'' ab, und n und m sind beide negativ; der Neigungswinkel ist $= O''CD = -\varphi''$.

d) Der Punkt O kommt nach O_1 rechts von D zu stehen und ist von dem linken Ende der Blase um n, von dem rechten um m Theilstriche entfernt, wobei $n > m$ und der Neigungswinkel $O_1CD = +\varphi_1$ ist.

e) Der Punkt O liegt rechts ausserhalb der Blase in O_2 und steht vom rechten Endpunkte der Blase um m und vom linken um n Theilstriche ab. Beide Werthe von m und n sind wie der Neigungswinkel $O_2CD = \varphi_2$ positiv.

Bezeichet man mit p den Winkel, welcher einem Theile der Scala

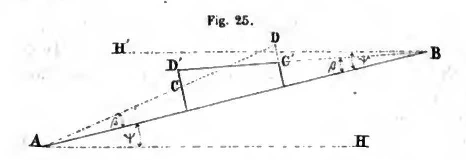
entspricht, so lässt sich der Neigungswinkel φ in den vorstehenden fünf Fällen durch die Formel ausdrücken:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(m + n)\,p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wobei zu bemerken ist, dass m und n positiv oder negativ sind, je nachdem die Enden der Blase links oder rechts von dem Nullpunkte O der Scala liegen, und dass φ positiv oder negativ erscheint, je nachdem die Mitte der Blase links oder rechts von der Mitte der Scala sich befindet.

Mit einer unberichtigten Libelle kann man den Neigungswinkel einer Linie wie folgt finden:

Fig. 25.



Es sey A B die gegebene Linie und B A H = ψ der gesuchte Neigungswinkel. Setzt man die um den Winkel D A B = β fehlzeigende Libelle auf A B auf, so erhält man einen Ausschlag a, welcher dem Neigungswinkel der Libellenaxe D A H = $\psi + \beta = \varphi$ entspricht, und setzt man hierauf die Libelle in die Lage C' D' um, so entspricht der Ausschlag a', den man nun beobachtet, dem jetzigen Neigungswinkel der Libellenaxe D' B H' = $\psi - \beta = \varphi'$. Hat p die vorige Bedeutung, so finden folgende zwei Gleichungen statt:

$$\psi + \beta = a\ p = \varphi$$
$$\psi - \beta = a'\ p = \varphi',$$

aus denen durch Addition der gesuchte Winkel

$$\psi = \tfrac{1}{2}(a + a')\,p = \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

erhalten wird. Will man statt der Ausschläge a und a' oder statt der Winkel φ und φ' die Ablesungen m, n und m', n' an den Enden der Luftblase in den Ausdruck für ψ einführen, so ist nur

$$a = \tfrac{1}{2}(m + n) \text{ und } a' = \tfrac{1}{2}(m' + n') \text{ oder}$$
$$\varphi = \tfrac{1}{2}(m + n)\,p \text{ und } \varphi' = \tfrac{1}{2}(m' + n')\,p$$

zu setzen.

Die Dosenlibelle.

§. 41. **Beschreibung.** Die Dosenlibelle, von der Fig. 28 eine Ansicht und Fig. 29 einen Durchschnitt vorstellt, besteht aus einem cylindrischen Gehäuse von Messing, das mit einem plan- oder convexconcaven Glasdeckel geschlossen und mit Weingeist oder Schwefeläther bis auf einen kleinen als Luftblase erscheinenden Raum gefüllt ist. Der Durchmesser des Gehäuses beträgt 2 bis 4 und die Höhe desselben einen halben oder ganzen

Zoll. Im Boden hat es zur Füllung eine Oeffnung, welche mit einer Schraube (s) abgeschlossen werden kann. Damit weder die Flüssigkeit noch die Luft austritt, wird die Schraube, nachdem sie eingedreht ist, verklebt. Die innere Fläche des Glases ist nach einem Halbmesser von nur

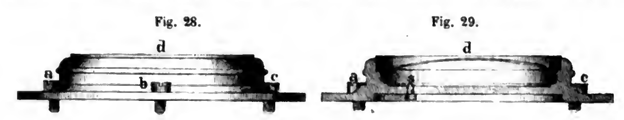


Fig. 28. Fig. 29.

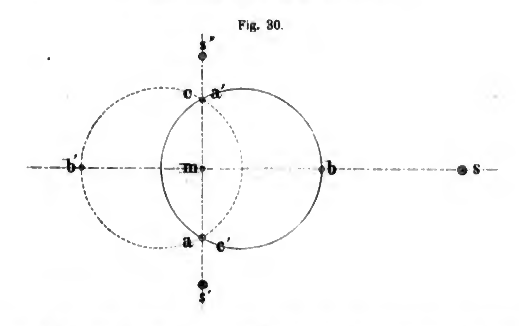
einigen Fussen geschliffen, während derselbe bei Röhrenlibellen oft mehrere hundert Fuss beträgt. Auf der Oberfläche des Deckels befinden sich einige gleichweit entfernte concentrische Kreise, die ihre Mittelpunkte in der Gehäusaxe haben und zur Beurtheilung des richtigen Standes der runden Blase oder ihres Ausschlages dienen. Das Gehäuse wird in der Regel ohne Weiteres mit seinem Unterrande auf die wagrecht zu stellenden ebenen Flächen aufgesetzt; es ist aber für die Berichtigung der Libelle besser, wenn es, wie in Fig. 28, auf 3 Stellschrauben (a, b, c) ruht, welche durch einen Nebenrand desselben gehen, gleichweit von einander abstehen und durch Vor- oder Rückwärtsdrehen gestatten, die Libellenaxe, als welche wir den durch den höchsten Punkt der Innenfläche des Glasdeckels gehenden Kugelhalbmesser betrachten, gegen eine ebene Unterlage senkrecht zu stellen.

§. 42. Sowie die Röhrenlibellen kann man auch die Dosenlibellen auf die Lage ihrer Axe gegen die der tragenden Fläche und auf ihre Empfindlichkeit prüfen, obwohl man in letzterer Beziehung keine grossen Ansprüche macht, in sofern die Dosenlibellen zu feineren Arbeiten nicht benützt werden.

Um sich von dem Grad der Empfindlichkeit einer solchen Libelle zu überzeugen, stelle man dieselbe auf ein Legebrett (Fig. 21), bewege dieses auf und ab, beobachte die Ausschläge der Luftblase, welche, in der Richtung der Bewegung entstehend, bekannten Neigungswinkeln entsprechen, und sehe endlich zu, ob diese Ausschläge und Winkel mit einander gleichmässig wachsen und abnehmen. Hat man für den Ausschlag a den Neigungswinkel φ beobachtet, so ist wie bei der Röhrenlibelle das Verhältniss von $a : \varphi$ das Mass der Empfindlichkeit und es gilt, wenn die innere Fläche des Glasdeckels einer Kugel angehört, zwischen dem Ausschlag, dem Neigungswinkel und dem Krümmungshalbmesser (r) dieselbe Beziehung, welche für die Röhrenlibelle in Gleichung (12) ausgesprochen ist.

Will man erfahren, ob die Axe der Dosenlibelle zu deren ebener Unterlage senkrecht steht, so verschaffe man sich zunächst ein nach zwei sich schneidenden Richtungen vertikal zu bewegendes Legebrett, wie Fig. 21 eines vorstellt, oder eine andere ebene Unterlage, welche diese Bedingung erfüllt. Wir wollen annehmen, die drei Punkte s, s′, s″ in Fig. 30 stellen die drei Stellschrauben des Legebretts und m s, s′ s″ die zwei Richtungen vor, in denen die Vertikalbewegung desselben stattfindet.

Fig. 30.



Auf dieses Brett werde die nach Fig. 28 eingerichtete Dosenlibelle so gestellt, dass zwei ihrer Fusspunkte (a, c) in die Richtung s' s'' fallen, während der dritte (b) auf m s steht. Durch die Schrauben s und s' oder s und s'' kann man bewirken, dass die Luftblase einspielt, d. h. den Mittelpunkt des Glases oder die nächsten Kreise centrisch umgibt. Sobald dieses der Fall ist, steht die Libellenaxe lothrecht; ob sie aber auch zur Unterlage senkrecht steht, erfährt man durch das Umsetzen derselben, welches geschieht, indem man a nach a', c nach c' und b nach b' bringt. Spielt nach diesem Umsetzen die Libelle wieder ein, so ist sie richtig, ausserdem aber nicht.

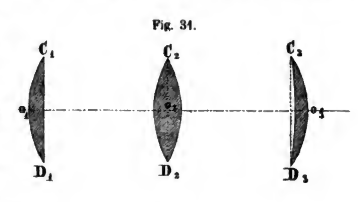
Der Ausschlag, welchen die Luftblase nach dem Umsetzen der Libelle in der Richtung b b' zeigt, entspricht der doppelten Abweichung der Libellenaxe von der senkrechten Stellung gegen die Linie b b', und der Ausschlag nach s' s'' dem doppelten Fehler der Axe gegen die Linie a c. Man verbessere nun die eine Hälfte dieser Abweichungen an den Schrauben a, b und die andere Hälfte an den Schrauben s, s'. Ob diese Verbesserungen auf das erste Mal vollständig gelungen sind, erfährt man dadurch, dass man die Libelle, nachdem sie in Folge der Berichtigung in der Lage a' b' c' einspielt, wieder in die Lage a b c versetzt und zusieht, ob sich wiederholt eine Abweichung zeigt oder nicht. Ist noch ein Rest des früheren Fehlers vorhanden, so wird er auf die oben angezeigte Weise gar weggeschafft.

Der Gebrauch einer berichtigten Dosenlibelle zur Horizontalstellung von Ebenen ergibt sich aus dem Vorhergehenden von selbst: es kommt dabei immer nur darauf an, die betreffende Ebene so zu bewegen, dass die an einer beliebigen Stelle auf ihr stehende Dosenlibelle einspielt. Denn sobald dieses der Fall ist, steht die Libellenaxe lothrecht, und da die durch die Fusspunkte der Stellschrauben (a, b, c) bestimmte Grundebene der Libelle auf dieser Axe senkrecht steht und zugleich in der Ebene liegt, welche horizontal gestellt werden soll, so ist auch diese Ebene senkrecht zur Libellenaxe und folglich wagrecht.

C. Mittel zur Vergrösserung kleiner sehr naheliegender Gegenstände.

Die Lupen.

§. 43. An vielen Messinstrumenten befinden sich so feine Theilungen, dass das Ablesen derselben mit blossem Auge entweder ganz unmöglich oder doch sehr schwierig ist. Man bedarf also Mittel, wodurch sich diese feinen Theilungen dem Auge vergrössert darstellen, damit sie deutlich erkannt werden können. Solche Mittel bieten die convexen Glaslinsen dar, deren Form bekanntlich entweder ein einfacher Kugelabschnitt oder eine Zusammensetzung von zweien ist, wobei sich die ebenen Grundflächen (C D, Fig. 31) decken.



Denkt man sich jeden solchen Glaskörper von einer durch die Mittelpunkte seiner Kugelflächen gelegten Ebene geschnitten, so entstehen die vorhergehenden drei Figuren, wovon die erste der planconvexen, die zweite der biconvexen und die dritte der concavconvexen Linse angehört. Diese Linsen haben folgende Benennungen gemein. Man nennt die Mittelpunkte ihrer Kugelflächen geometrische Mittelpunkte. Jede Linse hat deren zwei: bei der planconvexen Linse liegt der zweite in unendlicher Entfernung, weil die ebene Seitenfläche als Kugel von unendlich grossem Halbmesser anzusehen ist. Denkt man sich die geometrischen Mittelpunkte durch eine gerade Linie verbunden, so stellt diese die Axe der Linse vor. Da bei planconvexen Linsen der zweite Mittelpunkt unendlich entfernt ist, so bestimmt man die Axe durch den ersten Mittelpunkt, indem man von ihm aus eine Linie senkrecht zur ebenen Grundfläche zieht. Der gegenseitige Abstand der Linsenflächen längs der Axe heisst die Dicke, und der Durchmesser des kreisförmigen Randes beider Flächen die Oeffnung der Linse.

Die Convexlinsen haben die Eigenschaft, die von entfernten und nicht zu weit von der Axe abliegenden Punkten auf sie treffenden Strahlen so zu brechen, dass sie nach ihrem Durchdringen der Linse hinter derselben sich wieder vereinigen und physische Bilder der leuchtenden Punkte erzeugen. Wegen dieser Eigenschaft heissen sie Sammellinsen. Sind die leuchtenden Punkte ausserordentlich weit entfernt, so kann man die auffallenden Lichtstrahlen als parallele ansehen, und in diesem Falle nennt man die Stelle, an welcher sich die gebrochenen Strahlen sammeln, den Brennpunkt der Linse, während seine Entfernung von der Linse deren Brennweite heisst.

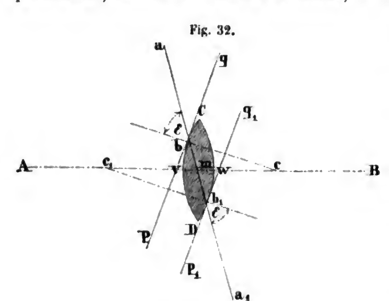
Befindet sich ein leuchtender Gegenstand so nahe vor einer Convexlinse, dass seine Entfernung kleiner ist als die Brennweite, so sammeln sich,

wie Theorie und Erfahrung lehren, die Lichtstrahlen hinter der Linse nicht, sondern gehen in Richtungen auseinander, die sich nach ihrer Verlängerung vor der Linse schneiden und dort ein geometrisches Bild des Gegenstandes darstellen, welches grösser ist als dieser. Aus diesem Grunde heissen die convexen Linsen auch *Vergrösserungsgläser*. Man kann die Linsen so einrichten, dass sie stark oder schwach vergrössern. Eine stark vergrössernde nennt man *einfaches Mikroskop*, eine Linse von geringer Vergrösserung aber *Lupe* (frz. Loupe). Die Theorie der Lupen stimmt mit jener der Convexlinsen überein; wir theilen daher nachfolgend das Wesentlichste über Convexlinsen mit.

§. 44. **Optischer Mittelpunkt.** Ausser den geometrischen Mittelpunkten ist noch ein anderer Punkt der Linsenaxe von Bedeutung, nämlich der *optische Mittelpunkt*. Man versteht darunter denjenigen Axenpunkt, welcher die ausgezeichnete Eigenschaft besitzt, dass alle durch ihn gehenden Lichtstrahlen ihre Richtung nicht verändern, wie dieses auch bei Parallelgläsern der Fall ist. Alle durch den optischen Mittelpunkt einer Linse gehenden Lichtstrahlen heissen *Hauptstrahlen*. Es ist wichtig, die Lage dieses Mittelpunkts zu kennen, weil man durch seine Verbindung mit dem leuchtenden Punkte sofort einen Hauptstrahl oder die Richtung erhält, in welcher nothwendig der Bildpunkt liegen muss, indem jeder Strahl das Bild des Punkts in sich trägt, von dem er kommt; auch erscheinen von dem optischen Mittelpunkte aus Gegenstand und Bild unter einerlei Sehwinkel.

Um die Lage des optischen Mittelpunkts einer ungleichseitigen biconvexen Glaslinse zu finden, sehe man in der nachfolgenden Figur A B als die Axe, C D als den Querschnitt der Linse an, und betrachte einen beliebigen Strahl a b, der in irgend einem Punkte b der Linse unter dem unbestimmten Winkel ε gegen das Loth c b einfällt. Soll der Strahl a b, nachdem er durch die Linse gegangen ist, in einer mit a b parallelen Richtung b_1 a_1 austreten, so muss er nothwendig mit dem Lothe c_1 b_1, das c b parallel ist, wieder den Winkel ε bilden, d. h. er muss von b nach einem Punkte b_1 gehen, welcher so liegt, dass die Brechungswinkel bei b und b_1 einander gleich sind. Der Punkt m, in welchem der Strahl b b_1 die Axe schneidet, ist der optische Mittelpunkt.

Fig. 32.



Bezeichnet man den Halbmesser c b der vorderen Linsenfläche mit r, den der hinteren c_1 b_1 mit r_1, die Dicke v w mit d und den Abstand des optischen Mittelpunkts von der vorderen

Fläche oder m v mit x, so findet man aus den beiden ähnlichen Dreiecken m b c und m b_1 c_1 sehr leicht :

$$x = \frac{r\,d}{r + r_1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (18)$$

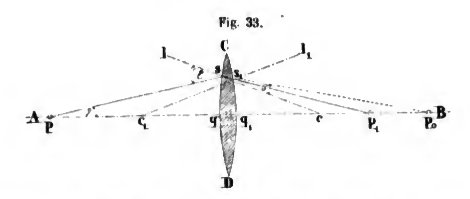
Für $r = r_1$ wird $x = \frac{1}{2}\,d$; in gleichseitigen biconvexen Linsen liegt also der optische Mittelpunkt in der Mitte derselben.

Für $r < r_1$ wird $x < \frac{1}{2}\,d$, was andeutet, dass in ungleichseitigen biconvexen Linsen der optische Mittelpunkt näher an der stärker gekrümmten Fläche sich befindet.

Für $r_1 = \infty$ wird $x = o$, d. h. in planconvexen Linsen liegt der optische Mittelpunkt im Durchschnitt der Axe mit der gekrümmten Fläche.

§. 45. **Hauptformel für Linsen.** In der folgenden Figur stelle C D eine ungleichseitige biconvexe Linse von den Halbmessern $c\,s = r$ und $c_1\,s_1 = r_1$ vor, und p bezeichne einen in der Axe A B liegenden leuchtenden Punkt, welcher die Entfernung $p\,q = a$ hat. Ein von diesem Punkt ausgehender Strahl p s wird von der ersten Linsenfläche nach $s\,s_1\,p_0$ und von der zweiten nach $s_1\,p_1$ gebrochen. Da nun von p aus auch ein Strahl in der Axe fortgeht, welcher ebenfalls das Bild von p in sich trägt, so muss dieses nothwendig in dem Schnittpunkte p_1 liegen.

Fig. 33.



Nennt man die Entfernung $p_1\,q_1$ (oder die Bildweite) a_1, das Brechungsverhältniss zwischen der Luft und dem Linsenmateriale n, und setzt man voraus, dass die von p ausgehenden Strahlen (p s) mit der Axe nur sehr kleine Winkel (φ) bilden, so findet man in jedem Lehrbuche der Physik die Formel entwickelt:

$$(n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} \quad \dots\dots \quad (19)$$

In dem besonderen Falle, dass der leuchtende Punkt p ausserordentlich weit entfernt, also $a = \infty$ ist, geht die Bildweite a_1 in die Brennweite f und der Bildpunkt p_1 in den Brennpunkt über. Es ist alsdann

$$(n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{f} \quad \dots\dots \quad (20)$$

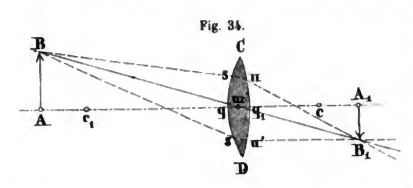
und durch Verbindung der vorstehenden zwei Gleichungen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (21)$$

Diese Formel stellt eine eben so einfache als wichtige Beziehung zwischen der Brennweite einer Linse, der Entfernung eines leuchtenden Punktes und seiner Bildweite dar; und obwohl wir sie nur für den Fall, dass der leuchtende Punkt in der Axe der Linse liegt, erklärt haben, so gilt sie doch auch noch für ausserhalb der Axe gelegene Punkte, wenn die Voraussetzung erfüllt wird, dass die Neigungswinkel der Lichtstrahlen gegen die Axe sehr klein und die Linsendicken nicht gross sind. Unter diesen Annahmen gilt sie folglich auch für eine Reihe von Punkten, welche eine Linie, und für eine Reihe von Linien, welche eine Fläche bilden.

§. 46. **Lage und Grösse des Bilds.** Stellt in der 34. Figur A B eine zur Axe $c c_1$ senkrecht stehende leuchtende Linie vor, für welche die oben ausgesprochene Voraussetzung stattfindet, so bildet sich der Punkt A auf dem Hauptstrahle A m in A_1 und der Punkt B auf dem Hauptstrahle B m in B_1, und somit die Linie A B in $A_1 B_1$ ab. Das Bild $A_1 B_1$ steht in der Entfernung $A_1 m = a_1$ senkrecht zur Linsenaxe und hat nothwendig die verkehrte Stellung des Gegenstandes A B.

Fig. 34.



Aus der Formel (21) ergibt sich die Bildweite

$$a_1 = \frac{a f}{a - f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

und aus der vorstehenden Figur die Stellung und Grösse des Bilds. Denn wenn man mit Hilfe der beiden ähnlichen Dreiecke A B m und $A_1 B_1 m$ zwischen den Seiten $A m = a$, $A_1 m = a_1$, $A B = h$ und $A_1 B_1 = -y$ eine Proportion bildet und hieraus mit Beiziehung der Gleichung (22)

$$y = -\frac{h f}{a - f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

entwickelt, so ist die S t e l l u n g des Bildes durch das Vorzeichen und dessen G r ö s s e durch den absoluten Werth von y bestimmt. Grösse, Stellung und Entfernung des Gegenstands sind durch die positiven Werthe von h und a, und die Brennweite der Linse ist durch den positiven Werth f vorgestellt.

Aus den vorstehenden Gleichungen kann man leicht die Werthe von a_1 und y finden, welche verschiedenen Werthen von a entsprechen; uns liegt jedoch zunächst bloss an jenem Werthe von a, welcher

1) ein Bild liefert, das wie der Gegenstand selbst v o r der Linse liegt, also a_1 negativ macht;

2) dem Bilde dieselbe Stellung gibt, welche der Gegenstand hat, somit y positiv macht;

3) den Gegenstand vergrössert zeigt, d. h. den Werth von y grösser als den von h macht; und der endlich

4) das vergrösserte Bild in die deutliche Sehweite bringt.

Diesen vier Bedingungen entspricht aber nur der Werth $a < f$, d. h. eine Stellung des Gegenstands innerhalb der vorderen Brennweite der Linse. Setzt man $a = f - e$, wobei e die positive Entfernung des Gegenstands vom vorderen Brennpunkte bezeichnet, so gehen die Ausdrücke für a_1 und y über in:

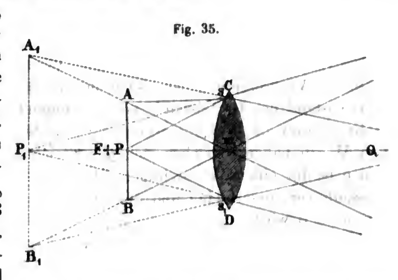
$$a_1 = -(f - e) \frac{f}{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$y = + h \frac{f}{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

und man erkennt leicht, dass dadurch die aufgestellten Anforderungen erfüllt werden, wenn man berücksichtigt, dass das Verhältniss $f : e$ stets grösser als 1 ist, da e immer kleiner als f seyn muss.

Die Figur 35 stellt das, was die letzten zwei Gleichungen aussagen, bildlich dar: CD ist eine biconvexe Linse, F ihr vorderer Brennpunkt, Fm die Brennweite f. In dem Punkte P, der um das Stück $PF = e$ innerhalb der Brennweite liegt, steht der Gegenstand AB von der Grösse h aufrecht. Die von A und B ausgehenden Hauptstrahlen Am und Bm müssen die Bilder von A und B enthalten; diese Hauptstrahlen werden aber von den übrigen Strahlen wie As und Bs_1 nicht hinter, sondern vor der Linse in A_1 und B_1 geschnitten; also sind A_1 und B_1 die Bilder von A und B, und A_1B_1 stellt das Bild von AB, wie es gewünscht wird, erstens vor der Linse, zweitens in aufrechter Stellung und drittens vergrössert dar.

Fig. 35.



Wegen der vierten Forderung siehe den folgenden Paragraphen. Zunächst lehren die Gleichungen (24) und (25), dass nicht bloss eine biconvexe, sondern jede convexe Linse als Lupe gebraucht werden kann, da für jede dieser Linsen a_1 und y ihre Vorzeichen behalten, weil sich das von f nicht ändert, wie man aus Gleichung (20) ersehen kann, wenn man daselbst für r und r_1 alle Werthe setzt, welche den drei Formen der Convexlinsen entsprechen. Ausser den biconvexen Linsen wendet man gerne planconvexe als Lupen an, weil diese eine geringe Kugelabweichung haben und folglich scharfe Bilder geben. Uebrigens lassen sich auch Glaskugeln als Lupen gebrauchen.

§ 47. **Vergrösserung der Lupen.** Der Ausdruck Nr. 24 lehrt, dass die Entfernung a_1 des Bildes vor der Linse um so grösser wird je kleiner e ist, je näher also der Gegenstand am vorderen Brennpunkte der Linse steht. Da es jedoch bei einer Lupe darauf ankommt, dass man das Bild

deutlich sieht, so muss a_1 für jedes Auge einen bestimmten Werth haben, welcher dessen Sehweite entspricht Diesen Werth kann man aber dem a_1 verschaffen, weil man e grösser und kleiner machen kann, indem man die Lupe dem Gegenstande mehr oder weniger nähert. Heisst nun die deutliche Sehweite eines Auges, das wir uns im Punkte Q der vorigen Figur denken wollen, w und sein Abstand Qm von der Linse d, so muss, wenn das Bild in der Sehweite erscheinen soll, offenbar $w - d = - a_1$ und desshalb

$$e\ (w - d) = f\ (f - e)$$

werden. Hieraus findet man

$$\frac{f}{e} = \frac{w - d}{f} + 1. \qquad (26)$$

Versteht man unter der Vergrösserung v einer Lupe das Verhältniss der Grösse des Bilds zu der des Gegenstands, also das Verhältniss von y : h, so folgt aus Gleichung (25)

$$v = \frac{f}{e} \qquad (27)$$

d. h. die Vergrösserung ist gleich der Brennweite der Lupe getheilt durch den Abstand des Gegenstands vom Brennpunkte. Je kleiner e wird, desto mehr beträgt die Vergrösserung; für ein bestimmtes w kann aber e nur den Werth haben, welcher sich aus Gleichung (26) ergibt. Dieser Werth von e ist für einen Weitsichtigen kleiner als für einen Kurzsichtigen, und desshalb vergrössert eine und dieselbe Lupe für jenen mehr als für diesen. Für $d = o$ wird

$$v = \frac{w}{f} + 1 \qquad (28)$$

d. h. wenn man das Auge ganz nahe an die Lupe hält, so beträgt ihre Vergrösserung eine Einheit mehr als der Quotient aus der Brennweite in die Weite des deutlichen Sehens.

Wird $d = f$, so folgt

$$v = \frac{w}{f} \qquad (29)$$

d. h. wenn sich das Auge um die Brennweite der Linse hinter dieser befindet, so ist deren Vergrösserung geradezu dem Quotienten aus der Brennweite in die Sehweite gleich.

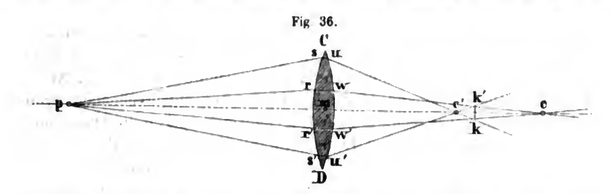
Aus den Gleichungen (28) und (29) ergibt sich noch unmittelbarer als aus (27), dass eine und dieselbe Lupe für einen Weitsichtigen mehr als für einen Kurzsichtigen vergrössert.

§. 48. **Kugelabweichung.** Theorie und Erfahrung lehren, dass die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen von einer aus Kugelflächen gebildeten Linse nur dann wieder in einem physischen Punkte vereinigt werden, wenn sie ganz dicht an der Axe dieser Linse einfallen; ausserdem aber durchschneiden die gebrochenen Strahlen die Linsenaxe um so früher, je grösser der Abstand der einfallenden Strahlen von der Axe ist, wie Fig. 36

zeigt, bei der die auffallenden Strahlen als von einem ziemlich weit entfernten Punkt (p) kommend angenommen wurden.

Bezeichnen ps, ps' alle Randstrahlen, welche gleiche Abstände (ms, ms') von der Axe haben, so schneiden sich dieselben in einem Punkte c' der Axe, und sind die Abstände ms, ms' die grösstmöglichen, so ist c' der

Fig. 36.



nächste Schnittpunkt an der Linse. Stellen dagegen pr und pr' alle gleichweit abliegenden, sehr nahe an der Axe befindlichen Strahlen vor, so ist c der entfernteste Schnittpunkt der Strahlen. Alle Strahlen, welche zwischen rs und r's' liegen, treffen die Linsenaxe in der Strecke c'c und gehen durch die Kreisfläche von dem Durchmesser kk', den man sich sehr klein zu denken hat.

Zu dieser Kreisfläche hat sich das Bild des leuchtenden physischen Punktes p ausgedehnt. Ein anderer neben diesem befindlicher Punkt wird sich in gleicher Weise abbilden, und es ist klar, dass die Bilder beider in einander übergreifen und daher die Deutlichkeit eines jeden stören müssen. Da diese Störung einzig und allein von der Kugelgestalt der Linsenflächen herrührt, so hat man derselben den Namen sphärische Aberration oder Kugelabweichung gegeben. Eine nähere Darstellung des Wesens dieser Abweichung liegt nicht in unserem Zwecke und kann nur in den ausführlichen Lehrbüchern der Optik gesucht werden; aber die Mittheilung folgender Ergebnisse der über die Kugelabweichung geführten Untersuchungen halten wir nicht für überflüssig:

1) Durch Rechnung kann man die Formen von plan- und biconvexen Linsen, welche keine Kugelabweichung haben, bestimmen; die Erfahrung lehrt aber, dass die Herstellung der hyperboloidischen und ellipsoidischen Flächen, welche sie erfordern, zu schwierig ist.

2) Die Kugelabweichung einer Linse wird vermindert, wenn man ihre Oeffnung durch eine Blende d. h. durch einen den Rand verdeckenden undurchsichtigen Ring verkleinert: die Breite des unbedeckten Theils soll weniger als ein Drittel der Brennweite betragen oder höchstens halb so gross seyn als der Halbmesser der am stärksten gekrümmten Linsenfläche.

3) Eine biconvexe Linse hat eine grössere oder kleinere Kugelabweichung, je nachdem ihre stärker oder schwächer gekrümmte Fläche dem Bilde des leuchtenden Gegenstandes zugewendet ist: man soll also die Fläche vom kleinsten Halbmesser zur Vorderfläche machen, wenn sich das

Bild hinter der Linse erzeugt; ausserdem aber zur Hinterfläche, wie bei den Lupen.

4) In Beziehung auf Kugelabweichung hat eine biconvexe Linse die besste Form, wenn sich der Halbmesser r ihrer Vorderfläche zum Halbmesser r_1 der Hinterfläche wie $(4 + n - 2n^2)$ zu $(2n^2 + 1)$ verhält, wobei n seine bisherige Bedeutung hat.

5) Die planconvexe Linse steht der biconvexen von besster Form dann am nächsten, wenn ihre ebene Fläche, in gleicher Weise wie bei der biconvexen Linse die flache Krümmung, der Bildseite zugewendet ist. (S. Nr. 3.)

6) Zwei nahe an einander gestellte Linsen von entsprechenden Krümmungshalbmessern geben eine von der Kugelabweichung befreite Doppellinse. Dergleichen Linsen sind bessere Lupen als die einfachen, weil sie gleichzeitig grössere Deutlichkeit und stärkere Vergrösserung gewähren.

§. 49. **Fassung der Lupen.** Die Lupen für Messinstrumente sind entweder in einen Ring oder einen Messingcylinder gefasst. Diese Fassung wird gewöhnlich von einem Stiele getragen, der mit dem Instrumente verbunden und so eingerichtet ist, dass sich die Lupe über die von ihr zu vergrössernde Theilung bewegen und dieser nach Bedürfniss nähern lässt.

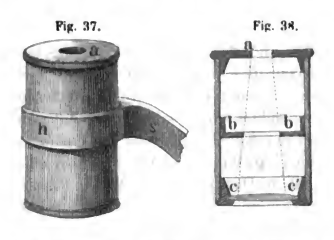


Fig. 37. Fig. 38.

An den später zu beschreibenden Messinstrumenten sind verschiedene Lupen abgebildet. Hier wird es genügen, einige Worte über die Wilson'sche Lupe zu sagen, von der Fig. 37 eine Ansicht und Fig. 38 einen Durchschnitt gibt. Die Cylinderfassung ist so lang als die Brennweite und hat der Linse gegenüber einen Deckel mit Sehloch (a), an welches das Auge zu halten ist. Diese Fassung entspricht also dem durch Gleichung (29) vorgestellten Falle. In der Mitte der Fassung befindet sich ein ringförmiges Blech (b, b) welches die Blendung oder das Diaphragma heisst und den Zweck hat, die Randstrahlen der Linse, welche die Deutlichkeit des Bildes stören, nicht in das Auge gelangen zu lassen. Um alle Spiegelungen an der Cylinderwand zu entfernen, wird die Fassung innwendig schwarz angestrichen oder doch wenigstens matt gearbeitet.

D. Mittel zur Vergrösserung weit entfernter Gegenstände.

§. 50. Die Vorrichtungen, welche entfernte Gegenstände so abbilden und vergrössern, dass sie deutlich erkannt werden können, heissen Fernrohre. Dieselben bestehen im Allgemeinen entweder bloss aus Linsen, oder aus Linsen und Spiegeln, welche durch Rohre in bestimmter Weise verbunden sind. Zu Vermessungen gebraucht man nur Fernrohre der ersten

Gattung (dioptrische); für astronomische Beobachtungen sind aber auch noch Fernrohre der zweiten Gattung (katoptrische) im Gebrauch.

Die dioptrischen Fernrohre sind mannichfaltiger Einrichtungen fähig und man unterscheidet desshalb verschiedene Arten derselben; als Messfernrohr wird jedoch fast nur das astronomische und selten das terrestrische angewendet. Wir werden daher auch nur jenes näher kennen lernen.

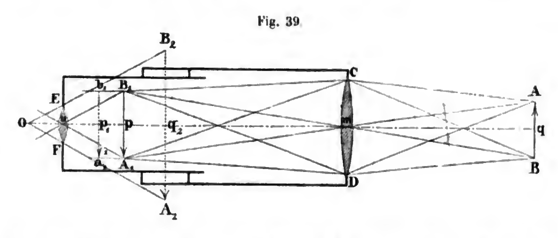
Das astronomische Fernrohr.

§. 51. **Einfachster Bau.** Das astronomische oder Kepler'sche Fernrohr besteht in seiner einfachsten Gestalt aus zwei convexen Glaslinsen, welche in eben so viele verschiebbare cylindrische Röhren gefasst sind. Die grössere Linse, welche beim Beobachten stets gegen den Gegenstand (das Object) gerichtet ist und die von diesem kommenden Lichtstrahlen in ihrem Brennpunkt oder dessen Nähe zu einem Bilde vereinigt, heisst das Objectiv, und die kleinere Linse, durch welche man das von der grösseren erzeugte Bild betrachtet, das Ocular. Das Objectiv befindet sich in der Objectivröhre und das Ocular in der Ocularröhre. Beide sollen sich gegen einander so verschieben lassen, dass ihre Axen in eine gerade Linie fallen. Die Axe der Objectivröhre heisst die mechanische Axe und die Axe des Objectivs die optische Axe des Fernrohrs.

Bei den zunächst folgenden Betrachtungen über die Wirkungsweise eines so einfachen astronomischen Fernrohrs, wie es eben beschrieben wurde, werden wir voraussetzen, dass die Axen sowohl der beiden Gläser als der beiden Röhren eine einzige gerade Linie bilden; später wird dann von den Folgen die Rede seyn, welche aus einer hievon abweichenden Lage dieser Axen hervorgehen.

§. 52. **Lage des Bilds.** Fig. 39 stelle den Durchschnitt eines Fernrohrs von der eben angegebenen Einrichtung vor: C D sey das Objectiv, E F das Ocular und u m q die gemeinschaftliche Axe.

Fig. 39



Ein sehr weit entfernter Gegenstand A B bildet sich (nach §. 46) in dem Brennpunkte p des Objectivs verkehrt ab. Das Bild A_1 B_1 wird durch das Ocular, welches genau wie eine Lupe wirkt, vergrössert und deutlich

erscheinen, wenn es sehr nahe am Brennpunkte dieses Glases, jedoch ein wenig innerhalb desselben, sich befindet (§. 47.) Hieraus folgt, dass bei sehr weit entfernten Gegenständen die gegenseitige Entfernung der beiden Linsen fast genau gleich ist der Summe ihrer Brennweiten.

Ist der Gegenstand A B nicht sehr weit vom Objectiv entfernt, so fällt das Bild A_1 B_1 über den Brennpunkt p hinaus nach p_1, weil nach der Gleichung (22) die Bildweite a_1 grösser wird als die Brennweite f, sobald diese gegen die Entfernung a des Gegenstands nicht vernachlässigt werden darf. Damit man aber das Bild a_1 b_1, welches nun entsteht, deutlich sehe, muss das Ocular wieder um seine Brennweite $u\,p_1 = f_1$ von ihm abstehen: es ist daher für nicht sehr weit entfernte Gegenstände der Abstand beider Linsen etwas grösser als die Summe ihrer Brennweiten.

Die Gleichung (22) gibt die Grösse der Aenderungen in der Entfernung der Linsen eines bestimmten Fernrohrs, wenn man sich daraus für verschiedene Entfernungen (a) des Gegenstands die zugehörigen Bildweiten (a_1) berechnet. So ist für eine Objectivlinse von 1 Fuss Brennweite (f) der Abstand des Bildes = 1,005 Fuss, wenn der Gegenstand 200 Fuss entfernt ist, und die Bildweite = 1,111 Fuss bei einer Entfernung des Gegenstands von nur 10 Fuss. Der Unterschied in den Bildweiten beträgt somit hier einen Decimalzoll, und um so viel muss sich auch der Abstand der Linsen ändern lassen.

Hieraus ergibt sich die Nothwendigkeit des Verschiebens der Röhren oder allgemeiner: das Bedürfniss einer Vorrichtung zur Aenderung des Abstandes des Oculars vom Objective. Bei manchen Fernrohren kann nämlich, während das Ocular feststeht, das Objectiv gegen dieses bewegt werden; in den meisten Fällen ist aber das Ocular verschiebbar und es gilt für dessen Bewegung die Regel, dass es bei grösseren Entfernungen des Gegenstandes dem Objective zu nähern und bei kleineren Entfernungen von ihm zu entfernen ist. Um wie viel man es zu verschieben hat, zeigt jede Beobachtung von selbst an, indem man immer die Stellung sucht, bei der das Bild am deutlichsten erscheint. Mit Rücksicht auf die Bemerkung zu Gleichung (27) erklärt sich auch die Erscheinung, dass das Ocular, wenn es für ein normales Auge die richtige Stellung hat, für ein kurzsichtiges noch etwas vor-, für ein weitsichtiges aber noch etwas zurückgeschoben werden muss.

§. 53. Ein Fernrohr wirkt hauptsächlich durch seine Vergrösserung, worunter man das Verhältniss der scheinbaren Grössen des Bildes und des Gegenstandes zu verstehen hat. Die scheinbare Grösse ω des Gegenstandes ist aber, wenn h dessen Durchmesser, a seine Entfernung vom Objective des Fernrohrs und l dessen Länge bezeichnet, ausgedrückt durch

$$\omega = \frac{h}{a + l},$$

während man für die scheinbare Grösse ω' des Bildes, wenn y die wirkliche Grösse dieses Bildes, v die Vergrösserung des Oculars und w die deutliche Sehweite vorstellt, findet:

$$\omega' = \frac{v\,y}{w}.$$

Das Verhältniss von ω' zu ω gibt die Vergrösserung des Fernrohrs

$$v_1 = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{(a+l)\,v\,y}{w\,h}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

und setzt man für y und v die Werthe, welche dafür in den Gleichungen (23) und (29) entwickelt worden sind, (wobei jedoch berücksichtigt werden muss, dass die Brennweite des Objectivs eine andere ist als die des Oculars), so wird

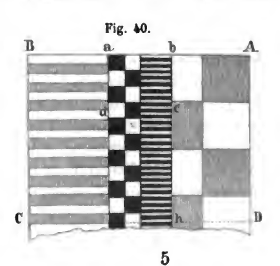
$$v_1 = \frac{a+l}{a-f} \cdot \frac{f}{f'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

In Berücksichtigung des Umstandes, dass die Länge l des Fernrohrs und die Brennweite f des Objectivs gegen die Entfernung a des Gegenstandes sehr klein sind, nimmt man das Verhältniss von $a + l$ zu $a - f$ gleich der Einheit an, und daher ist die Vergrösserung eines Fernrohrs gleich dem Quotienten aus der Brennweite des Oculars in die Brennweite des Objectivs.

Da aus dem Ausdrucke für v_1 in Gleichung (30) die deutliche Sehweite w wegfiel, indem man die Werthe für y und v einsetzte, so folgt daraus, dass ein und dasselbe Fernrohr für einen Kurz- und Weitsichtigen gleich stark vergrössert. Freilich ist dabei stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass der Kurzsichtige auch den entfernten Gegenstand sehen könne. Da er das mit blossem Auge nicht kann, so wäre für ihn die Vergrösserung des Fernrohrs eigentlich unendlich gross, wenn man nicht annehmen dürfte, dass er die scheinbaren Grössen des Gegenstandes und seines Bildes durch die Brille betrachtet, welche er trägt. Es lässt sich leicht zeigen, dass die scheinbare Grösse des Gegenstandes, welche die Brille gibt, von der mit blossem Auge gesehenen im Allgemeinen nur sehr wenig und in dem Falle gar nicht abweicht, wo die Brille dicht am Auge steht.

Kennt man die Brennweiten der beiden Linsen eines Fernrohrs nicht, so kann man dessen Vergrösserung auf dem Wege des Versuchs dadurch bestimmen, dass man eine gleichgetheilte Latte mit dem einen Auge durch das Fernrohr, mit dem anderen aber frei betrachtet und die Zahl der vergrösserten Theile abzählt, welche eine gewisse Anzahl unvergrösserter Theile decken. Der Quotient aus beiden gibt die Vergrösserung.

Fig. 40.

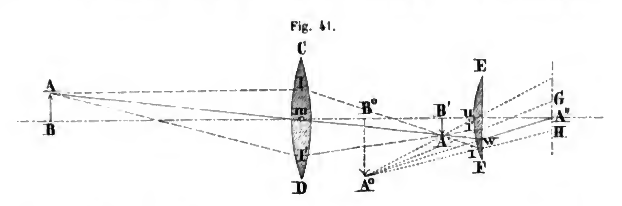


Ist z. B. a b c d in Fig. 40 die gleichgetheilte Latte, wie sie dem unbewaffneten Auge erscheint, so wird A B C D das durch das Fernrohr gesehene Bild von ihr seyn. Decken sich in der Richtung C D zwei Theilstriche der Latte und ihres Bildes, so hat man nur die Theile

von b bis h und von B bis C zu zählen und mit der kleineren Zahl in die grössere zu dividiren, um die Vergrösserung zu erhalten, welche in dem vorliegenden Falle = 53 : 18 oder nahezu = 3 ist. Ein anderes Verfahren zur Bestimmung der Vergrösserung auf praktischem Wege ist bei der Prüfung des Fernrohrs (§. 65) angegeben.

§. 54. **Augenpunkt.** Für die Beobachtung durch ein Fernrohr ist es nicht unwichtig, die Stelle zu kennen, an welche man das Auge zu bringen hat, um durch das Ocular das vom Objectiv erzeugte Bild möglichst hell und vollständig zu erblicken. Diese Stelle, welche der Augenpunkt des Fernrohrs heisst, kann man theoretisch durch folgende Betrachtung finden.

Fig. 41.



Stellt A in Fig. 41 irgend einen Punkt einer leuchtenden Fläche A B, C D den Durchschnitt des Objectivs und E F den des Oculars vor, so macht der von A ausgehende Hauptstrahl A m den Weg A m A' w A″, welcher leicht aufzufinden ist. Die zu diesem Hauptstrahl gehörigen Lichtkegel, deren Axe er ist, sind I A I', I A' I', i A' i' und G A⁰ H; der Strahl selbst schneidet die Linsen- und Fernrohraxe in dem Punkte A″. Was für den Punkt A gilt, lässt sich von allen Punkten der leuchtenden Fläche sagen: dass nämlich die Axen der von diesen Punkten ausgehenden Lichtkegel, welche das Bild der leuchtenden Fläche erzeugen, durch den optischen Mittelpunkt des Objectivs gehen und nach ihrer Brechung durch das Ocular in dem Punkte A″ der Linsenaxe sich schneiden. Denkt man sich nun an den Punkt A″ die Mitte der Pupille gebracht, so gehen die Hauptstrahlen durch diese Mitte weiter in das Auge, welches damit die grösste Menge des von der Fläche A B ausgehenden Lichts auffasst. Da kein anderer Punkt vor dem Oculare diese Eigenschaft besitzt, so stellt A″ den gesuchten Augenpunkt vor.

Seine Entfernung A″ n = d von dem Oculare ergibt sich, wenn man, der vorausgehenden Betrachtung gemäss, den optischen Mittelpunkt m des Objectivs als leuchtenden Punkt ansieht und in die dioptrische Hauptformel (Nr. 21) für die Brennweite f die Brennweite f' des Oculars, für a die Entfernung des Punkts m vom Ocular = f + f' und für a_1 die gesuchte Entfernung d des Auges einsetzt. Dadurch erhält man

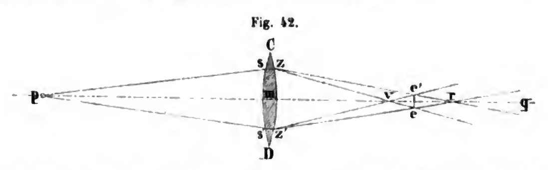
$$d = \frac{f + f'}{f} \cdot f' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

oder nahehin d = f', was andeutet, dass man bei dem einfachen astronomischen Fernrohre das Auge um die Brennweite des Oculars vor dieses halten soll, wenn man den abgebildeten Gegenstand in möglichster Ausdehnung und Helligkeit übersehen will.

§. 55. **Farbenabweichung.** Ein Fernrohr, dessen Objectiv bloss aus einer einzigen Convexlinse besteht, leidet an zwei Uebelständen, welche in der Optik mit den Namen Kugelabweichung (sphärische Aberration) und Farbenabweichung (chromatische Aberration) bezeichnet werden. Von der Kugelabweichung war bereits in §. 48 kurz die Rede, und mit der Farbenabweichung hat es folgende Bewandtniss.

Das weisse Licht wird in Folge der Brechung durch die Linse in verschiedenartig gefärbte Strahlen zerlegt, von denen jeder sein eigenes Brechungsvermögen besitzt. Die stärkste Brechbarkeit besitzen die violetten und die geringste die rothen Strahlen; zwischen diesen liegen die blau, grün, gelb und orange gefärbten Strahlen. Wegen des ungleichen Brechungsverhältnisses der farbigen Strahlen entsteht in dem Brennraume der Linse eine Reihe von Farbenbildern, wovon das violette dem Glase zunächst liegt, das rothe aber am weitesten entfernt ist. Zwischen diesen befindet sich das gelbe Bild, welches wegen seiner grösseren Lichtstärke vorzugsweise betrachtet wird. Fig. 42 gibt hiervon eine Anschauung.

Fig. 42.



Es sey p ein in der Axe gelegener leuchtender Punkt und p s, p s' seyen zwei in gleichen Abständen von der Axe einfallende Strahlen, so dass sie sich, wenn keine Zerstreuung des Lichts in Farben stattfände, in einem Punkte der Axe wieder vereinigen müssten. Wegen der Zerstreuung wird aber der gebrochene Strahl p s in den Farbenbüschel v z r und p s' in den Büschel v z' r zerlegt: die rothen Strahlen nehmen die Richtungen z r, z' r, die violetten die Richtungen z v, z' v an, und bei v entsteht das violette, bei r das rothe Farbenbild. Alle übrigen Strahlen gehen zwischen v und r durch die Kreisfläche von dem Durchmesser e e'. Diese Fläche heisst der Abweichungskreis, während die Störung selbst, welche durch die Farbenzerstreuung in der Vereinigung der von einem Punkte ausgehenden Strahlen zu einem einzigen farblosen Bildpunkte hervorgerufen wird, die chromatische Aberration oder die Farbenabweichung einer Linse genannt wird. Diese Abweichung veranlasst eine noch grössere Undeutlichkeit der Bilder als die Kugelabweichung, und es war daher seit langer Zeit das Bestreben der Optiker darauf gerichtet, sie zu vernichten,

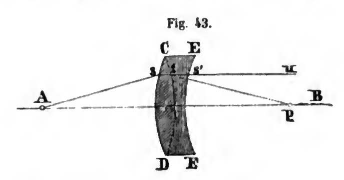
d. h. die gefärbten Strahlen wieder zu vereinigen. Dieses Streben hatte einen um so günstigeren Erfolg, als es gleichzeitig die Aufhebung der Kugelabweichung mit sich brachte.

Obwohl die Rechnungen, welche sich auf die Beseitigung der Farbenabweichung beziehen, einfacher sind als jene über die Kugelabweichung, so können hier doch nur die wichtigsten Ergebnisse derselben angeführt werden, welche in Folgendem bestehen:

1) Durch eine einzige Linse, welche Form sie auch haben mag, kann die Farbenabweichung niemals aufgehoben werden; es gehören wenigstens zwei Linsen dazu.

2) Von den zwei Linsen, deren Verbindung farblose Bilder liefert, muss die eine (C D) convex, die andere (E F) concav seyn, und es müssen die dazu verwendeten Glassorten ein ungleiches Zerstreuungsvermögen[1] besitzen.

Fig. 43.



3) Wäre das letztere nicht der Fall, so würden zwei Linsen von gleicher Brennweite, welche wie in Fig. 43 verbunden sind, gar kein Bild geben, weil das von A kommende und von der Linse CD nach dem Brennpunkte p gebrochene Licht so auf die Linse EF träfe, als käme es aus ihrem Brennpunkte selbst.

4) Streng genommen werden durch eine convexe Kron- und eine concave Flintglaslinse nur zwei Farben vollständig vereinigt; ordnet man aber die Linsen so an, dass die dunkelblauen und orangefarbigen Strahlen völlig vereinigt werden, so verschwindet auch die von den übrigen Strahlen herrührende Abweichung zur Genüge.

5) Da die Farblosigkeit der Bilder bloss verschiedene Glassorten und in einem bestimmten Verhältniss stehende Brennweiten der Kron- und Flintglaslinsen fordert, nach Gleichung (20) aber zu einer und derselben Brennweite unzählige Paare von Linsenhalbmessern passen, so kann mit der Farbenabweichung durch eine schickliche Wahl dieser Halbmesser auch die Kugelabweichung aufgehoben werden.

Eine Linsenverbindung, welche ein farbloses Bild liefert, heisst eine achromatische Linse. Fraunhofer stellte diese Linsen aus einer biconvexen Kronglaslinse und einer dieselbe berührenden planconcaven Flintglaslinse her. Beim Gebrauch wird die convexe Linse immer dem Gegenstande zugewendet, während die concave Linse dem Bilde zunächst steht.

§. 56. **Das Objectiv.** Um ein Fernrohr von den im vorigen Paragraph berührten zwei Uebelständen, welche aus der Kugel- und Farbenabweichung

[1] Bezeichnet d n die Aenderung des Brechungsverhältnisses n von einer Farbe zur andern, so heisst der Quotient aus n—1 in d n das Zerstreuungsvermögen und $n^2—1$ die brechende Kraft der Glassorte, welcher das n angehört.

entspringen, zu befreien, besteht dessen Objectiv nicht, wie wir bis jetzt vorausgesetzt haben, aus einer einfachen Convexlinse, sondern aus einer achromatischen Doppellinse (C F), welche auf die in Fig. 44 angedeutete Weise so gefasst ist, dass sie leicht und sicher in die Objectivröhre eingeschraubt werden kann. Diese Linse bringt keine Aenderung in die bisher auseinandergesetzte Wirkungsweise eines astronomischen Fernrohrs, wenn man nur für die Brennweite f der einfachen Convexlinse, welche als Objectiv angenommen war, die Brennweite der achromatischen Doppellinse setzt, oder, was dasselbe ist, sich unter f die Brennweite dieser Linse vorstellt. Will man die Brennweite f eines Fraunhofer'schen Objectivs von vorstehender Form oder eines anderen, dessen Linsen sich berühren, aus den beiden Brennweiten φ und φ' der Kron- und Flintglaslinse finden, so dient dazu die Gleichung

Fig. 44.



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi'}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

welche sich ergibt, wenn man erst die Brennweiten φ für die Convexlinse und φ' für die Concavlinse durch die Entfernungen der Gegenstände und ihrer Bilder ausdrückt und hierauf die Bedingung einführt, dass der Abstand beider Linsen null ist. Dabei versteht sich von selbst, dass das Bild der ersten Linse als Gegenstand für die zweite angesehen und der Gegenstand der ersten Linse ausserordentlich weit entfernt gedacht werden muss.

Um die Anwendung der vorstehenden Gleichung an einem Beispiele zu zeigen, nehmen wir an, es sey für die Kronglaslinse $n = 1{,}504$, der vordere Halbmesser $r = 6'',570$, der hintere $r' = 3'',464$, und für die Flintglaslinse $n_1 = 1{,}585$, der vordere Halbmesser $r_1 = -3'',464$ und der hintere $r_1' = 12'',520$. Hieraus findet man nach Gleichung (20):

$$\frac{1}{\varphi} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) = +0{,}22119 \text{ und } \varphi = +4'',50;$$

$$\frac{1}{\varphi'} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r'_1}\right) = -0{,}12215 \text{ und } \varphi' = -8'',19;$$

und wenn man diese Werthe in Gleichung (33) setzt, die Reciproke der Brennweite der Doppellinse:

$$\frac{1}{f} = 0{,}22119 - 0{,}12215 = +0{,}099 \text{ und } f = +10'',10.$$

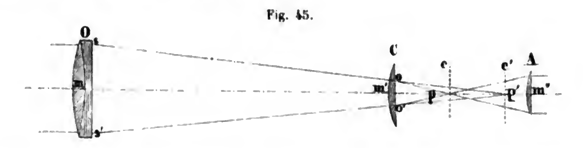
§. 57. **Das Ocular.** Dadurch, dass das Objectiv ein farbloses Bild liefert, ist das vom Auge gesehene Bild noch nicht farbenfrei, denn es bringt das Ocular, so lange es nur aus einer einfachen Convexlinse besteht, stets wieder eine Farben- und Kugelabweichung hervor. Man könnte die Farbenabweichungen wie bei dem Objective durch eine achromatische Linsenverbindung aufheben; es geschieht aber in der Regel nicht, weil die vom Ocular bewirkten Abweichungen nur gering und um so weniger auffallend sind, als das Auge selbst nicht ganz achromatisch gebaut ist. Gleichwohl

setzt man aber auch das Ocular aus zwei, vier oder mehr Linsen zusammen, weil sich dadurch nicht bloss die sphärischen Abweichungen vermindern, sondern auch noch Vortheile in Hinsicht auf die Grösse des Gesichtsfeldes und der Helligkeit erlangen lassen.

Wenn ein Ocular nur aus einer Convexlinse besteht, oder aus zweien so zusammengesetzt ist, dass es die Bilder der Gegenstände verkehrt zeigt, so heisst es ein astronomisches; besteht es aber aus vier oder mehr Linsen, welche zusammen ein aufrechtes Bild liefern, so wird es ein terrestrisches genannt. Der Unterschied zwischen einem astronomischen und terrestrischen Fernrohre besteht einzig und allein in der Verschiedenheit ihrer Oculare. Da wir es hier bloss mit dem astronomischen Fernrohre zu thun haben, so unterwerfen wir auch bloss das astronomische Ocular einer näheren Betrachtung.

Die zweite Linse des astronomischen Oculars, welche von der ersten einen unveränderlichen Abstand hat und folglich mit dieser dem Objectiv genähert oder von ihm entfernt werden kann, heisst die Collectivlinse des Fernrohrs, weil sie, wie sogleich gezeigt wird, die auf sie fallenden Lichtkegel in kleinere Räume zusammendrängt. Diese und die eigentliche Ocularlinse sind planconvexe Linsen. Wenden beide Ocularlinsen ihre convexen Seiten dem Objective zu, so bilden sie ein Huyghens'sches, und wenn sie ihre convexen Seiten sich selbst zukehren, ein Ramsden'sches astronomisches Ocular. In dem ersteren Falle steht, wie in Fig. 45, die Collectivlinse (C) innerhalb der Brennweite (m p') des Objectivs, und das Bild eines vor dem Objectiv befindlichen Gegenstandes erzeugt sich zwischen den beiden Ocularlinsen (in p); in dem zweiten Falle aber steht die Collectivlinse ausserhalb der Brennweite des Objectivs und das durch dieses erzeugte Bild befindet sich zwischen der Objectiv- und der Collectivlinse. Für unseren Zweck genügt es, die Wirkungsweise des häufiger angewendeten Huyghens'schen Oculars zu erörtern.

Fig. 45.



Stellt O das Objectiv eines astronomischen Fernrohrs, p' den Brennpunkt dieses Objectivs, C die Collectivlinse und A das Augenglas vor, so ist klar, dass die auf das Objectiv treffenden Lichtstrahlen sich nicht in der Brennebene p' c' zu einem Bilde vereinigen können, weil sie vorher auf die Convexlinse C treffen, welche die bereits gegen die Axe geneigten Strahlen (s o, s' o') durch Brechung noch stärker neigt und daher die Bildebene von p' nach p rückt. Die erste Wirkung der Collectivlinse besteht also darin,

dass sie die Bildweite um die Länge p p′ verkürzt. Da aber wegen des deutlichen Sehens die Brennebene der Ocularlinse A mit der Bildebene p e zusammenfallen muss, so wird, wie man sieht, in Folge der eingeschalteten Collectivlinse auch das ganze Fernrohr um das Stück p p′ kürzer. Die übrigen Einwirkungen dieser Linse, welche wesentlicher sind als die eben angedeuteten, ergeben sich aus den nachfolgenden Betrachtungen über die Helligkeit und das Gesichtsfeld eines Fernrohrs. Wir legen denselben die vortreffliche Abhandlung zu Grunde, welche Professor G. S. Ohm kurz vor seinem Tode noch schrieb, um sie seinen „Grundzügen der Physik“ einzuverleiben, woselbst sie sich auch zwischen Seite 464 und 488 befindet.

§. 58. **Natürliche Helligkeit.** Jeder leuchtende Punkt strahlt nach allen Seiten hin Licht aus. Gelangt ein Theil dieses Lichts durch die Pupille in's Auge, so sehen wir den Punkt, indem sein auf der Netzhaut erzeugtes Bild in uns die Empfindung jenes Punktes hervorruft. Diese Empfindung ist stärker oder schwächer, je nachdem die in's Auge gelangende Lichtmenge grösser oder kleiner ist. Diese Lichtmenge hängt aber sowohl von der Grösse der Pupille als von der Stärke des am Auge ankommenden Lichts ab; es wird daher die Stärke der Empfindung im Auge $= p\,s$ seyn, wenn p die Grösse der Pupille und s die Stärke des Lichts vor dem Augapfel ist. Sendet nicht bloss ein leuchtender Punkt, sondern die unendliche Anzahl von Punkten einer leuchtenden Fläche Licht in das Auge, so ist unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Lichtstärke in jedem Punkte der Fläche der im Auge bewirkte Lichteindruck oder die Beleuchtung des im Auge empfundenen Bildes dieser Fläche: $L = u\,p\,s$, wobei u eine ausserordentlich grosse Zahl vorstellt. Die Lichtmenge L ist über die ganze Bildfläche b_1 verbreitet; es trifft folglich auf die Flächeneinheit des Bildes eine Lichtmenge $= L : b_1$, und diese Lichtmenge entspricht der Helligkeit h des Bildes im Auge und somit auch der Helligkeit, unter welcher die leuchtende Fläche vor dem Auge erscheint. Es ist folglich

$$h = \frac{L}{b_1} = \frac{u\,s\,p}{b_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Bezeichnet b die aus u Punkten bestehend gedachte leuchtende Fläche, so ist offenbar u s die Stärke des von ihr kommenden Lichts unmittelbar am Auge. Aus der Optik ist aber bekannt, dass die Stärke des von einer leuchtenden Fläche (b) ausgehenden Lichts von der Intensität i mit dem Quadrat der Entfernung (e) abnimmt; es wird daher in dem vorliegenden Falle

$$u\,s = \frac{b\,i}{e^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

und wenn man diesen Werth in Gleichung (34) setzt:

$$h = \frac{b\,i}{b_1\,e^2}\,p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Nach §. 19 und Fig. 3 verhalten sich die Durchmesser der Flächen b, b_1 des Gegenstandes und seines Bildes wie ihre Abstände e, e_1 vom Kreuzungs-

punkte (m) des Auges, und folglich die Flächen selbst wie die Quadrate dieser Abstände. Setzt man den Werth von $b : b_1$, welcher sich aus der Proportion

$$b : b_1 = e^2 : e_1{}^2$$

ergibt, in die letzte Gleichung ein, so wird

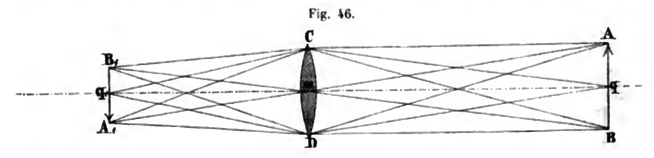
$$h = \frac{i\,p}{e_1{}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Hieraus folgt, dass die Helligkeit, womit man eine leuchtende Fläche sieht, nicht von deren Entfernung, wohl aber von der Grösse der Pupille und der Intensität des in der Fläche thätigen Lichts abhängt. Bei vollkommen reiner Luft sehen wir somit einen und denselben Gegenstand in sehr verschiedenen Abständen vom Auge gleich hell.

Alle äusseren Gegenstände, die wir anschauen, füllen, weil sie nach allen Richtungen strahlen, die ganze Pupille mit Licht aus, und da sich deren Grösse unter gewöhnlichen Umständen fast gar nicht ändert, so kann man für die Betrachtung jener Gegenstände auch die Grösse p als unveränderlich und folglich die Helligkeit als bloss von der Intensität i abhängig ansehen. Wenn wir dagegen, wie es bei Fernrohren der Fall ist, nur Bilder äusserer Gegenstände betrachten, so kann es kommen, dass nicht mehr die ganze Pupille mit Licht von diesen Bildern ausgefüllt wird, sondern nur ein Theil p′ derselben. In diesem Falle erhält man aus der letzten Gleichung die Helligkeit h, wenn man p′ für p setzt; denn wenn nur die Fläche p′ der Pupille Licht empfängt, so ist das mit einer Zusammenziehung der Pupille auf die Grösse p′ gleichbedeutend. Wir müssen demnach die Helligkeit, welche das blosse Auge gibt, oder die natürliche Helligkeit, von der Helligkeit eines optischen Instruments, z. B. eines Fernrohrs, unterscheiden. Die natürliche Helligkeit ist stets durch den Ausdruck (37) gegeben, die des Fernrohrs aber wird in den folgenden Paragraphen zugleich mit der Grösse des Gesichtsfeldes bestimmt.

§. 59. **Helligkeit der Linsenbilder.** Stellt in Fig. 46 die Linie AB einen leuchtenden Gegenstand vor, welcher von der Linse CD um mehr

Fig. 46.



als deren Brennweite entfernt ist, so gehen von den Punkten A, B, q die Lichtkegel ACD, BCD, qCD zur Linse und hinter dieser entstehen die Lichtkegel CA_1D, CB_1D, Cq_1D, welche in der Linie A_1B_1 die Bilder A_1, B_1, q_1 der leuchtenden Punkte A, B, q darstellen. Vernachlässigt man den Lichtverlust, welcher durch die Brechung in der Linse veranlasst wird, so kommt in den Bildpunkten eben so viel Licht an, als von den zugehörigen

Gegenstandspunkten ausging. Je zwei zusammengehörige Kegel enthalten an ihren in der Linse liegenden Grundflächen gleichviel Licht: es geben folglich je zwei solche Kegel in den Entfernungen $mq = a$ und $mq_1 = a_1$ gleiche Beleuchtung oder einerlei Lichtstärke. Heisst diese Stärke des Lichts an der Linsenfläche σ; jene, welche in dem Kegel CqD in der Entfernung ε von der Spitze q stattfindet, s, und die Lichtstärke in dem Kegel Cq_1D an der Stelle, welche ebenfalls um ε von der Spitze abliegt, s_1, so gelten nach bekannten Sätzen folgende zwei Proportionen:

$$\sigma : s = \varepsilon^2 : a^2 \text{ und } \sigma : s_1 = \varepsilon^2 : a_1{}^2,$$

aus denen die dritte folgt:

$$s : s_1 = a^2 : a_1{}^2, \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

welche lehrt, dass sich die Lichtstärken in gleichweit von den Spitzen entfernten Querschnitten zweier zusammengehöriger Lichtkegel wie die Quadrate der Kegelhöhen verhalten.

Bezeichnen b und b_1 die zusammengehörigen Flächen des leuchtenden Gegenstands und seines Bildes, wovon der erstere die Entfernung a und das letztere die Entfernung a_1 von der Linse hat, so verhält sich:

$$b : b_1 = a^2 : a_1{}^2. \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

Da jeder Punkt der leuchtenden Flächen b und b_1 in der Entfernung ε eine Lichtstärke liefert, welche beziehlich s und s_1 ist, so werden alle Punkte der Flächen b und b_1 d. h. diese selbst in der Entfernung ε Lichtwirkungen m und m_1 hervorbringen, welche sich wie s und s_1 verhalten; es findet somit die Gleichung statt:

$$m : m_1 = s : s_1 = a^2 : a_1{}^2 = b : b_1, \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

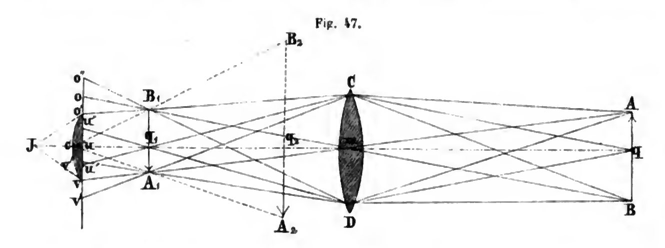
von denen die letztere lehrt, dass die leuchtende Fläche und ihr Bild gleiche Lichtintensität besitzen, und dass demnach auch Gegenstand und Bild im Auge gleich hell erscheinen, wenn alle einzelnen Lichtkegel die Pupille vollständig bedecken. Füllen die vom Bild ausgehenden Lichtkegel nur einen Theil p' der Pupille aus, so ist, wie schon im vorigen Paragraph bemerkt wurde, die Helligkeit in dem Verhältnisse von p zu p' geringer.

Es versteht sich von selbst, dass die vorstehenden Betrachtungen sich nicht ändern, wenn man statt des leuchtenden Gegenstandes ein Bild annimmt; man kann dieselben also auch auf eine zweite, dritte, vierte Linse und die von denselben erzeugten Bilder der vor ihnen befindlichen Bilder anwenden; ja man kann das Auge selbst als die letzte dieser Linsen betrachten. Auf dieser Erwägung und auf der Voraussetzung, dass der durch die verschiedenen Brechungen entstehende Lichtverlust nicht bedeutend sey, beruht die weitere Folgerung: dass alle in einem Fernrohre und in dem vor ihm befindlichen Auge entstehenden Bilder dieselbe Lichtintensität besitzen wie der leuchtende Gegenstand, wenn die von dem letzten Bilde ausgehenden Lichtkegel die Pupille ganz ausfüllen.

§. 60. **Helligkeit und Gesichtsfeld bei zwei Linsen.** Bezeichnet CD in Fig. 47 eine Objectivlinse, so wird dieselbe hinter sich von einem vor ihr liegenden Gegenstande AqB die Strahlenkegel CA_1D, CB_1D, Cq_1D

erzeugen, welche den leuchtenden Punkten A, B, q entsprechen, von denen q in der Linsenaxe liegen soll. Die in den Bildkegeln liegenden Strahlen gehen über die Spitzen A_1, B_1, q_1 fort und bilden zwischen den Flächen $A_1 B_1$ und o″v′ die Scheitelräume A_1 v′v″, B_1 o′o″, q_1 u′u″ der Bildkegel, welche sich gerade so verhalten, als ob A_1, B_1, q_1 leuchtende Punkte wären

Fig. 47.



von der Beschaffenheit, dass sie ausserhalb dieser Scheitelräume kein Licht geben. Denkt man sich an die Ebene o″v′ eine Ocularlinse (c) gerückt, so kann diese entweder alles Licht der Scheitelräume aufnehmen oder nur einen Theil davon. Nach unserer Figur empfängt diese Linse alles Licht des mittleren, einen Theil des unteren und gar kein Licht des oberen Scheitelraums. Es ist nun von selbst klar, dass in diesem Falle die Ocularlinse nur von den Punkten A_1 und q_1 neue Bilder erzeugen kann, von B_1 aber nicht; und dass das Bild von q_1, weil es das volle Licht hat, heller seyn wird als das von A_1.

Es ist wohl nicht überflüssig, daran zu erinnern: erstens, dass der Gegenstand (hier das Bild q_1 oder A_1), welcher von einer Ocularlinse deutlich gesehen werden soll, sehr nahe um deren Brennweite von ihr stehen muss; und zweitens, dass nur der mittlere Theil einer Linse wirksam, der äussere aber verdeckt ist, um deren Kugelabweichung möglichst zu vermindern. Nach §. 48 hat man sich die wirksame Breite EF der Objectiv- und der Ocularlinse höchstens gleich der Hälfte des Halbmessers der am stärksten gekrümmten Fläche oder höchstens gleich einem Drittel der Brennweiten (f, f_1) dieser Linsen vorzustellen. Wir werden diese Breite, wo es nöthig ist, $= \mu f$ setzen, wobei μ stets kleiner als 0,33 ist.

Wenn man der Ocularlinse c nur eine flache Wölbung gibt, so kann man die Ebene o″v′, welche die Linse in u berührt und auf der Axe cm senkrecht steht, für die vordere Linsenfläche gelten lassen. Bei dieser Annahme werden die Durchmesser u′u″, v′v″, o′o″ der Scheitelräume, welche zu q_1, A_1, B_1 gehören, einander gleich, weil die Dreiecke Cq_1D und u′q_1u″, CA_1D und v′A_1v″, CB_1D und o′B_1o″ einander ähnlich, die grösseren Dreiecke alle gleichgross und die Höhen der kleineren Dreiecke gleichlang sind. Bezeichnet demnach

β den Halbmesser der Kreise, nach welchen die Scheitelräume von A_1, q_1, B_1 die Ebene o″v′ schneiden,
y die halbe wirksame Oeffnung der Objectivlinse CD,
a_1 die Bildweite des Objectivs CD, und
f_1 die Brennweite der Ocularlinse c,
so verhält sich:

$$y : \beta = a_1 : f_1.$$

Nimmt man die Ocularlinse sehr dünn an, so darf man auch den Halbmesser ϱ der Grundflächen der aus ihr tretenden Lichtkegel, welche bei dem Eintritte den Halbmesser β haben, diesem Halbmesser β gleich setzen. Da die Strahlen dieser Kegel aus der Brennebene des Oculars kommen, so werden sie nach der Brechung fast parallel mit der Axe austreten und folglich nahezu in der Breite 2ϱ zum Auge gelangen. Ist nun β nicht kleiner als ϱ und stellt ϱ den Halbmesser der Pupille vor, so werden die Lichtkegel von der Breite 2β oder 2ϱ die Pupille ganz ausfüllen. Setzt man in der letzten Gleichung ϱ für β, so kann man aus der Proportion:

$$y : \varrho = a_1 : f_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

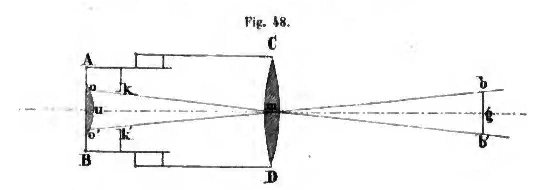
die Brennweite f_1 einer Ocularlinse bestimmen, welche zu einem Objective von der wirksamen Oeffnung 2y und einer Brennweite f, die der Grösse a_1 fast gleich ist, dann gehört, wenn alle Strahlenkegel die Pupille noch ganz ausfüllen und somit die Bilder ihre volle Helligkeit haben sollen. Bedenkt man weiter, dass das Verhältniss $a_1 : f_1$ sehr nahe die Vergrösserung des Fernrohrs ausdrückt, so lehrt die letzte Gleichung auch, dass die Vergrösserung nicht mehr als $y : \varrho$ betragen darf, wenn die Helligkeit des Bildes die natürliche seyn soll.

Hiebei ist vorausgesetzt, dass alle von dem Bilde kommenden Lichtkegel die Breite der Pupille haben und durch das Ocular zum Auge gelangen können; da dieses aber nicht immer der Fall ist, so muss noch weiter untersucht werden, was geschieht, wenn β grösser oder kleiner als ϱ ist und die Lichtkegel nur theilweise oder gar nicht durch die Ocularlinse dringen. Wenn $\beta > \varrho$ ist, so dürfen ohne Zweifel die Lichtkegel in der Breite $2\beta - 2\varrho$ über den Rand der Ocularöffnung hinausfallen, ohne dass eine Verminderung der Helligkeit eintritt. Will man bestimmen, wie weit in diesem Falle die Axen (A_1 v) der Lichtkegel (A_1 v′v″) an der Ebene o″v′ von der Instrumentenaxe (cm) abstehen dürfen, so ist, wenn man diesen Abstand $vu = \delta$ und den Halbmesser der wirksamen, durch μf_1 gegebenen Ocularöffnung $= \eta$ setzt, nach einer einfachen Ueberlegung:

$$\delta = \eta + \beta - 2\varrho. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

Denkt man sich den senkrechten Kegel erzeugt, welcher (wie in Fig. 48) am Ocular eine Grundfläche von dem Halbmesser $ou = \delta$ hat, dessen Axe mn die Instrumentenaxe ist und dessen Spitze im optischen Mittelpunkte m des Objectivs liegt, so schneidet dieser Kegel von dem in der Brennebene kk′ des Oculars befindlichen Bilde denjenigen kreisförmigen Theil heraus, welcher durch das Ocular an allen Stellen mit ungeschwächter Helligkeit

Fig. 48.



gesehen wird. Der Scheitelraum bmb′ dieses Kegels bestimmt die Kreisflächen an Gegenständen ausserhalb des Objectivs, welche mit voller Helligkeit durch das vor dem Ocular befindliche Auge wahrgenommen werden. Haben diese Kreise in der Entfernung $mg = a$ vom Objectiv den Halbmesser $bg = r$, so ist die scheinbare Grösse von r oder

$$\varphi = \frac{r}{a} = \frac{\delta}{a_1 + f_1} = \frac{\eta + \beta - 2\varrho}{a_1 + f_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

eine unveränderliche Grösse, so lange der Abstand der Linsen sich nicht ändert. Ohm nennt dieselbe „den scheinbaren Halbmesser des Gesichtsfeldes von grösster gleicher Helligkeit."

Soll die Helligkeit nicht vermindert werden, so darf β nicht kleiner seyn als ϱ; bei $\beta = \varrho$ findet noch volle Helligkeit statt und in diesem Falle ist

$$\varphi = \frac{\eta - \varrho}{a_1 + f_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Wird die wirksame Breite 2η der Ocularlinse gerade der Pupillenbreite 2ϱ gleich, so erhält man $\varphi = 0$, d. h. es ist kein Gesichtsfeld von grösster gleicher Helligkeit mehr vorhanden; mit andern Worten: es erscheint nur noch der Punkt des Gegenstands mit voller Helligkeit, welcher in der verlängerten Axe liegt, während alle Punkte ausserhalb dieser Axe um so weniger hell erscheinen, je grösser ihr Abstand von der Axe ist.

Diejenigen Stellen des Bildes, welche Strahlenkegel liefern, deren Axen den Rand der Ocularlinse gerade noch berühren, dringen zur Hälfte durch diese Linse und erscheinen desshalb in der halben natürlichen Helligkeit. Es ist klar, dass, wenn man sich mit dieser verminderten Helligkeit noch begnügt, der Abstand δ um den Halbmesser ϱ grösser werden darf. Dieser neue Werth von δ oder

$$\delta' = \eta + \beta - \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

bestimmt „das Gesichtsfeld der grössten ungleichen Helligkeit", nämlich: so lange $\beta > \varrho$ ist:

$$\varphi' = \frac{\eta + \beta - \varrho}{a_1 + f_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

und wenn $\beta = \varrho$ wird:

$$\varphi' = \frac{\eta}{a_1 + f_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Gewöhnlich bedient man sich der beiden letzten Gleichungen zur Bestimmung des Gesichtsfeldes, da nur in seltenen Fällen ein Gesichtsfeld von grösster gleicher Helligkeit verlangt wird. Die Blenden k, k', welche nach Fig. 48 in der Ocularröhre angebracht werden, sind so eingerichtet, dass sie die halbe natürliche Helligkeit noch zulassen, d. h. ihre Oeffnung k k' greift nicht in den senkrechten Lichtkegel o m o' ein, dessen Breite am Ocular $= 2\delta'$ und dessen Spitze der optische Mittelpunkt des Objectivs ist.

Bezeichnen h, h', h'' die (nach Fig. 47) einander entsprechenden Durchmesser des Gegenstandes A B und seiner Bilder $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, sowie f_1 und a_{11} die Entfernungen dieser Bilder von der Ocularlinse, und haben a und a_1 ihre vorige Bedeutung, so verhält sich, wie leicht einzusehen, $h : h'' = a f_1 : a_1 a_{11}$ und es ist somit

$$h'' = \frac{a_1 a_{11}}{f_1} \cdot \frac{h}{a} \qquad (48)$$

Ein Auge, das sich in dem Punkte I hinter dem Ocular befindet und von diesem um $I c = d$ absteht, sieht den Durchmesser h'' in der scheinbaren Grösse $\varphi'' = h'' : (a_{11} + d)$, während $h : a$ die scheinbare Grösse φ' des Durchmessers h vom Mittelpunkt des Objectivs aus ist. Dividirt man die Gleichung (48) mit $a_{11} + d$, so kommt

$$\varphi'' = \frac{a_1 a_{11}}{f_1 (a_{11} + d)} \varphi' \qquad (49)$$

und wenn man berücksichtigt, dass das Verhältniss von $\varphi'' : \varphi'$ die Vergrösserung v_1 des Fernrohrs bezeichnet, so wird

$$v_1 = \frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{a_1 a_{11}}{f_1 (a_{11} + d)} \qquad (50)$$

Da die Grösse d gegen a_{11} nur klein ist (denn $a_{11} + d$ stellt die Weite des deutlichen Sehens vor), so kann man das Verhältniss von $a_{11} : (a_{11} + d)$ der Einheit gleich nehmen; und da a_1 nur wenig von der Brennweite f des Objectivs verschieden ist, so wird wie früher (§. 53) die Vergrösserung sehr nahe gleich dem Verhältniss der Brennweiten des Objectivs und des Oculars.

Wenn man $a_1 = f$ setzt, so wird $a_1 + f_1 = f + f_1$ und da $f : f_1 = v_1$, folglich $f = v_1 f_1$ ist, $a_1 + f_1 = f_1 (v_1 + 1)$. Setzt man diesen Werth in die Gleichung (44), so erhält man für das Gesichtsfeld von grösster gleicher Helligkeit:

$$\varphi = \frac{\eta - \varrho}{f_1 (v_1 + 1)} = \frac{\omega}{v_1 + 1}, \qquad (51)$$

wobei $\eta - \varrho = \omega f_1$ ist; und für das Gesichtsfeld von grösster ungleicher Helligkeit wird

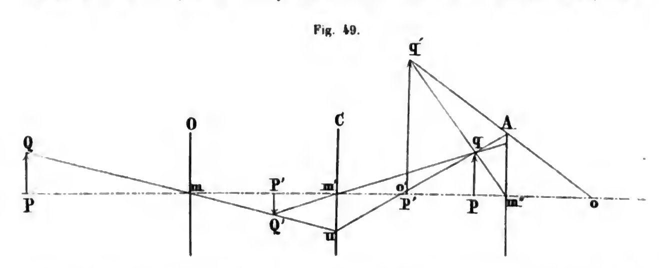
$$\varphi' = \frac{\eta}{f_1 (v_1 + 1)} = \frac{\omega'}{v_1 + 1}, \qquad (52)$$

wobei $\eta = \omega_1 f_1$ ist. Man entnimmt hieraus, dass beide Arten von Gesichtsfeldern des Fernrohrs nahezu mit der Vergrösserung desselben abnehmen und folglich auch ein grosses Gesichtsfeld nur auf Kosten der

Vergrösserung erlangt werden kann. Aus diesem Grunde und da es bei Land- und Erdmessungen meist nur auf die deutliche Uebersicht einzelner Punkte, kurzer Linien oder kleiner Flächen ankommt, verzichtet man bei den Fernrohren für geodätische Instrumente auf ein grosses Gesichtsfeld.

§. 61. **Gesichtsfeld und Vergrösserung bei drei Linsen.** In Fig. 49 mögen die Linien O, C, A beziehlich die Objectiv-, Collectiv- und Ocularlinse mit den Brennweiten f, f_0, f_1, den Bildweiten a_1, a_0, a_{11} und den Abständen $m\,m' = c$, $m'\,m'' = c_1$ vorstellen. Nehmen wir zunächst an, dass

Fig. 49.



jede Linse ein Bild erzeuge: das Objectiv vom Gegenstande P Q in P' Q', das Collectiv von P' Q' in p q, und die Ocularlinse von p q in p' q'; und setzen wir die Entfernung des Gegenstandes P Q von dem Objectiv = a, so gelten folgende drei Gleichungen, deren Richtigkeit aus §. 45 hervorgeht:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}\,;\;\frac{1}{f_0} = \frac{1}{c - a_1} + \frac{1}{a_0}\,;\;\frac{1}{f_1} = \frac{1}{c_1 - a_0} + \frac{1}{a_{11}}. \quad . \quad (53)$$

Nennen wir ferner die von der optischen Axe aus gerechneten grössten Höhen von P Q, P' Q', p q, p' q', welche durch das Ocular noch übersehen werden können, beziehlich h, h_1, h_0, h_{11}, so finden folgende drei weitere Gleichungen statt:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{h}{h_1}\,;\;\frac{c - a_1}{a_0} = \frac{h_1}{h_0}\,;\;\frac{c_1 - a_0}{a_{11}} = \frac{h_0}{h_{11}}. \quad . \quad . \quad (54)$$

Aus den beiden letzteren folgt:

$$h_{11} = \frac{a_1\,a_0\,a_{11}\,h}{a\,(c - a_1)\,(c_1 - a_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Befindet sich das Auge in dem Punkte o hinter der Linse A und ist $m''\,o = d_1$, so wird die scheinbare Grösse des letzten Bildes gleich $p'\,q' : p'\,o = a_{11} : (a_{11} + d_1)$, während die des Gegenstandes, vom Objectiv aus genommen, gleich $h : a$ ist. Dividirt man daher die letzte Gleichung erst mit $a_{11} + d_1$ und hierauf mit $h : a$, so gibt der Quotient die Vergrösserung des Fernrohrs mit drei Linsen:

$$v_{11} = \frac{a_1\,a_0\,a_{11}}{(c - a_1)\,(c_1 - a_0)\,(a_{11} + d_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Ist $d_1 = o$, d. h. hält man das Auge ganz nahe an die Ocularlinse A,

so wird das Verhältniss $a_{11} : (a_{11} + d_1) = 1$. Dasselbe kann man aber auch in allen anderen Fällen annehmen, da d_1 gegen a_{11} stets nur gering ist; folglich ist genau genug:

$$v_{11} = \frac{a_1 a_0}{(c - a_1)(c_1 - a_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Erwägt man, dass in den beiden Ausdrücken für v_{11} die Grösse $c_1 - a_0 = f_1$, $a_0 = c_1 - f_1$ und sehr nahe $a_1 = f$ ist, so wird nach Gleichung (56) die Vergrösserung

$$v_{11} = \frac{c_1 - f_1}{c - f} \cdot v_1 = \frac{c_1 - f_1}{c - f} \cdot \frac{f}{f_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Die durch die Mitte des Objectivs gehenden und auf den Rand der zweiten Linse treffenden Strahlen schneiden sich nach der Brechung durch diese Linse in einem Punkte o', welcher von der Linse C um die Länge $m' o' = b$ absteht. Von o' aus gehen diese Strahlen auf die dritte Linse A und vereinigen sich nach ihrem Durchgange in dem Punkte o, welcher von A den Abstand $m'' o = d_1$ hat. Die Abstände b und d_1 ergeben sich aus den leicht zu bildenden Gleichungen:

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \text{ und } \frac{1}{f_1} = \frac{1}{c_1 - b} + \frac{1}{d_1} \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, wenn b aus der ersten bestimmt ist,

$$d_1 = \frac{c_1 - b - f_1}{(c_1 - b) f_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

und dieser Ausdruck gibt die Entfernung des Augenpunktes für ein astronomisches Fernrohr mit Collectivlinse. Hier darf man die Grösse f_1 gegen $c_1 - b$ nicht vernachlässigen, weil c_1 und b selbst nur kleine Grössen sind. In der optischen Praxis nimmt man gewöhnlich den Abstand der beiden Ocularlinsen $c_1 = 2 f_1$ und die Brennweite der Collectivlinse $f_0 = 3 f_1$ an. Unter dieser Voraussetzung folgen aus den Gleichungen (59) die Entfernungen

$$b = \frac{3 c f_1}{c - 3 f_1} \text{ und } d_1 = \frac{6 f_1 + c}{3 f_1 + 2 c} f_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Für $f_1 = 1/3$ Zoll und $c = 11$ Zoll wird somit $b = 1'',1$ und $d_1 = 1/6$ Zoll, also d_1 nur halb so gross als f_1.

Soll das Fernrohr ein Gesichtsfeld von grösster gleicher Helligkeit haben, so muss alles Licht, welches von einem leuchtenden Punkte auf die Objectivlinse trifft, sich wieder in den Bildpunkten sammeln und von dem Oculare in der Breite der Pupille oder darüber austreten. Die Erfüllung dieser Bedingung erfordert folgende Eigenschaften der Linsen und ihrer Zusammenstellung. Bezeichnet nämlich y den Halbmesser der wirksamen Objectivöffnung, so hat der zu dem Bilde eines leuchtenden und in der optischen Axe liegenden Punktes gehörige Lichtkegel eine Grundfläche von der Breite 2 y und eine Länge a_1. Der Scheitelraum dieses Kegels hat bis zur Collectivlinse eine Länge $c - a_1$ und an dieser eine Breite $2\beta'$. Es verhält sich somit

$$y : \beta' = a_1 : (c - a_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Ferner tritt aus der zweiten Linse ein Lichtkegel von der Basis 2β und der Länge a_0, und nachdem derselbe das zweite Bild erzeugt hat, setzt sich der Scheitelraum in einer Länge $c_1 - a_0$ bis an die Ocularlinse fort, wo er die Breite $2\beta''$ erhält. Für diese zwei Kegel gilt die Gleichung:

$$\beta : \beta'' = a_0 : (c_1 - a_0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Soll nun alles von dem leuchtenden Punkte kommende Licht, mit Ausnahme des Verlustes bei den verschiedenen Brechungen, durch die drei Linsen hindurch gehen, so darf die wirksame Oeffnung $2y'$ der Collectivlinse nicht kleiner seyn als $2\beta'$, und die Breite η der Ocularlinse nicht kleiner als 2β. Ausser diesen zwei Bedingungen, welche sich in Zeichen so ausdrücken lassen:

$$\beta' \overline{\overline{>}}\, y' \text{ und } \beta \overline{\overline{>}}\, \eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

müssen auch noch folgende zwei erfüllt werden:

$$\beta \overline{\overline{>}}\, \varrho \text{ und } \eta \overline{\overline{>}}\, \varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

indem nur in diesen Fällen die aus dem Oculare kommenden Lichtkegel die Pupille von der Breite 2ϱ ganz zu bedecken im Stande sind.

Darf das Fernrohr ein Gesichtsfeld von ungleicher Helligkeit haben, so müssen erstens die in Nr. 64 ausgesprochenen Bedingungen stattfinden, und zweitens müssen die äussersten Lichtkegel noch zur Hälfte durch das Ocular in's Auge dringen, damit der Rand des Gesichtsfeldes noch halbe Helligkeit erhält. Diese zweite Bedingung wird erfüllt, wenn der von dem Rande des Gesichtsfeldes kommende Hauptstrahl (Q m Q') die zweite Linse in einem Abstande y' und die dritte in dem Abstande η von der Axe trifft, d. h. wenn sich verhält: $y' : \eta = b : (c_1 - b)$, oder wenn

$$\eta = (c_1 - b)\,\frac{y'}{b} = c_1\,\frac{y'}{b} - y' \quad \ldots\ldots \quad (66)$$

ist. Das Verhältniss von $y' : b$ ist offenbar die scheinbare Grösse des vom Punkte o' durch die Collectivlinse gesehenen Bildes von dem Gegenstande in seiner grössten Höhe über der Instrumentenaxe; bezeichnen wir dieselbe wie in Nr. 49 mit φ'', so wird

$$\eta = (c_1 - b)\,\varphi'' = c_1\,\varphi'' - y' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

Ferner bestimmt der Winkel m' m u die Grösse des Gesichtsfeldes φ' im Instrumente; es ist daher $c\,\varphi' = y'$ und folglich, wenn man diesen Werth von y' in die letzte Gleichung einsetzt:

$$\eta = c_1\,\varphi'' - c\,\varphi' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

Die scheinbare Grösse des durch die Ocularlinse gesehenen letzten Bildes ist, wenn o den Augenpunkt bezeichnet, gleich

$$\varphi_0 = \frac{(u'\,m'')}{(o\;m'')} = \frac{\eta}{d_1}\,.$$

Setzt man hierin für d_1 den Werth aus Gleichung (59) und berücksichtigt, dass sich nach Gleichung (66) $\eta : (c_1 - b) = y' : b$ verhält, so kommt:

$$\varphi_0 = \frac{\eta}{f_1} - \frac{\eta}{c_1 - b} = \frac{\eta}{f_1} - \frac{y}{b};$$

und wenn man die Reciproke von B aus Gleichung (59) und den Werth von y' aus (68) nimmt, so wird

$$\varphi_0 = \frac{\eta}{f_1} - \frac{y'}{f_0} + \frac{y'}{c} = \frac{\eta}{f_1} - \frac{y'}{f_0} + \varphi' \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Will man dem Ausdrucke für φ_0 eine bessere Form geben, so setze man, wie früher schon in ähnlicher Weise geschehen ist, das Verhältniss $\eta : f_1 = \omega_1$ und $y' : f_0 = \omega_0$: dann wird

$$\varphi_0 = \omega_1 - \omega_0 + \varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

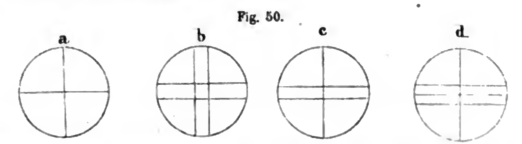
Da das Verhältniss $\varphi_0 : \varphi'$ die Vergrösserung v_{11}, also $\varphi_0 = v_{11}\,\varphi'$ ist, so folgt aus der letzten Gleichung, nach Einführung dieses Werthes von φ_0:

$$\varphi_0 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{v_{11} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Soll unter übrigens gleichen Umständen das Fernrohr mit Doppelocular dasselbe Gesichtsfeld haben wie das einfache Fernrohr ohne Collectivlinse, so muss $\varphi_0 = \varphi'$ oder nach Gleichung (69) $f_0\,\eta = f_1\,y'$ seyn, d. h. es müssen sich die Brennweiten der beiden Ocularlinsen wie ihre wirksamen Oeffnungen verhalten.

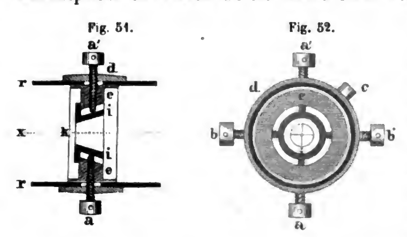
§. 62. **Das Fadenkreuz.** Zu Messungen ist das astronomische Fernrohr erst dann geeignet, wenn es eine Vorrichtung besitzt, wodurch das Zielen nach einer bestimmten Richtung möglich wird; denn bis jetzt sind in dem Kegelraume des Gesichtsfeldes unendlich viele Ziel- oder Visirlinien und folglich bei Betrachtung eines Punktes eben so viele Lagen des Fernrohrs möglich. Die Vorrichtung, welche eine sichere Absehlinie gewährt, indem sie einen bestimmten Punkt des Gesichtsfeldes bezeichnet, heisst das Fadenkreuz, weil sie dem Wesen nach aus zwei sich kreuzenden feinen Fäden besteht. Der Schnitt dieser Kreuzfäden gibt den eben genannten bestimmten Punkt des Gesichtsfeldes und seine Verbindung mit dem optischen Mittelpunkte des Objectivs die Absehlinie an. Will man in einem Fernrohre mehr als eine solche Linie haben, so müssen durch eine hinreichende Anzahl Fäden eben so viele Kreuzungspunkte hergestellt werden, als man Visirlinien braucht. Die gebräuchlichsten Formen der Fadenkreuze sind in Fig. 50 abgebildet und es ist hiezu nur zu bemerken, dass die mit b bezeichnete Anordnung der Fäden in den Fällen angewendet wird, wo es sich darum handelt, nicht einen einzigen Punkt, sondern eine kleine Fläche in der Mitte des Gesichtsfeldes zu betrachten.

Fig. 50.



Die Linien des Fadenkreuzes sind entweder sehr zarte Spinnweben oder noch feinere Platinadrähte, die man sich dadurch verschafft: dass man um

einen dünnen Platinadraht einen Cylinder von Silber giesst und die Verbindung selbst zu einem sehr feinen Drahte auszieht. Löset man dessen Silberschichte in Salpetersäure auf, so bleibt der gesuchte Platinadraht übrig. Die Kreuzfäden werden auf die flache Seite eines Metallrings gespannt, der mit der Ocularröhre so verbunden ist, dass er sowohl längs der mechanischen Axe des Fernrohrs als senkrecht darauf bewegt werden kann. Die Bewegung nach der Axe des Fernrohrs ist nöthig, damit das Fadenkreuz an die Stelle vor dem Ocular gebracht werden kann, in welcher es hinter demselben deutlich gesehen wird; und die Seitenbewegung dient dazu, den Durchschnittspunkt der Fäden an die rechte Stelle des Gesichtsfeldes zu bringen.



Die Figuren 51 und 52 zeigen die einfachste Einrichtung eines Fadenkreuzes: die erste ist ein Schnitt dieser Vorrichtung längs der Fernrohraxe, und die zweite ein senkrechter Querschnitt der Ocularröhre hinter dem Fadenkreuze. In beiden Figuren bedeutet r, r den Schnitt der Ocularröhre und i, i den Ring, auf dessen ebene gegen x gerichtete Fläche das Fadenkreuz k aufgeklebt ist. Die vier Stellschräubchen a, a', b, b', welche in einem zweiten in der Röhre verschiebbaren Ringe e, e ihre Muttern haben, halten den Ring i, i durch ihre Fusspunkte fest, sowie sie auch zu dessen Verschiebung gegen die Axe nach den Richtungen aa', a'a und bb', b'b dienen, wobei man stets nur die eine Schraube rück- und die andere vorwärts zu drehen braucht. Die Verstellung des Fadenkreuzes längs der Fernrohraxe geschieht, indem man nach Lüftung des Schräubchens c, welches den Ring d mit der Ocularröhre verbindet, diesen Ring und was mit ihm durch die Stellschräubchen verbunden ist, durch einen sanften Druck mit den Fingern längs der (in der Zeichnung weiss gelassenen) Schlitze vor- oder rückwärts bewegt, und hierauf das Schräubchen c wieder anzieht.

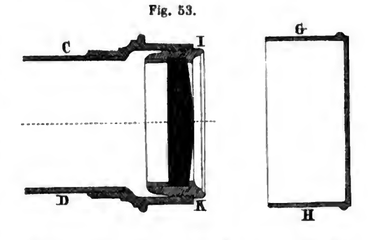
Andere Einrichtungen des Fadenkreuzes werden mit den Instrumenten, an denen sie vorkommen, beschrieben werden.

§. 63. **Das ganze Fernrohr.** Nach den vorausgegangenen Betrachtungen über die Einrichtung und Wirkungsweise der einzelnen Theile eines Fernrohrs kann die Beschreibung der Gesammteinrichtung sehr kurz gegeben werden. Wir legen derselben das Fernrohr zu Grunde, welches bei den kleinen Ertel'schen Nivellirinstrumenten Anwendung findet und theilen nachfolgend zwei Schnitte desselben in natürlicher Grösse mit.

Der erste Schnitt stellt einen Theil der Objectivröhre (CD) mit dem achromatischen Objective (O), dessen Fassung (IK) und der Kapsel (GH), welche nach dem Gebrauche des Fernrohrs das Objectiv deckt, vor. Das

Objectiv hat 10 Pariser Linien Oeffnung und eben so viel Zoll Brennweite. Die Objectivröhre ist ein messingener Cylinder, der an zwei 5 Zoll von einander entfernten Stellen von genau abgedrehten kupfernen Ringen umgeben ist. Diese Ringe haben ganz gleiche Durchmesser und ihre Mittelpunkte bestimmen die mechanische Axe

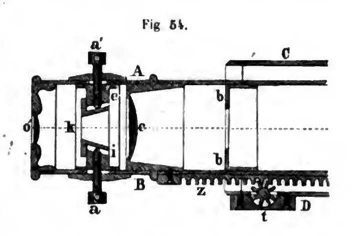
Fig. 53.



des Fernrohrs, welches mit den Oberflächen dieser Ringe in einem cylindrischen oder y förmigen Lager ruht.

Der zweite Schnitt stellt die Ocularröhre (A B) mit ihrem Inhalte und ihrer Verbindung mit der Objectivröhre (C D) dar. Jene Röhre lässt sich in dieser mit Hülfe des gezähnten Stängchens z und des Getriebes t, das von der Seite aus gedreht werden kann, vor- und rückwärts bewegen, um das Fadenkreuz k in die Bildebene des Collectivs zu bringen. Wird

Fig 54.



das Fadenkreuz durch das planconvexe Ocular o' deutlich gesehen, so ist dasselbe auch mit dem in seiner Ebene befindlichen Bilde der Fall. Die Brennweite des Oculars beträgt 0'',32 und die der Collectivlinse c, welche in der Brennweite des Objectivs steht und vom Oculare 0'',64 entfernt ist, 0'',92. Diese auf einander folgenden Abmessungen verhalten sich folglich sehr nahe wie 1 : 2 : 3. Erfahrungsgemäss vergrössert dieses Fernrohr 19 bis 20mal, und damit stimmt die zwanzigmalige Vergrösserung, welche die Formel (58) in Verbindung mit Nr. 53 liefert, nahe genug überein.

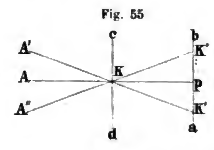
Durch die Blenden b, b, wovon sich auch einige in der Objectivröhre befinden, werden die Randstrahlen von der Collectivlinse c abgehalten; nebenbei dient auch der Ring i des Fadenkreuzes als Blende. Zur Verhinderung störender Spiegelungen sind die inneren Wände der Objectiv- und Ocularröhre schwarz angestrichen.

§. 64. **Parallaxe des Fadenkreuzes.** Es ist bereits bemerkt worden, dass man das Fadenkreuz und das vom Objectiv erzeugte Bild nur dann gleichzeitig deutlich sieht, wenn beide in einer Ebene liegen und diese den rechten Abstand vom Oculare hat. Dieser Abstand ergibt sich aber, wenn man das Fernrohr gegen die freie Luft oder eine weit entfernte weisse Wand richtet und das Fadenkreuz so lange verschiebt, bis seine Fäden als reine schwarze Linien erscheinen. Hat somit das Fadenkreuz die rechte

Entfernung, so ist es bei jeder Beobachtung mit dem Fernrohre nöthig, durch Verstellen der Ocularröhre die Bildfläche in die Ebene des Fadenkreuzes zu bringen. Das Zusammenfallen beider Ebenen erkennt man aber an der scheinbaren Deutlichkeit des abgebildeten Gegenstandes noch nicht zuverlässig genug, weil das Auge in der Schätzung der Deutlichkeit Schwankungen unterworfen ist: man kann Fadenkreuz und Bild zugleich deutlich zu sehen glauben, während dieses doch etwas vor oder hinter jenem liegt. Das einzige sichere Merkmal von der Deckung der Kreuz- und Bildfläche ist, dass der Schnittpunkt des Fadenkreuzes stets einen und denselben Punkt des Bildes deckt, wie man auch das Auge vor dem Oculare bewegen mag. Liegen dagegen Bild und Fadenkreuz in verschiedenen Ebenen, so deckt der Kreuzpunkt bei jeder veränderten Stellung des Auges einen andern Punkt des Bildes und folglich auch des Gegenstandes. Hieraus entspringt aber eine Ungenauigkeit in der Einstellung des Fernrohrs auf einen bestimmten Punkt, oder in der Ablesung durch dasselbe auf einer eingetheilten Latte, mit andern Worten: ein Messungsfehler.

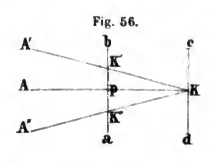
Man nennt die Abweichung der Bildfläche von der Ebene des Fadenkreuzes dessen P a r a l l a x e und kann dieselbe leicht durch Verstellen der Ocularröhre beseitigen. Ob diese Röhre vor- oder rückwärts zu stellen ist, ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Fig. 55



Steht das Fadenkreuz (cd) wie in Fig. 55 v o r der Bildebene (ab) und ist A die Stellung des Auges, in welcher der Kreuzungspunkt k den Bildpunkt p deckt, so wird derselbe Kreuzpunkt in der Stellung A′ des Auges den Punkt k′ und wenn das Auge sich in A″ befindet, den Punkt k″ decken. Da man die Projectionen k′ und k″ des Fadenkreuzes auf die Bildebene ab in der Einbildung als feststehende Punkte ansieht, so scheint sich der Bildpunkt p in dem ersten Falle von dem Punkte k′ weg in der Richtung k′p, und in dem zweiten Falle von dem Punkte k″ weg in der Richtung k″p bewegt zu haben. Diese scheinbaren Bewegungen gehen demnach in denselben Richtungen vor sich, in denen sich das Auge bewegt, und man bezeichnet dieses durch den Ausdruck: „das Bild geht mit dem Auge."

Fig. 56.



Steht dagegen das Fadenkreuz (cd) wie in Fig. 56 h i n t e r der Bildebene (ab) und deckt für eine beliebige Stellung A des Auges der Kreuzpunkt k den Bildpunkt p, so wird für eine zweite Stellung A′ des Auges der Kreuzpunkt p den Bildpunkt k′, und für eine dritte Stellung A″ derselbe Punkt p den Bildpunkt k″ decken. Aus der vorhin angegebenen Ursache scheint sich während der Bewegung des Auges von A nach A′ der Bildpunkt p von k′ nach p, und während der Bewegung des Auges von A nach A″ derselbe Punkt p

von k" nach p bewegt zu haben. Da diese Richtungen denen der Augenbewegungen entgegengesetzt sind, so sagt man: „das Bild bewegt sich gegen das Auge."

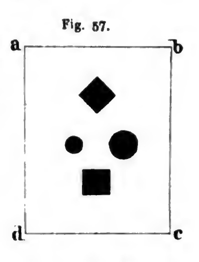
Fasst man die eben gewonnenen Ergebnisse zusammen, so ergibt sich für das Wegschaffen der Parallaxe des Fadenkreuzes folgende Regel: Je nachdem sich das Bild mit dem Auge oder gegen dasselbe bewegt, ist das Fadenkreuz dem Objectiv zu nähern oder von ihm zu entfernen.

§. 65. **Prüfung des Fernrohrs.** Die Forderungen, welche man an ein gutes Messfernrohr stellt, sind folgende: Aehnlichkeit und Deutlichkeit der Bilder, hinreichende Vergrösserung, scharfe Centrirung des Objectives und richtige Lage des Fadenkreuzes.

Will man ein Fernrohr auf seine Deutlichkeit prüfen, so verfährt man nach Fraunhofer am besten in folgender Weise.

Man zeichne auf eine weisse Tafel (Fig. 57) einige regelmässige schwarze Figuren, etwa Quadrate und Kreise von $^1/_2$ bis $1^1/_2$ Zoll Durchmesser und stelle diese Tafel in einer Entfernung von 150 bis 250 Fuss vor dem zu prüfenden Fernrohre so auf, dass sie gut beleuchtet ist. Zeigt das Fernrohr bei richtiger Stellung des Oculars (d. h. nach Entfernung der Parallaxe) diese Figuren nicht durchgängig gleich schwarz, sondern an den Rändern grau; oder verändert es ihre regelmässige Gestalt durch Verlängerung der einen oder anderen Richtung; oder erscheinen die Grenzen der Figuren mit einem farbigen Saume von roth, gelb und grün: so ist das Fernrohr mit Mängeln behaftet, die es nicht haben soll. Erscheinen dagegen die Figuren durchgehends gleich schwarz und unverzerrt, und ist an deren Rändern nur ein schwacher bläulicher Saum bemerkbar, so lässt das Fernrohr in Beziehung auf Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig. Eine blaue Färbung am Rande zeigen sogar die bessten Fernrohre von Fraunhofer, weil bei Berechnung ihrer Objective die dunkelblauen und violetten Strahlen gar nicht berücksichtigt wurden, um die übrigen desto besser zu vereinigen.

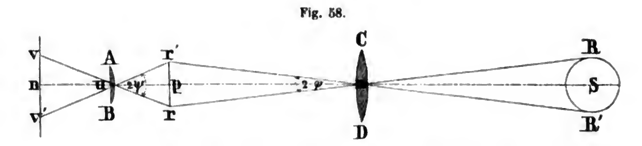
Fig. 57.



Was die Vergrösserung des Fernrohrs betrifft, so ist bereits im §. 53 angeführt worden, wie man dieselbe durch Versuch bestimmen kann, wenn die Brennweiten des Objectivs, des Oculars und der Collectivlinse nicht bekannt sind. Ein von jenem verschiedenes Verfahren, die Vergrösserung zu finden, ist das, welches Valz vorgeschlagen hat. Es besteht im Allgemeinen darin, dass man den Sehwinkel der Sonne mit demjenigen Winkel vergleicht, unter welchem die von dem Sonnenrande kommenden Strahlen aus dem Ocular des Fernrohrs treten.

Stellt in Fig. 58 die Scheibe S die Sonne, A B das Ocular und C D das Objectiv eines auf sie gerichteten Fernrohrs vor, so werden die Randstrahlen R m, R' m der Sonne die Wege R m r u v, R' m r' u v'. machen,

Fig. 58.



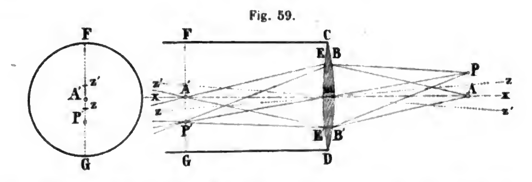
wenn r r' die Brennebene des Objectivs ist. Auf einer ebenen Fläche v v', welche in geringer aber genau bekannter Entfernung n u = e vom Ocular senkrecht zur Fernrohraxe steht, wird der Durchmesser v v' = d des Sonnenbildes gemessen. Aus d und e findet man $\operatorname{tg}\psi = \frac{d}{2e}$, während $\operatorname{tg}\varphi$ im Mittel = tg 32′ 10″ ist. Das Verhältniss von $\operatorname{tg}\psi$ zu $\operatorname{tg}\varphi$ gibt die gesuchte Vergrösserung

$$v = 53{,}5 \cdot \frac{d}{e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

Der Coefficient von d : e schwankt zwischen 52,5 und 54,5; er ist im Januar am kleinsten und im Juli am grössten; das Mittel gilt für April und Oktober.

Die vollkommene Centrirung des Objectivs, worunter das Zusammenfallen der Axe oder mindestens des optischen Mittelpunkts dieser Linse mit der mechanischen Axe der Objectivröhre zu verstehen ist, muss schon desshalb gefordert werden, weil sich ausserdem die Lage der Visirlinie bei der Drehung des Fernrohrs um seine mechanische Axe jeden Augenblick ändern würde, wodurch oft beträchtliche Messungsfehler entstehen könnten.

Fig. 59.

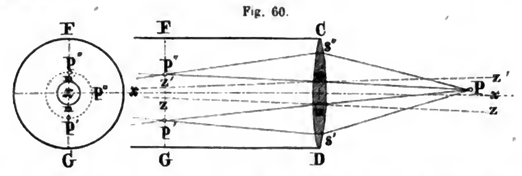


Ob eine Objectivlinse vollkommen centrirt ist, erkennt man daran, dass sich das durch sie erzeugte Bild eines entfernten Punkts nicht bewegt, wenn man das Fernrohr in einem festen Lager vorsichtig um seine mechanische Axe dreht. Denn stellt in Fig. 59 die Linie x x die mechanische Axe, m den in ihr liegenden optischen Mittelpunkt des Objectivs (C D) und P einen leuchtenden Punkt vor, so liegt dessen Bild in dem Hauptstrahle P m und in der Entfernung $A'm = a_1$, welche sich nach Gleichung (22) bestimmen lässt. Denkt man sich das Fernrohr um seine mechanische Axe x x um einen beliebigen Winkel gedreht, so bleibt doch der Punkt m stets an seiner

Stelle; und da das Bild des unbeweglichen Punktes P stets in dem Hauptstrahle P m und in der Entfernung $A' m = a_1$ von der Linse liegen muss: so ist klar, dass in dem hier angenommenen Falle, wo m in x x liegt, das Bild P′ die Drehung des Fernrohrs nicht theilt.

Man entnimmt aus der vorstehenden Figur leicht, dass es nicht durchaus nöthig ist, dass die optische Axe des Objectivs mit der mechanischen Axe seiner Röhre zusammenfalle; denn wenn auch z z die Axe der Linse wäre und diese nach einer Drehung um 180^0 in die Lage z′ z′ käme, so gäbe es doch nur eine einzige Absehlinie und ein unveränderliches Bild von P, so bald sich, wie hier vorausgesetzt wird, der optische Mittelpunkt und der Schnittpunkt des Fadenkreuzes in der Axe x x befinden. Wenn nun auch eine Abweichung beider Axen, vorausgesetzt, dass sie sich im optischen Mittelpunkt des Objectivs schneiden, der Lage der Absehlinie nicht schadet, so darf diese Abweichung aus andern Gründen doch nur äusserst gering seyn.

Fig. 60.



Ein nicht vollkommen centrirtes Objectiv gibt sich dadurch zu erkennen, dass das von ihm erzeugte Bild eines leuchtenden Punktes rotirt, wenn man das Fernrohr um seine mechanische Axe dreht. Denn ist in Fig. 60 wieder x x die mechanische Axe und P ein leuchtender Punkt, liegt aber der optische Mittelpunkt m ausserhalb der Linie x x, so wird dieser Mittelpunkt bei der Drehung des Fernrohrs einen Kreis von dem Durchmesser m m′ um die Axe x x und der von P ausgehende Hauptstrahl P m einen Kegel beschreiben, dessen Spitze P und dessen Leitlinie der Kreis m m′ ist. In dieser Kegelfläche muss somit das Bild von P sich bewegen und zwar in der elliptischen Schnittlinie P′ P″, welche die Ebene F G erzeugt, deren Abstand a_1 von der Linse sich leicht berechnen lässt.

Ist ein Objectiv nicht richtig centrirt, so kann diesen Fehler nur der Mechaniker, aber nicht der Beobachter (in so fern er nicht selbst optischer Künstler ist) berichtigen, da hiefür am Fernrohre keine Vorrichtungen angebracht sind.

Die richtige Lage des Fadenkreuzes erfordert erstens, dass es deutlich gesehen werde, und zweitens, dass sein Schnittpunkt in der mechanischen Axe liege. Die erste Forderung ist von selbst klar, und die zweite muss gemacht werden, damit bei der Drehung des Rohrs nicht verschiedene Absehlinien entstehen, was der Fall wäre, wenn sich der Schnittpunkt ausserhalb der mechanischen Axe des Fernrohrs befände.

Wie man verfährt, um das Fadenkreuz gegen das Ocular so zu stellen, dass es deutlich gesehen wird, ist bereits früher (S. 83) mitgetheilt worden: es braucht also hier nur noch von der Centrirung desselben die Rede zu seyn.

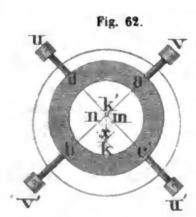
Wir setzen jetzt ein gut centrirtes Objectiv voraus. In diesem Falle wird das Bild eines anvisirten Punktes, den wir scharf begrenzt, gut beleuchtet und 100 bis 150 Fuss vom Fernrohr entfernt annehmen, stets an derselben Stelle der mit dem Fadenkreuze in einer Ebene liegenden Bildfläche verbleiben, wenn man das Fernrohr vorsichtig um seine mechanische Axe dreht. Dagegen wird der Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes, wenn er nicht in dieser Axe liegt, um dieselbe einen Kreis beschreiben; befindet er sich aber in der Fernrohraxe und ist er auf den äusseren Punkt gerichtet, so wird er diesen bei der Drehung des Rohrs fortwährend decken.

Angenommen, der Kreuzungspunkt befinde sich in k (Fig. 61) und decke dort einen bestimmten Bildpunkt, so beschreibt derselbe, wenn das Rohr um seine Axe x gedreht wird, den Kreis k k′ k, während der Bildpunkt in k bleibt. Nach einer halben Drehung des Rohrs hat das Fadenkreuz a b, c d die Lage a′ b′, c′ d′ angenommen und es steht dessen Schnittpunkt k′ von dem Bildpunkte k um den Durchmesser (k k′) des von ihm beschriebenen Kreises ab. Dieser Durchmesser ist dem doppelten Abstande (k x) des Fadenkreuzpunktes von der Axe des Fernrohrs gleich: die Verbesserung hat sich somit nur auf die Hälfte des durch k k′ angezeigten Fehlers zu erstrecken.

Fig. 10. 61

Da der Ring (Fig. 62), welcher das Fadenkreuz trägt, nicht in der Richtung k′ k, sondern nur in den Richtungen der Kreuzfäden bewegt werden kann, so muss der Faden a′ b′ um das Stück n x und der Faden c′ d′ um das Stück m x gegen die Axe bewegt werden: jenes geschieht durch Zurückdrehen des Schräubchens u′ und Vorwärtsdrehen des Schräubchens u, dieses aber durch Lüftung des Schräubchens v′ und Nachdrehen des Schräubchens v. Glaubt man den Ring genug verstellt zu haben, so wiederholt man den ersten Versuch und nöthigen Falles die Berichtigung. Es versteht sich wohl von selbst, dass es nur der Berichtigung eines Fadens bedarf, wenn der andere schon durch die Axe (x) des Fernrohrs geht.

Fig. 62.



§. 66. **Genauigkeit des Zielens.** Die mit Fadenkreuz versehenen Fernrohre gewähren die zuverlässigsten Visirlinien. Ueber die Genauigkeit derselben hat Professor Stampfer Versuche angestellt, welche im 18. Bande der Jahrbücher des Wiener polytechnischen Instituts beschrieben sind. Von diesen Versuchen haben wir bereits auf S. 27, wo von der Genauigkeit der

Diopter die Rede ist, Einiges mitgetheilt; hier folgen noch einige Ergebnisse dieser Untersuchungen, welche sich auf die Fernrohre beziehen.

a) Die Genauigkeit des Zielens mit guten achromatischen Fernrohren ist unter günstigen äusseren Umständen nahehin der Vergrösserung proportional, wenn dieselbe nicht zu stark ist und dadurch der Helligkeit Eintrag thut. Man findet den wahrscheinlichen Zielfehler eines guten und nur mässig vergrössernden Fernrohrs nahezu, wenn man den des blossen Auges oder eines Diopters, der auf 15 Sekunden anzuschlagen ist, mit der Vergrösserung des Fernrohrs dividirt.

b) Fernrohre, welche keine achromatischen Objective haben, gewähren bei schwacher Vergrösserung dieselbe Genauigkeit der Visur wie achromatische; bei stärkerer Vergrösserung nimmt aber diese Genauigkeit ab, da alsdann die störenden Einflüsse der Kugel- und Farbenabweichung mehr hervortreten. Desshalb werden, wie schon oben bemerkt, fast nur achromatische Fernrohre zu Messinstrumenten verwendet.

c) Es ist für die Genauigkeit des Visirens nicht vortheilhaft, den Fernrohren der geometrischen Instrumente grössere Objective zu geben als die nothwendige Helligkeit erfordert. Unter übrigens gleichen Umständen und namentlich bei einerlei Vergrösserung gewährt das astronomische Ocular eine grössere Schärfe des Zielens als das terrestrische.

d) An geometrischen Instrumenten haben Fernrohre mit schwachen Vergrösserungen Vorzüge vor denen mit starken Vergrösserungen; denn abgesehen davon, dass das Gesichtsfeld mit der Vergrösserung abnimmt, so vermindert sich auch die Helligkeit mit der Zunahme der Vergrösserung, während gleichzeitig der störende Einfluss der Luftbewegung auf die Schärfe der Bilder sich steigert. Es genügt, wenn die Vergrösserung des Fernrohrs der in Zollen ausgedrückten Brennweite des Objectivs gleichkommt oder höchstens doppelt so viel beträgt.

§. 67. **Praktische Bemerkungen.** Der ausübende Geometer kommt nicht selten in den Fall, an seinen Fernrohren Arbeiten vornehmen zu müssen, die sonst nur der Mechaniker macht. Dahin gehört das Einziehen von Fadenkreuzen und das Reinigen der Linsengläser. Es erscheint daher nicht überflüssig, eine kurze Anleitung dazu hier beizufügen.

Das Einziehen von Kreuzfäden setzt einen Vorrath von guten Spinnenfäden voraus. Die bessten liefert die kurzbeinige schwarze Spinne, welche sich fast überall findet. Setzt man dieselbe auf den einen Zweig eines gabelförmigen Reisigs und lässt sie bald darauf abfallen, so spinnt sie einen sehr feinen Faden, den man durch Umdrehen der Gabel aufhaspeln kann. Diejenigen ausgespannten Stücke, welche durch eine Lupe als die feinsten und gleichförmigsten erscheinen, entsprechen dem vorliegenden Zwecke, wenn sie sofort verwendet und vor Staubanflug geschützt werden.

Ist man im Besitze geeigneter Fäden, so nimmt man den Ring, der das Fadenkreuz trägt, vorsichtig aus der Ocularröhre, reinigt die Vorderfläche desselben, welche zur Aufnahme des Fadenkreuzes bestimmt ist, von

Schmutz und stellt ihn, mit der Vorderfläche nach oben, auf eine feste Unterlage, die nicht breiter ist als er selbst. Nun klebt man an die Enden eines ausgewählten Stückes Spinnfaden zwei kleine Bleistückchen, macht den Faden etwas feucht und legt ihn so über die gereinigte Fläche des Rings, dass er in der Richtung zweier Ritzen, welche die ihm zu gebende Lage bezeichnen, durch die herabhängenden Gewichte angespannt wird.

Eben so verfährt man mit dem zweiten Faden. Hierauf untersucht man mit der Lupe, ob die Fäden genau in den Ritzen liegen, und bringt sie, wenn es nicht der Fall seyn sollte, durch Verschiebung mit einer Nadel hinein. Alsdann betupft man die auf dem Ring liegenden Stellen der Kreuzfäden mit gutem Kopalfirniss, ohne dabei die Kante der Blendenöffnung zu berühren, und schneidet endlich, wenn der Firniss trocken geworden ist, die Bleistückchen von den Fäden in passender Entfernung ab. Damit die feinen Spinnfäden beim Aufziehen gut gesehen werden können, ist es zwar nicht nöthig aber gut, dass die Unterlage des Rings eine schwarze Oberfläche habe.

Zur Reinigung der Objective hat Fraunhofer in dem 3. Bande der astronomischen Nachrichten von Schumacher Anleitung gegeben. Es wird darin auch gezeigt, wie man ein achromatisches Objectiv behufs der Reinigung zerlegt und wieder zusammensetzt. Die richtige Zusammensetzung erfordert aber schon kunstgeübte Hände, so dass es für den, der kein praktischer Optiker ist, gerathener erscheint, sich mit der Zerlegung der Objective nicht zu befassen, um die inneren Linsenflächen zu reinigen, sondern sich mit der Reinigung der beiden äusseren Flächen des Objectivs und der übrigen einfachen Linsen um so mehr zu begnügen, als diese Reinigung für die meisten Fälle ausreicht.

Aus den Figuren 53 und 54 ersieht man, dass sich sowohl das achromatische Objectiv als das einfache Ocular und die Collectivlinse mit ihren Fassungen von den betreffenden Röhren leicht abschrauben lassen, und dass man den Aussenflächen beikommen kann, ohne die Linsen aus der Fassung zu nehmen. Nach diesem Abschrauben werden die Linsenflächen zuerst mit Weingeist und einem feinen leinenen Tuch und hierauf mit einem in Kreidewasser gewaschenen und wieder getrockneten Leinenlappen geputzt. Der Kreide wegen staubt dieser Lappen etwas, aber gerade dieser Staub nimmt den Schmutz am sichersten weg. Glaubt man denselben hinreichend beseitigt zu haben, so kehrt man die Gläser mit einem feinen Haarpinsel vorsichtig ab und setzt sie wieder in das Rohr ein. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass man während dieser Reinigung das Fadenkreuz so aufbewahren muss, dass es vor allem Staubanflug geschützt ist.

E. Mittel zur Messung sehr kleiner Linien und Winkel.

§. 68. Sehr genaue Messungen erfordern, dass gerade Linien und Kreisbögen bis auf kleine Grössen sicher bestimmt werden, welche für das

unbewaffnete Auge ganz und gar verschwinden. Solche Grössen kann man nicht mehr unmittelbar messen, weil sich der anzuwendende Massstab nicht so fein theilen lässt als hiezu nöthig wäre. Es gibt aber mehrere Vorrichtungen, durch welche dergleichen fast verschwindende Grössen noch mittelbar bestimmt werden können. Zu diesen Hilfsmitteln gehören die Nonien, die Mikrometerschrauben und die Messkeile. Auch die Röhrenlibellen könnte man hierher rechnen, insoferne es sich um Bestimmung äusserst kleiner Vertikalwinkel handelt. Da aber diese Verwendung der Libellen bloss als ein Nebenzweck derselben zu betrachten ist, so haben wir es hier nur mit den eben genannten drei Bestandtheilen der Messinstrumente zu thun.

Der Nonius oder Werner.

§. 69. **Namen.** Der *Nonius* ist ein an einem grösseren Massstabe verschiebbares kleines Massstäbchen, welches so getheilt ist, dass n Theile desselben entweder n + 1 oder n — 1 Theile des grösseren Massstabes umfassen. Mit diesem Massstäbchen, dessen getheilter Rand wie der des Massstabes entweder geradlinig oder kreisförmig ist, kann man sehr kleine Stückchen von geraden Linien und Kreisbögen und folglich auch sehr kleine Winkel messen, da Kreisbögen das Mass der Winkel sind.

Der Name „Nonius“ schreibt sich von dem Portugiesen Pero Nunez (Petrus Nonius) her, welcher im Jahre 1492 ein Verfahren zur Messung kleiner Winkel angab, das später den niederländischen Schlosshauptmann Peter Werner veranlasste, dem Nonius die Gestalt zu geben, welche soeben erklärt wurde und nunmehr näher betrachtet werden soll. In Deutschland ist für den Nonius wohl auch der Name „Werner“ im Gebrauche; häufiger aber nennt man ihn „Vernier“, weil sich der genannte Erfinder in seiner im Jahre 1631 zu Brüssel erschienenen und französisch geschriebenen Abhandlung über den Nonius *Pierre Vernier* unterzeichnete.

Nach der vorausgehenden Erklärung gibt es zwei Arten von gerad- und krummlinigen Nonien. Bei der ersten Art, wo die Länge von n + 1 Theilen des Massstabes in n Theile getheilt wird, ist ein Noniustheil offenbar grösser als ein Massstabtheil: denkt man sich nun die Theile auf dem gemeinschaftlichen Rande beider Massstäbe von einer und derselben Stelle ausgehend, so wird irgend ein Theilstrich des Nonius über dem gleichvielten des Massstabes hinausliegen, und aus diesem Grunde nennt man einen solchen Nonius einen *vortragenden*. Bei der zweiten Art von Nonien, wo n Noniustheile n — 1 Massstabtheilen gleich sind, ist ein Theil des Nonius kleiner als ein Massstabtheil: es bleibt folglich jeder Noniustheil gegen den gleichvielten Massstabtheil zurück, wesshalb ein solcher Nonius ein *nachtragender* heisst. Den Unterschied zwischen einem Massstab- und Noniustheil nennt man die *Angabe des Nonius*, ohne Rücksicht darauf, ob der Nonius vor- oder nachtragend ist.

§. 70. **Der nachtragende Nonius.** Je nachdem der Massstab einen

geraden oder kreisförmigen getheilten Rand hat, muss auch der Rand des Nonius gerade oder kreisförmig seyn und sich genau an den Massstab anschliessen. Da n jede ganze Zahl vorstellt, so ist es offenbar gleich, ob man den nachtragenden Nonius dadurch entstehen lässt, dass man die Länge von n — 1 Theilen des Massstabs auf ihm in n Theile theilt, oder dadurch, dass man sich n Theile des Massstabes in n + 1 Noniustheile zerlegt denkt.

Nimmt man aber die erstere Entstehungsweise an und bezeichnet mit l die Länge eines Massstabtheiles und mit l' die Länge eines Noniustheiles, so ist

$$l' = \frac{(n-1)\,l}{n} = l - \frac{l}{n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

d. h. die Länge eines Noniustheiles ist um den nten Theil eines Massstabtheiles kleiner als dieser. Es wird demnach die Angabe des Nonius

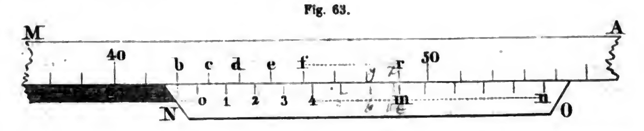
$$a = l - l' = \frac{l}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

gleich dem nten Theile eines Massstabtheiles, und der Unterschied zwischen m Theilen des Massstabs und gleichviel Noniustheilen

$$u = m a = m \cdot \frac{l}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

gleich der mfachen Angabe des Nonius.

Fig. 63.



Trifft in Fig. 63, worin die Theilstriche des Nonius (N O) in derselben Richtung wie die des Massstabes (M A) d. h. von links nach rechts gezählt sind, der mte Theilstrich des letzteren mit irgend einem Theilstriche (r) des Massstabs zusammen, so umfasst die Strecke des Nonius von m bis 0 im Ganzen m Noniustheile und die Strecke des Massstabes von r bis b im Ganzen m Massstabtheile; folglich ist nach Gleichung (75) der Abstand b0 = ma. Dieser Abstand ist es aber gerade, der durch den Nonius gemessen werden soll, und desshalb lässt sich für diese Messung die Regel aufstellen: Der Nonius gibt den Abstand seines Nullpunkts von dem nächst vorhergehenden Theilstrich des Massstabs an, wenn man den Theilstrich des Nonius aufsucht, der mit einem des Massstabs zusammenfällt, und die ihm zukommende Zahl mit der Angabe multiplicirt.

Stellen z. B. die Theile des Massstabes M in Fig. 63 Linien vor und sind 11 solcher Theile 12 Noniustheilen gleich, so ist die Angabe des Nonius $a = \frac{1}{12}$ Linie. Soll die Länge des Gegenstandes g, welcher mit seinen

beiden Enden an den Nullpunkten des Massstabs und des Nonius steht, gemessen werden, so kann man bis b die Länge unmittelbar auf dem Massstabe $= L = 42$ Linien ablesen und den Rest (bo) durch den Nonius bestimmen. Trifft der mit 7 bezeichnete Theilstrich des Nonius mit einem des Massstabs zusammen, so ist die Länge des Stücks $bo = u = {}^7/_{12}$ Linien. Fügt man diese Länge zur unmittelbar abgelesenen Grösse L, so ist für den angezeigten Stand des Nonius die Gesammtablesung vollendet und gleich $L + u = 42''' + {}^7/_{12}''' = 42{,}583$ Linien.

Die Voraussetzung, dass zwei Theilstriche des Nonius und des Massstabes zusammentreffen (coincidiren), wird nicht immer erfüllt; es fragt sich dann, wie in einem solchen Falle der Abstand (bo) des Noniusnullpunktes von dem vorhergehenden Theilstriche des Massstabes zu bestimmen ist.

In diesem Falle wird man aber immer einen Noniustheil finden, der ganz und gar von einem Massstabtheile eingeschlossen ist. Wir wollen annehmen, es sey der Theil zwischen den mit m und $m + 1$ bezeichneten Theilstrichen, und es habe der mte Theilstrich des Nonius von dem nächst vorhergehenden des Massstabes die Entfernung x. Denkt man sich für einen Augenblick den Nonius so weit zurückgeschoben, dass der mte Theilstrich trifft, so ist die Ablesung ma offenbar um das Stück x kleiner als die Länge bo fordert; umgekehrt also ist die gesuchte Länge

$$u' = u + x = ma + x.$$

Man findet aber x auf folgende Weise durch Schätzung. Vergleicht man den Abstand x am mten Theilstriche mit dem Abstande y am $(m + 1)$ten Striche nach dem Augenmasse, und zeigt sich, dass das Verhältniss beider $= v : w$ ist, so hat man zur Bestimmung von x, da $y = a - x$ ist, die Gleichung:

$$x = \frac{v}{w}\, y = \frac{v}{w}\,(a - x),$$

woraus die gesuchte Grösse

$$x = \frac{v}{v + w}\, a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

folgt. Man macht die Schätzung gewöhnlich so, dass $v + w = 10$ wird, d. h. man drückt x in Zehnteln der Angabe aus. Setzt man diesen Werth von x in die vorletzte Gleichung, so wird

$$u' = (m + 0{,}1\, v)\, a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Würde in dem vorigen Beispiele der Theilstrich 7 nicht getroffen haben und der 8te Noniustheil zwischen einem des Massstabes liegen, so zwar, dass der Abstand x des Theilstrichs 7 sich zu dem Abstand y des Theilstrichs 8 wie 2 zu 8 verhielte, so wäre hier $v = 2$, folglich $x = 0{,}2\, a$ und somit $u' = 7{,}2\, a = 0{,}6$ Linien.

§. 71. **Der vortragende Nonius.** Der v o r t r a g e n d e N o n i u s entsteht, wenn entweder auf ihm die Länge von $n + 1$ Theilen des Massstabes in n gleiche Theile zerlegt wird, oder wenn $n - 1$ Theile des Nonius zusammengenommen n Theilen des Massstabes gleich gemacht werden.

Wir nehmen hier wieder die erstere Entstehungsweise an und bezeichnen

die Länge eines Massstabtheiles mit l und die eines Noniustheiles mit l'. Es ist dann offenbar

$$l' = \frac{(n+1)\,l}{n} = l + \frac{l}{n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

d. h. die Länge eines Noniustheiles ist um den nten Theil eines Massstabtheiles grösser als dieser. Ferner ist die Angabe des Nonius

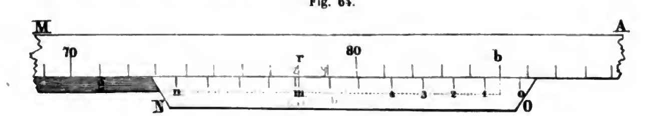
$$a = l - l' = -\frac{l}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

gleich dem nten Theile eines Massstabtheiles. Das Vorzeichen deutet an, dass $l' > l$ ist. Hieraus ergiebt sich der Unterschied zwischen gleichviel Massstab- und Noniustheilen:

$$u = m\,a = -m\,.\,\frac{l}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

gleich der mfachen Angabe des Nonius.

Fig. 64.



Die vortragenden Nonien beziffert man, aus einem Grunde, der sogleich klar werden wird, in der Richtung von rechts nach links, also der des Massstabs entgegengesetzt. Ist durch einen Massstab mit Nonius von der vorstehenden Einrichtung die Länge des Gegenstandes g zu messen, dessen eines (linkes) Ende am Nullpunkte des Massstabes anliegt, während das andere bis an den Nullpunkt des Nonius reicht: so liest man zuerst wieder an dem zunächst vor dem Nullpunkt des Nonius liegenden Theilstrich (b) die Länge L unmittelbar ab und vermehrt hierauf dieselbe um das Stückchen bo, welches für den Fall, dass der Theilstrich m trifft, die Grösse m a hat: die ganze Länge ist folglich L + m a. Man entnimmt hieraus, dass bei der oben angegebenen Bezifferungsweise für den vortragenden Nonius dieselbe Ablesregel gilt, welche vorhin für den nachtragenden aufgestellt wurde. (Vergl. S. 92.)

Diese Behauptung bleibt auch in dem Falle wahr, dass keine zwei Theilstriche sich decken. Ereignet sich dieser Fall, so muss nothwendig ein Massstabtheil von einem Noniustheil auf zwei Seiten eingeschlossen seyn. Befindet sich der Massstabtheil zwischen den Theilstrichen m und m + 1 des Nonius und steht der mte Strich um das Stückchen x von dem nächst vorhergehenden Theilstrich auf dem Massstabe ab, so denke man sich den Nonius in der Richtung seiner Bezifferung (also von rechts nach links) so weit vorgeschoben, dass der mte Theilstrich trifft, alsdann ist die Ablesung L + m a um das Stückchen x zu klein. Dieses findet man aber wieder wie früher durch Vergleichung mit dem linkseitigen Abstande y des (m + 1)ten Noniusstriches von dem nächstgelegenen Massstabstriche. Verhält sich x : y

$= v : w$, so findet man, da $x + y = a$ und folglich $y = a - x$ ist, für x denselben Ausdruck wie in Gleichung (76); und wenn man die Schätzung des Verhältnisses $v : w$ nach Zehnteln von a macht, so ist schliesslich die Vermehrung der Grösse L wie in Gleichung (77) $= u' \doteq (m + 0{,}1\ v)\ a$.

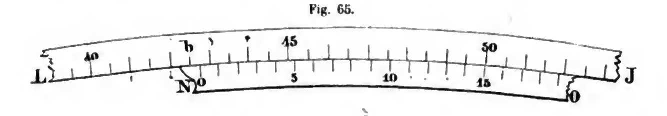
§. 72. **Ablesung und Uebertheilung.** Feine Nonien haben sehr viele und nahestehende Theilstriche, welche durch Lupen vergrössert werden. Damit man nicht lange nach der Stelle zu suchen hat, wo das Zusammentreffen zweier Theilstriche stattfindet, so beobachte man den Stand des Noniusnullpunktes zwischen den ihn begrenzenden Theilstrichen des Massstabes: liegt dieser Nullpunkt näher an dem vorhergehenden Theilstrich als an dem folgenden, so liegt der Treffpunkt in der ersten Hälfte, ausserdem aber in der zweiten Hälfte des Nonius. Es ist auch nicht schwer, in dieser Weise das Viertel zu bestimmen, in dem das Zusammenfallen zweier Striche stattfinden muss. Das Zählen der Striche wird durch Punkte und Ziffern erleichtert, welche auf der Theilung angebracht sind und grössere Masseinheiten, als die der Noniusangaben sind, vorstellen. Ist z. B. die Angabe a = 10 Sekunden, so befindet sich über dem 6, 18, 30, 42 ... sten Theilstrich ein Punkt und über dem 12, 24, 36, 48 ... sten Strich stehen die Ziffern 2, 4, 6, 8 ..., welche ebenso vielen Minuten entsprechen.

Hat man zwei Theilstriche aufgefunden, von denen man glaubt, dass sie zusammenfallen, so untersucht man noch, ob zu beiden Seiten des vermutheten Treffpunktes zwischen den gleichvielten Theilstrichen gleiche Unterschiede (a, 2a, 3a ....) auftreten; ist dieses der Fall, so stehen sich jene zwei Striche genau gegenüber, ausserdem haben die nächstgelegenen links oder rechts diese Eigenschaft. Dieser Prüfung wegen, welche zur Vermeidung einer fehlererzeugenden Parallaxe des Auges immer nöthig ist und wobei man möglichst senkrecht auf die getheilten Flächen sehen soll, findet man auf den Nonien immer noch einige Theilstriche vor 0 und hinter n angegeben. Diese Striche heissen Ueberstriche und ihre Gesammtheit nennt man die Uebertheilung (Excedenz).

§. 73. **Einige Beispiele.** Obwohl die Theorie und der Gebrauch des Nonius sehr einfach ist, so lehrt doch die tägliche Erfahrung, dass sich Anfänger in dessen Handhabung leicht verwirren, wesshalb zur weiteren Erläuterung dieses wichtigen Bestandtheils der meisten Messinstrumente einige Beispiele folgen.

1) Ein Kreisrand (Limbus, L) ist bis auf halbe Grade getheilt und 29 derselben geben auf dem Nonius (N) 30 Theile. Welches ist die Angabe des Nonius, und welches die Ablesung in der beigedruckten Figur?

Fig. 65.



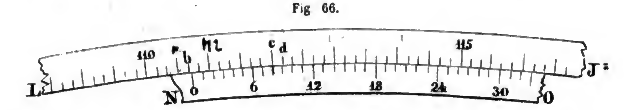
Hier ist $l = \frac{1}{2}^0 = 30'$ und $n = 30$, folglich nach Gleichung (74) die Angabe $a = 1$ Minute. Ferner ist die unmittelbare Ablesung auf dem Kreisrande bis zu dem Punkte $b = 42^0\, 30'$ und das Stückchen $b0 = ma = 13$ Minuten, da der Theilstrich 13 trifft, folglich die gesammte Ablesung $= 42^0\, 43'$.

2) Wie müsste für den vorhergehenden Kreisrand ein Nonius eingerichtet werden, der statt einer ganzen Minute eine halbe zur Angabe hätte?

Die Antwort auf diese Frage folgt aus Gleichung (74) oder (79), je nachdem der Nonius ein nach- oder vortragender werden soll. In beiden Fällen ist $a = 30$ Sekunden und $l = 30$ Minuten $= 1800$ Sekunden gegeben. Daher wird $n = 60$, und es sind folglich auf dem nachtragenden Nonius 59 Limbustheile in 60, und auf dem vortragenden Nonius 61 Limbustheile ebenfalls in 60 Theile zu theilen.

3) Welches ist die Ablesung in der beigedruckten Figur (66), wenn der Kreis bis zu Sechstelgraden getheilt ist und die Angabe des Nonius 10 Sekunden beträgt?

Fig 66.



Bis zu dem Theilstriche b auf dem Kreise ist die unmittelbare Ablesung $L = 110^0\, 40'$. Von allen Theilstrichen des Nonius fällt keiner ganz genau mit einem des Limbus zusammen, aber der Noniustheil von 8 auf 9 ist von einem Limbustheil eingeschlossen. Liest man vorläufig bis 8 ab, so erhält man $u = 8 \,.\, 10'' = 80'' = 1'\, 20''$; und schätzt man nun $(c8) = x$ auf 3 und $(d9) = y$ auf 7 Zehntel der Angabe, so wird $u' = (8 + 0{,}3)\, 10'' = 83'' = 1'\, 23''$ und folglich die Gesammtablesung $L + u' = 110^0\, 41'\, 23''$.

Die Mikrometerschraube.

§. 74. **Mikrometerschrauben** nennt man im Allgemeinen alle sehr fein geschnittenen Schrauben, womit an Instrumenten kurze gleichmässige Bewegungen ausgeführt werden. Eigentlich gebührt aber dieser Name nur jenen Schrauben, welche zur Messung kleiner Längen- und Winkelbewegungen dienen, und wir werden ihn hier bloss in diesem Sinne gebrauchen.

Je nach dem Zweck, den man mit der Mikrometerschraube erreichen will, sitzt entweder die Mutter fest und die Spindel bewegt sich in Folge einer Drehung längs ihrer Axe; oder die Spindel behält ihren Ort bei und schiebt bei der Drehung die bewegliche Mutter vor- oder rückwärts; oder endlich die Spindel dreht sich nicht und wird durch die Drehung der an einer bestimmten Stelle bleibenden Mutter längs ihrer Axe fortbewegt. Es genügt, wenn man von den verschiedenen Einrichtungen, welche die Mikrometerschrauben haben, nur eine der zweiten und dritten Art betrachtet, da

bei vollem Verständniss der Wirkungsweise dieser Mikrometerschrauben das der übrigen sich von selbst ergibt.

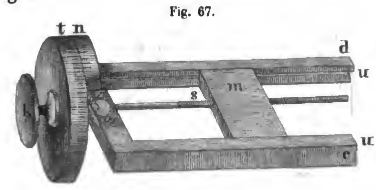


Fig. 67.

In Fig. 67 stellt de einen metallenen Rahmen vor, in dessen Nuthen u, u sich ein Metallstück m, das als Schraubenmutter dient, vor- u. rückwärts bewegen kann. Die Mikrometerschraube s geht durch das Vorderstück des Rahmens und wird dort von einem kugelförmigen Ansatz a zwar an der Längenbewegung, aber nicht an der Drehung um ihre Axe gehindert. Diese Drehung geschieht durch den geränderten Kopf k und hat die Verschiebung der Mutter m zur Folge. Ganze Umdrehungen der Schraube und Theile derselben werden durch die mit der Spindel fest verbundene Trommel t und den an dem Rahmen befestigten Nonius n gemessen, indem man dessen Stellung gegen die Theilung der Trommel beobachtet. Ist diese in 100 Theile getheilt und beträgt die Höhe eines Schraubenganges z. B. 0,3 Linien, so wird, wenn die Trommel um 1 Theil gedreht wird, die Mutter m in der Richtung der Spindel um 0,003 Linien fortrücken, und zwar gegen a hin oder davon weg, je nachdem rechts oder links gedreht wird. Würde der Nonius Zehntel eines Trommeltheils anzeigen, so könnte man in dem angenommenen Falle die Bewegung der Mutter m und dessen, was mit ihr festverbunden ist, bis auf 0,0003 Linien genau messen.

Die Höhe eines Schraubenganges ermittelt man am leichtesten durch die Vorrichtung selbst. Denn denkt man sich parallel zur Spindel einen sehr genauen Massstab gelegt und auf der Mutter einen Zeiger befestigt, welcher bis an die Theilung des Massstabes reicht, so kann man diesen Zeiger mit der Schraube durch eine bestimmte Länge des Massstabes, z. B. einen Zoll, fortführen und dabei die Umdrehungen der Trommel an dem Nonius n zählen. Dividirt man hierauf den Weg der Mutter durch die Zahl der Umdrehungen der Trommel, so ist der Quotient die Höhe des Schraubengangs in derselben Längeneinheit, welche für den Weg gewählt wurde. Wären für 1 Zoll oder 10 Linien Verschiebung 333,333 Umdrehungen nöthig gewesen, so betrüge die Höhe eines Schraubengangs 0,03 Linien.

Die nachstehenden Figuren geben die Ansicht und den Durchschnitt der vorzüglich eingerichteten Mikrometerschraube an dem Stampfer'schen Nivellirinstrumente, von dem später die Rede seyn wird. Die Schraubenspindel s (Fig. 69) hat ihren Kopf k in der Platte p, welche mit dem durch sie zu bewegenden Gegenstande festverbunden ist. Der Kopf k hat zwar in der Höhlung von p ein wenig Spielraum, damit sich bei Winkelbewegungen die Stellung der Spindelaxe gegen die Platte etwas ändern kann, aber er ist durch einen versenkten Stift an einer Drehung um diese Axe gehindert.

Die Schraubenmutter (i, i) stützt sich mit einer abgerundeten Fläche an den ausgehöhlten Boden des mit dem Instrumente fest verbundenen Rohres e und trägt gleichzeitig die Trommel t und den geränderten Kopf b, welcher zur Drehung derselben dient. Steht das Rohr e, wie es hier der Fall ist, fest, so muss bei einer rechtläufigen Drehung der Mutter i die Spindel s und mit ihr die Platte p sich senken; damit aber diese Platte bei entgegengesetzter Drehung sich wieder erhebe, ist um die Schraubenspindel eine Springfeder (f) gewunden, welche ihre Bestimmung erfüllt, indem sie, auf die Platte p und den Boden von e drückend, die stetige Berührung der Mutter i in der Pfanne an e herstellt. Die Trommel t ist in 100 Theile getheilt und mittels des festen Zeigers z' kann man die Umdrehungen bis auf Zehntel solcher Theile bestimmen, wenn man in der Schätzung der Unterabtheilungen einige Uebung erworben hat. Die ganzen Umdrehungen der Schraube können mittels einer mit der Platte p verbundenen Scala (g) und eines an d befindlichen Zeigerstrichs (z) gezählt werden, wenn jeder Theil der Scala der Höhe eines Schraubengangs gleich gemacht wird. Durch die beständige Spannung der Feder f ist jeder todte Gang der Schraube vermieden.

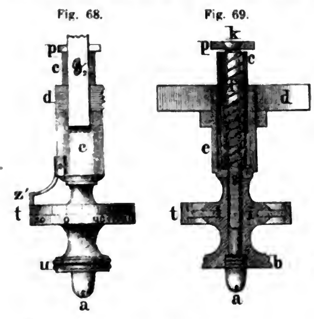


Fig. 68. Fig. 69.

§. 75. **Theorie der Mikrometerschraube.** Um einzusehen, wie mit der eben beschriebenen Mikrometerschraube kleine Winkel sehr genau gemessen werden können, denke man sich in Fig. 70 den Arm d p an dem vorderen Ende (p) mit der Platte p verbunden und an dem hinteren Ende (d) drehbar. Ist für den Stand p d eine erste Ablesung an den Zeigern z und z' gemacht, so gibt nach einer recht- oder linkseitigen Drehung, wodurch der Stab d p in die Lage d p' oder d p'' kommt, eine zweite Ablesung die Längen p p' oder p p'' beziehlich gleich h' oder h''. Mit diesen Grössen fände man tgα' oder tgα'', wenn die Länge l des Stabs pd sehr genau bekannt wäre. Diese Länge braucht man aber gar nicht, wenn man mit dem Arme d p ein Fernrohr in feste Verbindung bringt und die Neigungswinkel α' und α'', welche auch die des Rohrs sind, auf später anzugebende Weise sehr genau misst.

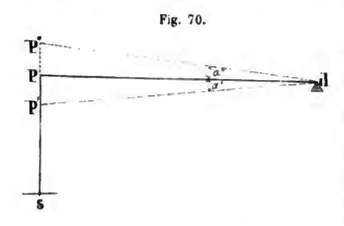


Fig. 70.

Es ist klar, dass die Winkel α' und α'', wenn sie sehr klein sind und man nicht gerade die allerschärfste Messung derselben fordert, der Zahl der Schraubenumdrehungen proportional gesetzt werden können, und dass somit der constante Winkelwerth w, welcher einer ganzen Umdrehung der Schraube entspricht, erhalten wird, wenn man α' oder α'' durch die zugehörigen Umdrehungen u' oder u'' dividirt.

Unter der eben gemachten Voraussetzung ist der Winkel φ, welcher u Umdrehungen entspricht, offenbar aus der Gleichung

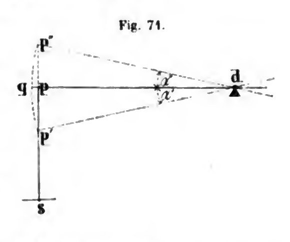
$$\varphi = u w \qquad (81)$$

zu berechnen.

Lässt man aber die Annahme, dass der Winkel φ der Länge h oder den Umdrehungen u proportional ist, nicht gelten, so kann man jenen Winkel nach Stampfer durch folgende Betrachtung genauer finden.

Stellt in Fig. 71 die Linie pd den drehbaren Arm l in der Lage vor, worin die Mikrometerschraube s senkrecht auf ihn wirkt, so ist klar, dass die Schraube die Wege pp', pp'' zu durchlaufen hat, um den Arm in die Lagen dp', dp'' zu bringen. Nimmt man nun die Winkel α' und α'' den Schraubenumdrehungen proportional, so werden sie durch die Tangenten statt durch die Bögen gemessen, folglich wird w und demnach auch φ immer etwas grösser gefunden als es wirklich ist.

Fig. 71.



Soll der obenstehende Ausdruck für φ verbessert werden, so muss man eine positive Grösse von ihm abziehen; nennen wir dieselbe $u^2 w'$, wobei w' einen noch unbestimmten positiven Werth hat, so wird zunächst

$$\varphi' = u w - u^2 w'.$$

Bildet man eine zweite ähnliche Gleichung, welche den Winkel φ'' ausdrückt, der v Umdrehungen entspricht, so erhält man

$$\varphi'' = v w - v^2 w'.$$

Aus beiden ergibt sich durch Abziehen der Winkel $\varphi'' - \varphi'$, welcher von dem Arme l zwischen der vten und uten Umdrehung durchlaufen wird, gleich

$$\psi = w (v - u) - w' (v^2 - u^2). \qquad (82)$$

Die Constanten w und w' werden dadurch bestimmt, dass man ein mit dem Arm pd festverbundenes Fernrohr durch die Schraube auf bekannte Winkel φ' und φ'' genau einstellt und die Umdrehungen u und v, welche dazu nöthig sind, bestimmt, hierauf aber aus den vorletzten zwei Gleichungen die Werthe von w und w' sucht. Es ist begreiflicherweise sehr gut, wenn man mehr als zwei Beobachtungen macht, um w und w' zu finden. Mehr Beobachtungen ziehen aber auch mehr als zwei Gleichungen zur Bestimmung von w und w' nach sich, und es werden je zwei derselben etwas abweichende Werthe sowohl für w als für w' geben. Sind die verschiedenen Werthe

für w und w' aus lauter gleich guten Beobachtungen hervorgegangen, so hat man die arithmetischen Mittel aus den zusammengehörigen Werthen als die gesuchten Constanten anzunehmen.

Um den Gebrauch der Gleichung (82) durch ein Beispiel zu erläutern, bemerken wir, dass für die Mikrometerschraube an dem später zu beschreibenden Stampfer'schen Nivellirinstrumente der polytechnischen Schule zu München der Werth von $w = 640$ Sekunden und von $w' = 0{,}07$ Sekunden und folglich

$$\psi = 640\,(v - u) - 0{,}07\,(v^2 - u^2) \text{ Sekunden}$$

ist. Ein Winkel ψ' nun, welcher 10 Umdrehungen, von 0 an gerechnet, entspricht, wird aus dieser Gleichung erhalten, wenn man $v = 10$ und $u = 0$ setzt. Für diese Werthe wird aber $\psi' = 6393'' = 1^0\,46'\,33''$. Will man den Winkel ψ'' haben, der zehn Umdrehungen zwischen den Ablesungen 20 und 30 auf der Scala (g) entspricht, so muss $v = 30$ und $u = 20$ gesetzt werden. Dann wird aber $\psi'' = 6365'' = 1^0\,46'\,5''$. Der Winkel ψ'' ist somit um 28 Sekunden kleiner als ψ', obwohl jeder aus einer gleichen Anzahl von Umdrehungen hervorgegangen ist. Hierin zeigt sich deutlich der Einfluss des zweiten Gliedes in dem Ausdrucke für φ oder ψ und somit auch der Fehler, den man bei ausschliesslicher Anwendung der Gleichung (81) begeht.

Der Messkeil.

§. 76. Die Erfahrung lehrt, dass es für die genaue Messung gerader Linien nicht gut ist, die an einander zu reihenden Massstäbe sich dicht berühren zu lassen, weil dadurch leicht eine Verschiebung des einen oder andern bewirkt werden kann. Auf Grund dieser Erfahrung hat Reichenbach vorgeschlagen: erstens die metallenen Massstäbe an ihren Enden in scharfe Kanten auslaufen zu lassen, welche senkrecht zu einander stehen; zweitens diese Stäbe bei der Messung so in die gerade Linie zu legen, dass sich immer eine lothrechte und eine wagrechte Kante gegenüberstehen, ohne sich zu berühren; und drittens den Abstand beider Kanten durch einen dazwischen geschobenen flachen Keil, dessen Dicke an jeder Stelle bekannt ist, zu messen.

Man nennt diesen Keil nach dem Materiale, woraus er besteht, bald Stahl- bald Glaskeil; es bedarf aber wohl kaum der Rechtfertigung, wenn wir ihn in der Folge, unabhängig von seinem Stoffe, den Messkeil nennen werden.

Ein solcher Keil ist hier in seiner Stellung zwischen zwei Massstäben (M und M') gezeichnet. Die Länge bd desselben ist gross genug, wenn sie 3—4 Zoll, und die Breite, wenn sie ebenso viele Linien beträgt. Den Keilflächen (ac, bd), welche vollkommen eben gearbeitet seyn müssen, gibt man ungefähr 2 Grade Neigung. Eine der parallelen Seitenflächen wird durch gleichweit entfernte und auf einer Keilkante (bd) senkrecht stehende Striche so abgetheilt, dass

Fig. 72.

man die Dicke des Keils an der Stelle ie, welche von beiden Kanten zugleich berührt wird, aus einer besonderen Tabelle sofort entnehmen kann. Die Ordinaten können eine halbe Linie von einander entfernt seyn. Trifft die Kante i zwischen zwei Ordinaten, so schätzt man ihren Abstand von einer derselben und bringt ihn bei der abgelesenen Abscisse gehörig in Rechnung.

Die Dicke des Keils an irgend einer Stelle (gf) ist leicht zu bestimmen, wenn man dieselbe an zwei Stellen (ab, cd), deren Entfernung gegeben ist, kennt und voraussetzt, dass die Keilflächen wirkliche Ebenen sind. Setzt man nämlich ab = d, cd = d′, bd = a, df = x und gf = y, so ist

$$y = d' + \frac{d - d'}{a} x. \qquad (83)$$

Wäre a = 30‴, d = 2‴, d′ = 0‴,5, so fände man für die Abscisse x′ = 27‴ die Dicke y′ = 1,85 Linien, und für die Abscisse x″ = 27‴,5 die Dicke y″ = 1,875 Linien. Der Unterschied beider Dicken betrüge somit 0,025 oder $^1/_{40}$ Linie. Da man den Zwischenraum von einer halben Linie mit blossem Auge sicher noch in fünf Theile theilen kann, so geht hieraus hervor, dass mit dem eben beschriebenen Keile der Abstand zweier Metallmassstäbe nöthigenfalls bis auf $^1/_{200}$ Linie genau gemessen werden kann.

§. 77. **Prüfung des Keils.** Schwerd wandte zur Bestimmung der Dicken der Stahlkeile, welche er zur Messung der kleinen Speyerer Basis [1] gebrauchte, folgendes Verfahren an. Er verfertigte drei verschiedene Messingstreifen, deren Seitenflächen genau parallel waren und deren Breiten in drei entsprechend weite Lehren vollkommen passten. Hierauf schob er den zu untersuchenden Keil nach und nach in jede dieser Lehren und bemerkte die Ordinaten, bis zu welchen derselbe eindrang. Diese Ordinaten waren offenbar so lang als die Messingstreifen breit, und es kam nunmehr darauf an, die Breite der Streifen zu finden. Zu dem Ende wurden die letzteren in der Mitte quer durchschnitten und je zwei zusammengehörige Stücke auf einem genau getheilten Massstabe abwechselnd aneinander gelegt, bis ein ziemlich grosses Vielfaches dieser Breite gemessen war. Bei diesem Aneinanderlegen musste selbstverständlich jeder Stoss und jede Erwärmung durch Berühren mit der blossen Hand vermieden werden, wesshalb die Messingstücke durch Stricknadeln fortgeschoben, gehalten und an

[1] Man vergleiche „Die kleine Speyrer Basis" von Prof. Fr. Schwerd, Speyer 1822.

einandergepasst wurden. Auf diese Weise fand Schwerd für einen seiner Keile folgende Mittelwerthe der Ordinaten:

Der	Ordinate	44,4	entspricht	eine	Keildicke	von	6,4073 Millimeter.
„	„	16,2	„	„	„	„	2,7070 „
„	„	4,4	„	„	„	„	1,1815 „

Aus den beiden ersten Ordinaten berechnet sich nach Gleichung (83) der Werth der Ordinate 10 zu 1,8937 und aus den beiden letzten zu 1,9050 Millimeter; im Mittel also zu 1,8993 Millimeter. Auf Grund der in dieser Weise ermittelten Längen von 4 Ordinaten erhält man die übrigen Keildicken, indem für die Ordinaten

von 0	bis 10	die Angaben:	Ord. 10	= 1,8993	und	Ord. 4,4	= 1,1815 mm
„ 10	„ 16	„	„ 10	= 1,8993	„	„ 16,2	= 2,7070 „
„ 16	„ 45	„	„ 16,2	= 2,7070	„	„ 44,4	= 6,4073 „

benützt wurden. Schwerd fand hierdurch den Unterschied zwischen je zwei auf einander folgenden und ungefähr $2^1/_2$ Millimeter entfernten Ordinaten oder Keildicken:

in dem	ersten	Theile	von 0	bis 10	= 0,12821	Millimeter;
„ „	zweiten	„	„ 10	„ 16,2	= 0,13024	„
„ „	dritten	„	„ 16,2	„ 45	= 0,13115	„

Da man die Zahl der Ordinate bis auf ein Zehntel schätzen konnte, so war folglich mit dem Keil eine Messung bis zu 0,013 Millimeter Genauigkeit möglich.

Bessel verfuhr bei Prüfung seiner Messkeile, welche zur Gradmessung in Ostpreussen dienten, in ganz anderer Weise. Er benützte dazu, wie in Fig. 73 angedeutet, ein auf einem Gestelle (g) befestigtes Stahlprisma (k), dessen scharfe Kante (s) wagrecht lag, und einen polirten Stahlcylinder (c), der eine lothrechte Schneide (s') hatte und in einer hohlen Bahn mit seiner Axe parallel bewegt werden konnte. Die Bewegung dieses Cylinders wurde durch ein Mikroskop und eine Mikrometerschraube auf's genaueste gemessen. Die Messung der Keildicken begann damit, dass man den Cylinder c so weit an den Keil k schob, bis sich die Schneiden s und s' genau berührten. Alsdann las man den Stand der Mikrometerschraube ab. Hierauf wurden



Fig. 73.

nach und nach alle Ordinaten des zu untersuchenden Keils zwischen die Schneiden s und s' gebracht und jedesmal der Stand der Schraube abgelesen. Es ist klar,

dass der Unterschied der Ablesungen zwischen irgend zwei Ordinaten dem Unterschied dieser Ordinaten proportional ist, und dass man hieraus die Länge jeder Ordinate erhält, so bald man den Werth eines Schraubenganges kennt. Die gläsernen Messkeile von Bessel hatten zwischen den Endpunkten ihrer Scala, welche 41 Linien lang war, 120 Theile und es war die unterste Ordinate 0,8 und die oberste 2 Linien lang. Bessel berechnete hiernach zuerst die Längen der übrigen Ordinaten und bestimmte sie alsdann durch wiederholte Versuche.

Die Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten Keildicken oder die Fehler der letzteren ergaben sich für die von Bessel untersuchten fünf Keile wie folgt:

Ordinate.	1.	2.	3.	4.	5.
	Duodecimal-Linien.				
0 = 0,8‴	− 0,0056	− 0,0056	− 0,0051	− 0,0067	− 0,0055
20 = 1,0	− 0,0044	− 0,0044	− 0,0044	− 0,0059	− 0,0052
40 = 1,2	− 0,0030	− 0,0037	− 0,0031	− 0,0041	− 0,0042
60 = 1,4	− 0,0025	− 0,0028	− 0,0025	− 0,0036	− 0,0039
80 = 1,6	− 0,0008	− 0,0011	− 0,0010	− 0,0019	− 0,0022
100 = 1,8	+ 0,0003	− 0,0002	− 0,0002	− 0,0012	− 0,0006
120 = 2,0	+ 0,0018	+ 0,0014	+ 0,0010	0,0000	+ 0,0012

Vorstehende Tabelle mag als Beweis dienen, dass man mit den Messkeilen in der That eine Genauigkeit von $^1/_{200}$ Linie erlangen kann; denn während der Unterschied zweier auf einander folgender Ordinaten gerade $^1/_{100}$ Linie beträgt und durch Schätzung die Anzahl der Ordinaten von 120 auf 240, also der Unterschied je zweier auf einander folgender auf $^1/_{200}$ Linie gebracht werden kann, zeigen vorstehende Zahlenwerthe, welche nach Bessel's Angabe in der dritten Decimale noch sicher sind, dass man durch das bei der Prüfung angewandte Messverfahren bis auf $^1/_{1000}$ Linie genau messen kann. Da aber dieses Verfahren von der Messung mit den Messstangen nur darin sich unterscheidet, dass man hiebei das Mikroskop und die Mikrometerschraube weglässt, so darf man wohl wie oben die Genauigkeit der Messkeile auf $^1/_{200}$ Linie setzen.

Zweiter Abschnitt.

Mittel zur Bezeichnung der Operationspunkte.

§. 78. Die Punkte, deren gegenseitige Lage durch Messung bestimmt werden soll, müssen vorher abgesteckt oder durch entsprechende Merkmale bezeichnet seyn. Man kann aber auf dem Felde einen Punkt nur

durch die lothrechte Axe eines an seiner Stelle sich befindenden festen Gegenstandes, und eine gerade Linie nur durch zwei solche Axen bezeichnen, wenn sie von entfernten Stellen aus gesehen werden sollen. In Folge dieser in der Natur der Sache gelegenen Bezeichnungsweise spricht und schreibt man auch von einem Punkte so, als ob er eine lothrechte Linie, und von einer geraden Linie, als ob sie eine lothrechte Ebene wäre. Indem man die hier stattfindende Verwechselung des Mittels der Bezeichnung mit dem Bezeichneten noch weiter ausdehnt, versteht man folgerichtig unter einer gebrochenen Linie zwei oder mehr sich schneidende lothrechte Ebenen, und unter einer krummen Linie eine lothrecht stehende Cylinderfläche. In diesem Sinne gilt somit in der Erd- und Feldmessung Alles für einen Punkt oder eine gerade oder krumme Linie, was im Grundrisse als eigentlicher Punkt, gerade oder krumme Linie erscheint; der Aufriss einer geraden Linie kann somit krumm oder gebrochen, und der einer krummen Linie gerade seyn.

Dieselben Principien gelten auch für die Bezeichnung von Punkten und Linien, welche in Gruben aufzunehmen oder abzustecken sind; nur bedingen hier oft die Räumlichkeiten und nicht selten die Messinstrumente andere Hilfsmittel als auf der Erdoberfläche, wie die nachfolgenden Beschreibungen beweisen.

Absteckpfähle und Markpflöcke.

§. 79. Durch Errichtung von lothrechtstehenden Gegenständen können alle Arten von Figuren so abgesteckt werden, dass man ihren Grundriss aufnehmen kann. Handelt es sich aber bei der Aufnahme nicht um den Grundriss allein, sondern auch um die gegenseitige Höhenlage oder den Aufriss der Punkte, so muss zu jener ersten Bezeichnung noch eine zweite kommen, welche die Höhe des Punktes angibt.

Diese letztere Bezeichnung wird durch Grundpfähle (g, Fig. 74) bewirkt, welche lothrecht in den Boden geschlagen werden, bis sie unverrückbar feststehen, worauf man sie in der Höhe des zu bezeichnenden Punktes wagrecht abschneidet und nöthigenfalls in der Mitte des Querschnitts mit einem Nagel (n) versieht, dessen platter Kopf den Punkt vorstellt. Die Länge und Dicke dieser Grundpfähle richtet sich selbstverständlich nach der Festigkeit des Bodens, in den sie geschlagen werden: in den meisten Fällen genügt eine Länge von 1 bis 1½ Fuss und eine Dicke von 2 bis 3 Zoll.

Um einen Grundpfahl von dem andern zu unterscheiden, wird neben jedem ein Beipfahl (b) geschlagen, der ungefähr einen Fuss über dem Boden vorsteht und auf einer ebenen, bloss durch ein Beil hergestellten Seitenfläche die Nummer oder sonstige Bezeichnung des Grundpfahls trägt. In der nachstehenden Figur ist der Grundpfahl durchschnitten und der Beipfahl, welcher etwa einen halben Fuss von jenem entfernt ist, in der

Ansicht gezeichnet. Dergleichen Grund- und Beipfähle finden bei der Aufnahme von Längen- und Querprofilen (d. i. von lothrechten Durchschnitten der Bodenoberfläche) ihre Anwendung.



Für technische Zwecke ist es sehr oft nöthig, krumme Linien von bestimmter Form, namentlich Kreisbögen, auf dem Felde abzustecken. Diese Absteckung erfordert, dass man einzelne Punkte jeder Curve oder, wenn man will, einzelne Elemente der lothrechtstehenden Cylinderfläche, worin die Curve liegt, sichtbar macht. Dazu dienen Pfähle von derselben Beschaffenheit wie die eben beschriebenen Beipfähle, indem es genügt, wenn diese Curvenpfähle 8 bis 12 Zoll über die Bodenfläche vorstehen. Die Berührungspunkte der Curven bezeichnet man in der Regel mit grösseren und stärkeren Pfählen als die übrigen Punkte, damit man Anfang und Ende einer Curve leichter wieder erkennt. Auch gibt man den Pfählen dieser Punkte besondere Zeichen, welche sich auf die Berührung beziehen.

Soll der Grundriss einer Flurmarkung oder ein Plan derselben aufgenommen werden, so besteht die erste Arbeit der Aufnahme in der Absteckung der Grenzen der einzelnen Bestandtheile derselben, d. i. aller Felder, Wiesen, Wälder, Wege, Flüsse, Häuser, Gärten u. dgl. Man bedient sich dazu der Markpflöcke, welches einen Fuss lange, zwei Zoll breite und einen halben Zoll dicke unten zugespitzte Spalten aus Tannen- oder Fichtenholz sind. Dieselben werden vor ihrer Verwendung mit fortlaufenden Nummern versehen. Es lohnt sich wohl auch die Mühe, sie zu durchbohren und an einem Stricke nach ihren Ziffern aneinander zu reihen, um sie leichter fortzuschaffen und bei der Umgehung und Abpflöckung der Flurmarkung in der rechten Folge der Nummern zu verwenden.

Nägel und Schrauben.

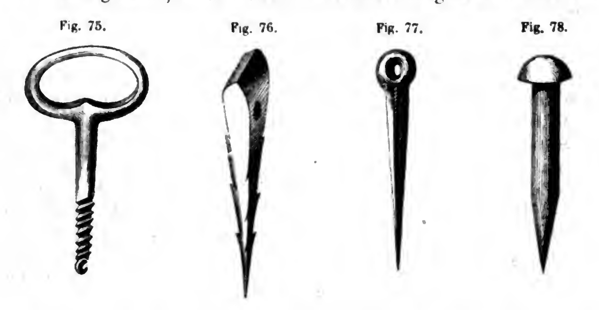
§. 80. Da der harte Boden der Bergwerke selten erlaubt, zur Bezeichnung von Punkten Pfähle anzuwenden, so bedienen sich die Markscheider dafür des Eisens in Form von Nägeln und Schrauben, welche in dem Zimmerwerke der Stollen, Strecken, Schächte etc. leicht befestigt werden können. In sehr engen Räumen werden die geraden Linien durch angespannte Schnüre dargestellt, welche an den Endpunkten von Markscheideschrauben (Fig. 75) gehalten werden. Diese Schrauben sind von Messing, etwa eine Linie dick, 2 bis 3 Zoll lang und haben oben einen schlüsselähnlichen Griff und unten ein Gewinde wie die Holzschrauben. Bei wagrechten (söhligen) und schiefen (flachen) Linien setzt man diese Schrauben höchstens 8 Lachter

auseinander, weil sonst die Schnur eine für die Messung schädliche Biegung annimmt.

Dauerhafter, als es mit Markscheideschrauben möglich ist, kann man Punkte mit dem Punkteisen (Fig. 76) bezeichnen. Diese Eisen sind im Grunde nur dicke Nägel von 5 bis 6 Zoll Länge, welche am Kopfe 1 Zoll breit sind und ein Loch haben, um die Schnur aufzunehmen. Man kann sie für Horizontal- und Vertikalaufnahmen benützen. Sollen sie in festem Gestein angewendet werden, so muss dieses erst ausgebohrt und mit einem hölzernen Dübel ausgefüllt werden, in den alsdann das Punkteisen eingeschlagen wird.

Sind in den Firsten von Stollen oder Strecken Punkte zu bezeichnen, von denen bloss herabgesenkelt wird, so geschieht dieses mit Senkeleisen (Fig. 77), welche eine Länge von $2^1/_2$ bis 3 Zoll und eine 2 bis 3 Linien weite Oeffnung haben, durch welche die Senkelschnur gesteckt werden kann.

Fig. 75. Fig. 76. Fig. 77. Fig. 78.



Als Fix- oder Anhaltspunkte für das Nivellement eines Stollens oder einer Strecke dienen die Sohlnägel (Fig. 78), welche 3 bis $3^1/_2$ Zoll lang und am Kopfe $1^1/_2$ bis 2 Zoll breit sind. Diese Nägel werden in Sohlschwellen oder hölzerne Dübel eingeschlagen und sind behufs späterer Benützung gegen Beschädigung zu schützen.

Fluchtstäbe und Messfahnen.

§. 81. **Beschreibung.** Zur vorübergehenden Bezeichnung von naheliegenden Punkten und hierdurch bestimmten geraden Linien dienen die Fluchtstäbe (Absteckstäbe, Baken), welche in Form von Cylindern aus gut getrocknetem Tannenholze 6 bis 10 Fuss lang und 1 bis $1^1/_2$ Zoll dick gemacht werden. Diese Stäbe sind zum leichteren Einstecken in den Boden an ihren unteren Enden mit kegelförmigen eisernen Schuhen beschlagen, und zum besseren Erkennen in der Ferne von Fuss zu Fuss abwechselnd roth und weiss, manchmal auch schwarz und weiss angestrichen. Der

weisse Anstrich sticht gegen dunkle und der rothe gegen helle Gegenstände gut ab, während der schwarze für schneebedeckten Hintergrund empfohlen wird. Aber dafür ist die rothe Farbe eben so gut, und da man doch nur selten im Winter misst, so eignet sich der roth und weisse Anstrich am meisten für die Absteckstäbe. Dass die Farben von Fuss zu Fuss wechseln, hat darin seinen Grund, dass die Fluchtstäbe manchmal zu flüchtigen Längenmessungen benützt werden müssen, wenn es an besseren Massstäben mangelt.

Neben den Fluchtstäben führt der ausübende Geometer meist auch eine kleine Anzahl grösserer Stäbe mit sich, an denen sich oben ein Fähnchen von rother und weisser Leinwand befindet. Diese Messfahnen eignen sich wegen der grösseren Höhe ihrer Stäbe und der Bewegung der gefärbten Leinwandstreifen zur Aufstellung hinter Hecken, niedrigem Gebüsche, Anhöhen und überhaupt an solchen Stellen, wo sich die Fluchtstäbe nicht sicher erkennen lassen. Ihre Stäbe unterscheiden sich von den Fluchtstäben nur durch die Länge, welche 10 bis 15 Fuss beträgt.

§. 82. **Gebrauch.** Das Abstecken einer geraden Linie mittels Fluchtstäben gründet sich auf den geradlinigen Fortgang des Lichts und setzt voraus, dass man einen solchen Stab lothrecht zu halten und in den Boden zu stecken wisse. Man könnte diese Stellung durch einen Senkel prüfen, aber diese Prüfung wäre für diesen Zweck zu umständlich und bei einigermassen windigem Wetter gar nicht ausführbar. Es hält indessen nicht schwer, das Auge so zu gewöhnen, dass es in einiger Entfernung vom Stabe dessen schiefe oder lothrechte Stellung bald sicher schätzt, namentlich wenn man sie mit fernliegenden Gegenständen, welche lothrechte Linien an sich tragen, wie Häuser, Thürme, Bäume u. s. w. vergleicht.

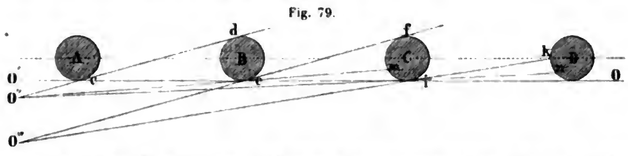
Soll zwischen zwei durch lothrechte Stäbe bezeichneten Punkten (A und B) ein dritter Stab in die dadurch bezeichnete gerade Linie eingesteckt werden, so stellt sich der Geometer an einem Ende (A) der Linie auf und zielt abwechselnd an der rechten und linken Seite des vor ihm stehenden Stabes (A) vorbei nach dem entfernteren Stabe (B) und gibt seinem ihn ansehenden Gehilfen, der den einzusteckenden Stab (C) mit ausgestrecktem Arme zwischen dem Daumen und Zeigefinger frei hält, die erforderlichen Zeichen zur Bewegung nach rechts oder links, bis der dritte Stab (C) von dem ersten (A) gedeckt wird und beide den zweiten (B) decken.

Auf diese Weise kann man zwischen zwei gegebenen Stäben mehrere einschalten, wobei sich übrigens von selbst versteht, dass man mit dem entferntesten den Anfang machen muss. Auch ist hierdurch klar, dass man eine durch zwei Punkte bestimmte Gerade rückwärts verlängern kann, indem man einen Stab nach dem anderen auf die vorhergehenden einrichtet.

Um zu prüfen, ob mehrere Stäbe genau in gerader Linie stehen, bringe man durch Bewegung des Kopfes das zielende Auge bald rechts bald links von dem nächsten Stabe und vergleiche, ob die übrigen Stäbe auf beiden Seiten regelmässig nacheinander hervortreten. Findet diese Regelmässigkeit statt, d. h. ist der zweite Stab früher sichtbar als der dritte, dieser früher

als der vierte u. s. f., so stehen die Stäbe richtig; kommt aber ein entfernter Stab früher zum Vorschein als ein näherer, so muss die Aufstellung des einen oder anderen Stabes verbessert werden.

Fig. 79.



Durch Fig. 79 wird diese Prüfungsmethode anschaulicher. Steht nämlich das Auge in O', so berührt die an A streifende Visirlinie O' O alle in gerader Linie stehenden Stäbe A, B, C, D; kommt das Auge nach O', so kann man den Stab B ganz und von C einen grösseren Theil als von D sehen, oder auch: es tritt B früher aus der Linie als C, dieser früher als D u. s. w Dasselbe gilt für die Stellung O''' des Auges und für ähnliche Stellungen desselben auf der linken Seite sämmtlicher Stäbe.

Wie weit man die Absteckstäbe höchstens auseinander stellen darf, hängt von ihrer Dicke, von der Beleuchtung, dem Hintergrunde und der Beschaffenheit des Auges des Geometers ab. Wenn alle Umstände günstig sind, so kann man 1 bis 1½ Zoll dicke Stäbe 150 bis 200 Fuss auseinander stecken; denn dann kann man, was für die Absteckung einer geraden Linie von Vortheil ist, immer noch den dritten und selbst vierten Stab deutlich erkennen. Kleine Abstände der Fluchtstäbe sind desshalb nachtheilig, weil die Fehler des Einstellens sich häufiger wiederholen und jeder Fehler in der Stellung eines Stabes auf die folgenden Stäbe sich fortpflanzt.

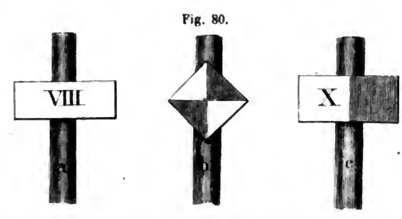
Signale.

§. 83. Bei weit ausgedehnten Messungen sind gewisse Punkte dauernd so zu bezeichnen, dass das Zeichen oder Signal in grosser Entfernung noch erkannt werden kann: es muss desshalb seine Körpermasse nicht bloss der Sichtbarkeit, sondern auch der Standfestigkeit wegen grösser seyn als die der Pfähle oder Fluchtstäbe. Man kann natürliche und künstliche Signale unterscheiden: zu jenen rechnet man lothrechte Gegenstände, welche sich für Zwecke der Vermessung von selbst darbieten, wie Thurmspitzen, Mauerkanten, Bäume u. s. w., während künstliche Signale alle diejenigen heissen, welche an den betreffenden Stellen erst errichtet werden müssen. Diese Signale bestehen bei oberirdischen Messungen aus Stangen und aus hölzernen oder steinernen Pfeilern und Pyramiden, bei unterirdischen Messungen aber aus Lampen oder brennenden Kerzen.

§. 84. **Stangensignale.** Je nach der Entfernung, auf welche man diese Signale sehen will, werden gerade Tannen- oder Fichtenstämmchen von 2 bis 3 Zoll mittlerer Dicke und 15 bis 25 Fuss Höhe abgeschält,

an ihrem Wurzelende zugespitzt und an ihrem Gipfel mit einem Brettchen versehen, das eine der nachfolgenden Stellungen (Fig. 80) erhält und entweder durchaus weiss, oder roth und weiss, manchmal auch schwarz und weiss angestrichen ist. Zur Unterscheidung der Signalstangen kann man auf ihre Brettchen Zahlen oder Buchstaben setzen, wie ebenfalls hier angedeutet ist.

Fig. 80.



Zum Aufrichten eines solchen Signals wird erfordert, dass mit Hilfe eines eisernen Vorstosses ein 2 bis 3 Fuss tiefes Loch in den Boden gemacht werde, in das man die Stange mit Gewalt hinabstösst, nachdem sie vorher so gewendet wurde, dass das Signalbrettchen nach den Seiten gerichtet ist, von wo aus es vorzugsweise gesehen werden muss. Um die Signalstange lothrecht zu stellen, visirt man ihre Mittellinie nach zwei Senkeln ein, die in einiger Entfernung von der Stange so aufgestellt werden, dass die durch sie und die Stange bestimmten Visirebenen sich nahezu rechtwinkelig kreuzen. Hat die Stange nahehin die richtige Stellung, so füllt man die sie umgebende Höhlung mit Steinen aus. Durch Einkeilen einzelner Steine auf den entsprechenden Seiten kann man das Signal nach und nach ganz lothrecht stellen. Sehr hohe Signalstangen werden zum Schutze gegen Verdrückung durch den Wind mit einigen Streben versehen, deren oberes Ende an die Stange genagelt ist, während das untere fest in dem Boden steckt.

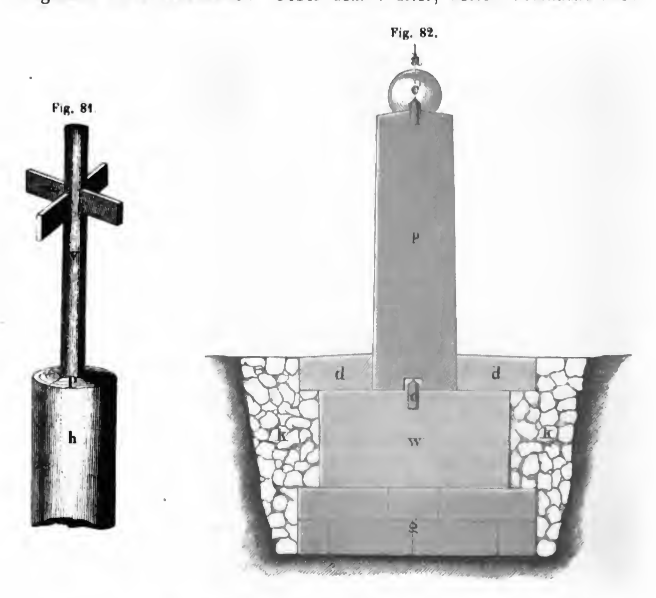
§. 85. **Pfeilersignale.** Für untergeordnete Dreieckspunkte zu Landesvermessungen gebraucht man häufig Signale von folgender Form (Fig. 81). Ein 5 bis 6 Fuss langer und 15 bis 18 Zoll dicker abgeschälter Baumstamm (p) wird lothrecht $1^1/_2$ bis 2 Fuss tief in den ausgehöhlten Boden gestellt und mit Füllmateriale ringsum befestigt. Oben wagrecht abgeschnitten, erhält er eine 8 bis 10 Zoll tiefe Bohrung (h), um eine 3 bis 4 Zoll dicke, 4 bis 5 Fuss lange und oben mit zwei sich kreuzenden Signalbrettchen versehene Stange (v) aufzunehmen, deren lothrechte Axe den mit diesem Signal versehenen Punkt vorstellt. Um diese Stange aus der Ferne besser zu erkennen, ist sie mit Kalkmilch weiss angestrichen, was auch mit den beiden Brettchen (m, n) geschieht, wenn man es nicht vorzieht, dieselben halb roth und halb weiss anzustreichen. Soll auf einem so bezeichneten Punkte ein Theodolith aufgestellt werden, um Winkel damit zu messen, so geschieht es, indem man die Stange aushebt und die Alhidadenaxe centrisch über das Loch bringt. Wird es im weiteren Verlaufe der Messung nöthig, an dieser Stelle den Messtisch aufzurichten, so kann man, da alsdann keine Winkelmessung mit dem Theodolithen mehr vorkommt, den Holzpfeiler so

weit absägen als nöthig ist, um das Gestelle des genannten Tisches über dem gegebenen Punkt auszuspreizen.

Will man einen wichtigen Punkt ganz dauerhaft bezeichnen, so dient dazu ein Steinpfeiler mit gemauerter Unterlage (Fig. 82). Auf dieser Gründung (g) wird zunächst ein Steinwürfel (w) befestigt und in dessen oberen Theil ein Messingcylinder (c) so eingesetzt, dass seine lothrechte Axe den fraglichen Punkt bezeichnet. Ueber dem Würfel, dessen Oberfläche noch

Fig. 82.

Fig. 81.



unter dem Boden liegt, stellt man den Steinpfeiler (p) auf und bringt seine Axe in die Verlängerung des unter ihm befindlichen Metallcylinders. Auf der Oberfläche des Pfeilers bezeichnet man die Axe nochmals durch einen zweiten dünnen und 5 bis 6 Zoll langen Cylinder (c′), der zur Hälfte in den Stein reicht, halb aber vorsteht, um eine polirte kupferne Halbkugel (a) von 6 bis 8 Zoll Durchmesser aufzunehmen.

Bei Sonnenschein geben solche, von Bessel zuerst angewendete Kugeln ein sehr glänzendes und daher zum Anvisiren sehr geeignetes Sonnenbild. Zwar ändert sich dessen Lage auf der Kugel mit dem Stand der Sonne, und es wird desshalb auch die Visirlinie in den meisten Fällen neben der

Axe, welche den Punkt vorstellt, vorbeigehen; aber man kann den Abstand des Bildes von der genannten Axe genau berechnen und darnach die Lage der Visirlinie verbessern. Man braucht hiezu nur die Zeit der Beobachtung, die Entfernung des Beobachtungsortes, den Halbmesser der Kugel und die geographische Breite des mit dem Signal versehenen Punktes zu kennen. Nach Bessel kann man eine polirte achtzöllige Halbkugel mit einem Fernrohre von 15 Zoll Brennweite auf eine Entfernung von 30,000 Fuss noch gut sehen.

§. 86. **Pyramidensignale.** Die abgestumpften bei grossen Vermessungen als Signale dienenden hölzernen Pyramiden bestehen in der Regel aus vier starken Pfosten (p, p), welche nach Fig. 83 durch mehrere Rahmen (r, r) und eine hinreichende Anzahl Streben (u, u) und Schalbretter (s, s) zusammengehalten werden. Die Pfosten sind auf einem Schwellrahmen (q, q) befestigt, der in dem Boden liegt und durch einige hinter und unter den Verbandstücken eingeschlagene Pfähle (t, t) gegen Verschiebung gesichert ist. Aus der 12 bis 18 Fuss hohen abgestumpften Pyramide ragt ein mit deren Gerippe fest verbundener, 8 bis 10 Zoll dicker und 6 bis 8 Fuss langer Visirbalken (v) hervor, welcher eine würfel- oder pyramidenförmige Signalkappe (k) von weissem Eisenblech trägt.

Der Visirbalken steht lothrecht und seine Axe geht aufwärts durch die Mitte der Signalkappe, abwärts durch den auf einem hölzernen oder steinernen Pfeiler (p') angemerkten Punkt. Die Verschalung der Pyramide, welche hier nur von zwei Seiten sichtbar ist, reicht von oben so weit herab, dass ein darunter stehender Mann, ohne sich zu bücken, nach allen Seiten frei hinaussehen kann. Damit das Messen auf dem Pfeiler p' ungehindert vorzunehmen möglich ist, so beträgt dessen Höhe über der Bodenfläche nur etwa 4 Fuss.

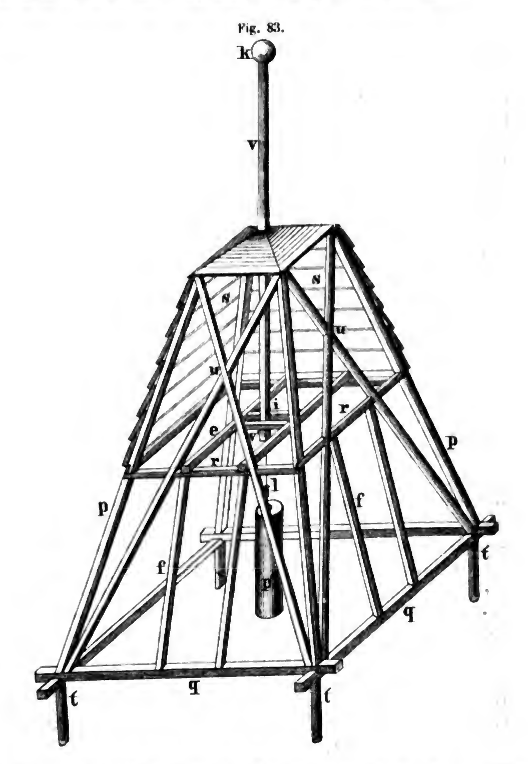
Die Signalkappe dient im Grunde bloss zur leichteren Auffindung des Signals, da das Anvisiren derselben leicht kleine Fehler nach sich zieht, indem die Ziellinie gewöhnlich durch die Mitte der am hellsten erscheinenden Seitenfläche und folglich nicht durch die Axe des Visirbalkens geht. Man richtet daher das Fadenkreuz am besten auf die Mitte dieses Balkens, der durch weissen Anstrich deutlicher sichtbar gemacht wird.

Es gibt auch Pyramidensignale, welche sich zerlegen und versetzen lassen. Die Anwendung solcher Signale ist jedoch nur in äusserst seltenen Fällen ökonomisch vortheilhaft und daher wohl nicht zu empfehlen.

Manchmal ist man genöthigt, beim Messen einen erhöhten Standpunkt einzunehmen, um über Hindernisse verschiedener Art, wie z. B. Gebüsche u. dgl. wegzusehen. In solchen Fällen kann man innerhalb der eben beschriebenen festen Pyramide eine zweite errichten, welche bloss den Zweck hat, dem aufzustellenden Instrumente als Unterlage zu dienen, während der Beobachter einige Fuss tiefer auf der äusseren steht. Beide Pyramiden dürfen unter sich keine Verbindung haben, um jede Schwankung der inneren zu vermeiden. Statt der letzteren kann man auch einen starken Baum

benützen, wenn man ihn in der rechten Höhe abschneiden, von der Rinde befreien und auf der Schnittfläche mit einer starken Scheibe von Eichenholz belegen lässt, welche das Instrument zu tragen bestimmt ist.

Fig. 83.



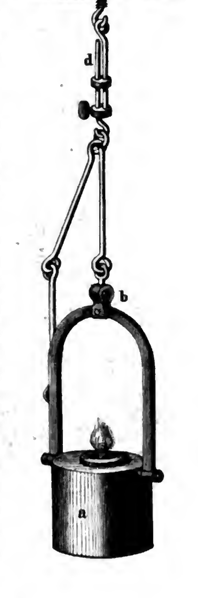
§. 87. **Lichtsignale.** Für die Messung von Horizontal- und Vertikalwinkeln in finsteren und engen Grubenräumen sind die vorhergehenden Signale unbrauchbar; man muss hier die mit Fernrohren anzuvisirenden Punkte beleuchten, was entweder ganz einfach durch ein Grubenlicht oder durch Aufstellung eines der nachstehend beschriebenen Grubensignale geschieht.

Das einfachste Signal ausser dem gewöhnlichen Grubenlichte ist eine

Lampe, und diese kann entweder zum Aufhängen oder zum Aufsetzen eingerichtet seyn.

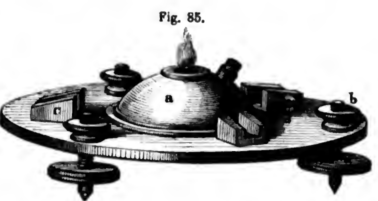
Die Hängelampe (Fig. 84) besteht aus einem cylindrischen Oelgefässe (a) mit 2 Zapfen, an denen ein Bügel (b) befestigt ist, welcher mittels einer kurzen Messingkette oder einer Schnur an das Oehr eines im Firste eines Stollens oder einer Strecke befestigten Senkeleisens (c) gehängt wird. Das eingeschaltete Glied d gestattet Hebungen oder Senkungen der Lampe, die kleiner sind als die Länge eines Kettengliedes. Nach dem Gebrauche kann die Dülle der Lampe durch einen Deckel geschlossen werden.

Fig. 84.



Die Setzlampe (Fig. 85) steht auf einem tellerförmigen Untersatze, der durch 3 Fussschrauben (d) mit Hilfe einer Dosenlibelle horizontal gestellt werden kann und so eingerichtet ist, dass er in seiner Mitte die domförmige Lampe (a) und in den von der Mitte und unter sich gleichweit abstehenden 3 Sätteln (c) die 3 Füsse eines Grubentheodolithen (siehe daselbst) aufnehmen kann. Bei dieser Einrichtung, und wenn der Teller horizontal gestellt ist, liegt die Dülle der Lampe in dem Lothe, das durch den Mittelpunkt des Untersatzes geht und mit der Alhidadenaxe des Theodolithen zusammenfällt. Wird der durch die Lampe bezeichnete Signalpunkt selbst Scheitelpunkt eines zu messenden Winkels, und muss also auf ihm der Theodolith aufgestellt werden, so müssen aus diesem die Fussschrauben herausgenommen werden, damit der Dreifuss fest in den Sätteln (c) ruht. Zur weiteren Befestigung dienen Klemmschrauben (s), welche in den Sattelbacken angebracht werden.

Fig. 85.



Manche Markscheider benützen eine Kugel von Milchglas (Fig. 86), in der sich eine Lampe oder ein Wachslicht befindet, als Signal. Diese Kugel (k) wird von einer Messingröhre (m) getragen, welche sich auf einen Dreifuss (t), der nach oben in einen vertikalen Zapfen ausläuft, aufstecken lässt, und deren Dülle durch den Knopf c wie die eines gewöhnlichen Leuchters gehoben und gesenkt werden kann. Der Dreifuss ruht auf einem

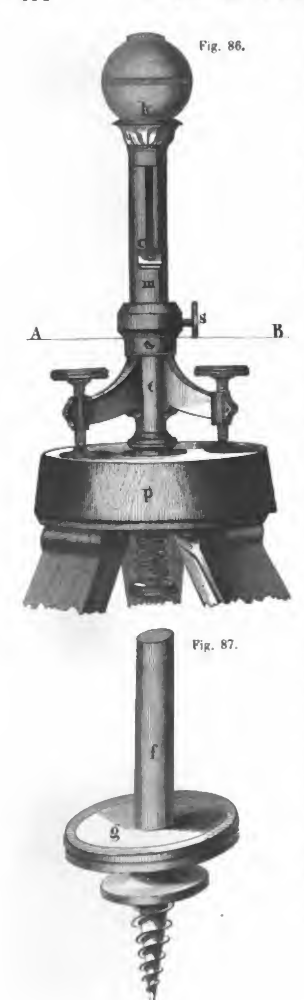


Fig. 86.

Fig. 87.

Gestelle oder Stativ p, wie es für Theodolithe angewendet und bei deren Betrachtung beschrieben werden wird.

Einfacher als das Stativ und der Dreifuss ist die Einrichtung des Untersatzes, welche, wie in Fig. 87, bloss aus einem Metalldorn f besteht, der mit einer Baumschraube g auf einem Balken oder Markscheidebock befestigt werden kann, und um den sich eine durch eine Schraube festzustellende Hülse dreht, wie sie in Fig. 86 durch m vorgestellt ist.

Statt der Lampe mit Milchglas kann man auch eine nach Fig. 88 eingerichtete Papierscheibe benützen, welche roth und weiss gefärbt und durchscheinend ist. Diese Scheibe wird von einer in der Abbildung verkürzt gezeichneten Messingröhre getragen, die sich auf den in Fig. 87 abgebildeten Metalldorn aufsetzen und mit einer Schraube feststellen lässt. Bei dem Gebrauch stellt man ein Licht hinter die Scheibe.

Dieses Licht (am bessten eine brennende Stearin- oder Wachskerze) kann man nach Prof. Junge's Angabe noch zweckmässiger in einen hohlen Halbcylinder (Fig. 89) stellen, der mittels der Mutter t auf der Schraube f befestigt wird, welche ihrerseits auf dem eisernen Träger c ruht, der in der Grubenzimmerung, auf Spreizen oder selbst am Gestein (mit Hilfe von Dübeln) festgemacht ist. Um die Schraubenspindel kann eine Verziehschnur geschlungen werden, wie die Figur zeigt. Der Halbcylinder h ist innwendig weiss angestrichen und seine ebene Vorderfläche mit Milchglas oder weissem ölgetränktem Papier abgeschlossen.

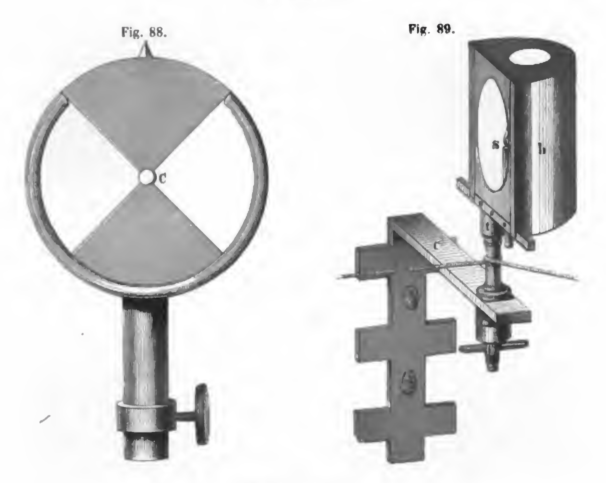


Fig. 88. Fig. 89.

Heliotrope.

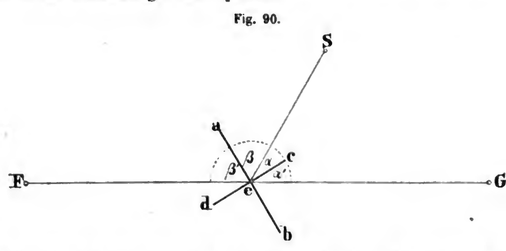
§. 88. Die Signale für grosse Vermessungen sind oft so weit von einander entfernt und manchmal so ungünstig beleuchtet, dass sie nicht mit der Schärfe anvisirt werden können, welche jene Messungen erfordern. In solchen Fällen macht man einem entfernten Beobachter die Stelle eines Signals, auf welche er sein Fernrohr zu richten hat, durch eine Vorrichtung deutlich sichtbar, welche das auf sie fallende Sonnenlicht von ihrem Standpunkte nach dem entfernten Beobachtungsorte hinstrahlt und desshalb Heliotrop (Lichtwender, Sonnenspiegel) heisst. Wir werden zwei solche Vorrichtungen kennen lernen: eine von Gauss in Göttingen, welche ihr Erfinder im 5ten Bande der astronomischen Nachrichten von Schumacher beschrieb, und eine andere von Steinheil in München, welche derselbe im Jahrgange 1844 des astronomischen Jahrbuchs von Schumacher veröffentlichte.

Das Heliotrop von Gauss.

§. 89. **Theorie.** Die Einrichtung dieses Instruments gründet sich auf das Grundgesetz über die Zurückwerfung des Lichts. Stellen in Fig. 90 die Linien ab und cd zwei ebene Spiegel vor, welche senkrecht auf einander stehen und ihre spiegelnden Flächen nach entgegengesetzten Seiten wenden, und trifft in einer auf die Schnittlinie (e) senkrechten Richtung (Se) Licht auf beide Spiegel, so wird ein Theil dieses Lichts von dem Spiegel ab in der Richtung eG und ein anderer Theil von dem Spiegel cd in der Richtung eF zurückgestrahlt. Diese zwei Richtungen sind aber

einander genau entgegengesetzt; denn da nach dem angeführten optischen Gesetze der Winkel $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$, nach der Figur aber $\alpha + \beta = 90^0$ ist, so beträgt die Summe aller zwischen eF und eG liegenden Winkel 180^0, d. h. diese Richtungen sind parallel.

Fig. 90.

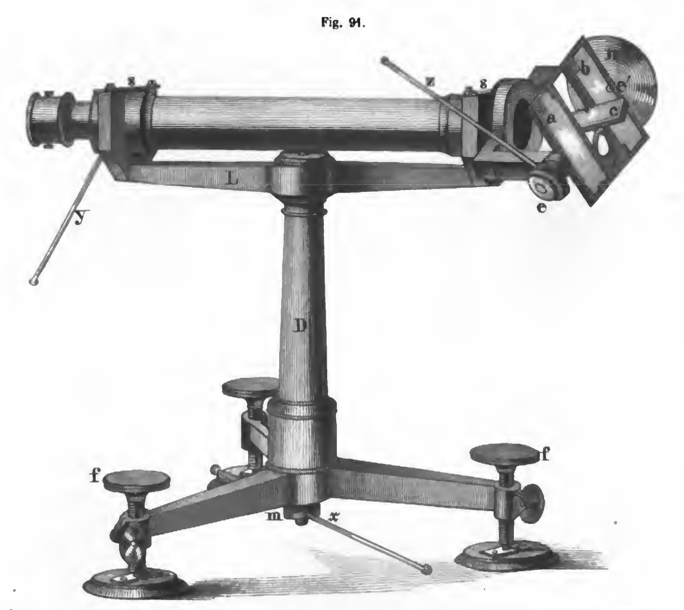


Stellt man sich nun unter S die Sonne und unter Se diejenige Richtung ihrer Strahlen vor, welche gegen die Durchschnittslinie e der beiden Spiegel senkrecht steht, so ist klar, dass man in den Punkten F und G das Sonnenlicht in zwei Richtungen empfängt, welche mit dem Durchschnittspunkt e der Spiegel in einer Geraden liegen; woraus sich dann von selbst ergibt, dass, wenn man die Strahlen eF in die Richtung zweier gegebener Punkte (F, G) bringt, die Strahlen eG nothwendig in derselben Geraden FG liegen müssen. Die Richtung FG wird durch ein in F befindliches und auf G eingestelltes Fernrohr angegeben, während der vor dessen Objectiv angebrachte Spiegel ab die Strahlen in der Richtung eG zurückwirft, sobald dem andern Spiegel cd eine Stellung gegeben wird, bei welcher die Strahlen eG mit der Axe des Fernrohrs parallel laufen, d. h. das Sonnenbild auf dem Fadenkreuze erscheint.

§. 90. Die wesentlichen Bestandtheile des Gauss'schen Heliotrops, wovon Fig. 91 eine perspectivische Ansicht gibt, sind das Gestelle, das Fernrohr und das Spiegelwerk.

Das Gestelle hat die Bestimmung, das Fernrohr, an dem sich das Spiegelwerk befindet, zu tragen und zu gestatten, dass man dieses Rohr nicht bloss auf einen entfernten Punkt genau einstellen, sondern auch um seine mechanische Axe drehen kann, bis die Durchschnittslinie der beiden Spiegel (die Spiegelaxe) senkrecht gegen die Richtung der Sonnenstrahlen steht. Desshalb besteht es aus einer durchbohrten Säule (D), welche auf einem Dreifusse mit Stellschrauben (f, f) ruht und in ihrer Höhlung den Zapfen des Fernrohrträgers (L) birgt. Dieser Zapfen ist mit dem Träger festverbunden und kann leicht gedreht werden, nachdem die unterhalb der Säule befindliche Schraubenmutter (m) durch den Stift x gelüftet worden ist. Durch diese Drehung und durch die Hebung und Senkung der Fussschrauben ist es möglich, dem Fernrohr jede beliebige Richtung zu geben, während es sich mit Hilfe des Stiftes y um seine Axe drehen lässt.

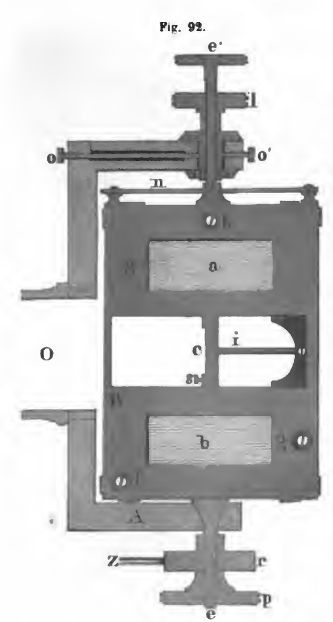
Fig. 91.



Das Fernrohr ist ein mit Fadenkreuz versehenes astronomisches Fernrohr, wie es in §. 63 beschrieben wurde. In seinen Lagern wird es durch Schliessen (s, s) in der Art festgehalten, dass es sich durch den Stift y nur mit ziemlicher Reibung um seine Axe drehen lässt. Damit es sich wirklich um seine mechanische Axe drehe, müssen die Ansätze, womit es aufliegt, vollkommene Cylinder von gleicher Dicke seyn. Zum Schutz der Augen lässt sich vor das Ocular ein gefärbtes Glas legen, ohne das man nicht beobachten darf.

Das Spiegelwerk, welches in Fig. 92 zum Theil im Durchschnitte und theilweise im Grundrisse (in grösserem Massstabe als Fig. 91) gezeichnet ist, wird an der Fassung des Objectives festgeschraubt. Ein gabelförmiges Messingstück (A) trägt den Spiegelrahmen, dessen Bewegung um die Spiegelaxe (e e') geschieht, welche den Spiegelebenen parallel und zur Fernrohraxe senkrecht ist. Die Drehung um diese Axe wird mit dem Stifte z bewirkt. Der grössere Spiegel, welcher dem entfernten Beobachter das Sonnenlicht zuzuführen hat, besteht aus zwei Abtheilungen a und b, zwischen denen der kleinere gegen das Fernrohr gerichtete Spiegel c steckt.

Fig. 92.



Beide Spiegel müssen vollkommen eben und parallel seyn; der kleinere ist jedoch, da er das Licht nur auf kurze Entfernung zurückzustrahlen hat und das vor dem Fernrohre befindliche Auge nicht belästigen soll, auf der Rückenfläche nicht mit Folie belegt, sondern geschwärzt oder mattgeschliffen. Die beiden Hälften des grossen Spiegels werden, wenn sie zu stark strahlen, wie in Fig. 92, mit einer Messingblende (B) bedeckt. Verschiedene Stellschräubchen dienen zur Berichtigung der Spiegel. Auf der Spiegelaxe steht eine dünne Messingscheibe (n) senkrecht, um durch ihren Schatten anzuzeigen, ob das Sonnenlicht senkrecht gegen die Spiegelaxe einfällt, wie es der Theorie zur Folge seyn muss.

§. 91. **Gebrauch.** Das fehlerfreie Gauss'sche Heliotrop wird zwischen zwei gegebenen Punkten (F, G) in folgender Weise gebraucht. Man bringt die Spiegelaxe in den einen gegebenen Punkt (F) und richtet das Fernrohr so auf den anderen Punkt (G), dass er von dem Fadenkreuze gedeckt wird. Hiebei muss das Spiegelwerk so zurückgedreht seyn, dass man über den kleinen Spiegel wegsehen kann. Dann nimmt man, mit dem Auge durch das geblendete Ocular sehend, gleichzeitig folgende zwei Drehungen vor: mit der linken Hand an dem Stifte y der Fernrohraxe, und mit der rechten Hand an dem Stifte z der Spiegelaxe. Durch die erste macht man die Spiegelaxe senkrecht gegen die Richtung der Lichtstrahlen, und durch die zweite bringt man das Sonnenbild auf das Fadenkreuz. Die Spiegelaxe hat die richtige Stellung, wenn der Schatten der Messingscheibe n ein schmaler Streifen ist und dabei das Sonnenbild den Fadenkreuzpunkt centrisch umgibt. Sobald diese Erscheinungen eintreten, kann man sicher seyn, dass der Beobachter in G bei guter Beschaffenheit der Luft das Sonnenlicht in F als einen hellen Stern erblickt, den er nunmehr anvisiren kann.

Durch die scheinbare Bewegung der Sonne wird die Richtung der Lichtstrahlen gegen die Spiegelaxe geändert und es tritt das Sonnenbild aus der Axe des Fernrohrs, wenn nicht die Spiegelaxe nach dem Gange der

Sonne, d. h. so gedreht wird, dass fortwährend der Schatten der Scheibe n als schmaler Streifen und das Sonnenbild auf dem Fadenkreuze erscheint.

§. 92. **Prüfung und Berichtigung.** Vor dem Gebrauche des Heliotrops sind mit demselben folgende fünf Untersuchungen vorzunehmen:

1) ob das Objectiv und das Fadenkreuz centrirt sind;

2) ob die Drehaxe der Spiegel senkrecht steht zur Fernrohraxe;

3) ob alle Spiegelebenen ihrer Drehaxe parallel sind;

4) ob die beiden Ebenen des grossen Spiegels zusammenfallen oder doch wenigstens parallel sind; endlich

5) ob die beiden Spiegel genau senkrecht gegen einander stehen.

Zu 1. Diese Untersuchungen und die dadurch angezeigten Berichtigungen werden ganz so vorgenommen, wie in §. 65 gelehrt wurde. Dabei versteht es sich von selbst, dass das Spiegelwerk so zurückgedreht seyn muss, dass das Objectiv von dem kleinen Spiegel nicht verdeckt wird.

Zu 2. Man stelle das Heliotrop auf eine feste Unterlage und richte die Spiegelaxe ee′ (Fig. 93) nach dem Augenmass lothrecht, den Führungsstift (zz′) aber parallel der Fernrohraxe (vw). Nun hänge man an diesem Stift mit feinen Drähten eine empfindliche Libelle (n) so auf, dass sie nahehin einspielt, und bringe dieselbe durch die Schrauben des Dreifusses ganz zum Einspielen. Hierauf drehe man den Stift zz′ mit der Spiegelaxe um 180⁰, hebe das Fernrohr vorsichtig aus seinen Lagern und lege es in der entgegengesetzten Richtung wieder ein, wie Fig. 94 zeigt. Spielt die Libellenblase wieder ein, so hat die Spiegelaxe die rechte Stellung gegen die Fernrohraxe; ausserdem aber zeigt der Ausschlag den doppelten Fehler dieser Stellung an und es ist die eine Hälfte an den Fussschrauben, die andere an der Spiegelaxe durch die Schräubchen o, o′ (Fig. 92), deren Wirkung man sich leicht erklären kann, zu verbessern. Die Zurückführung des Fernrohrs und Stifts in die erste Lage lehrt, ob der angezeigte doppelte Fehler richtig vertheilt wurde; findet noch eine Abweichung statt, so ist

Fig. 93.

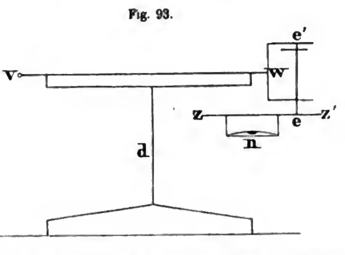
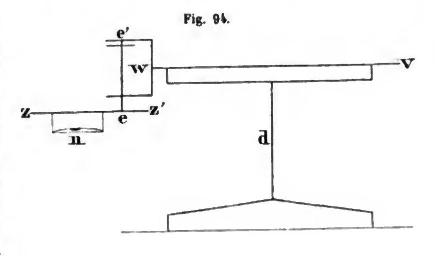


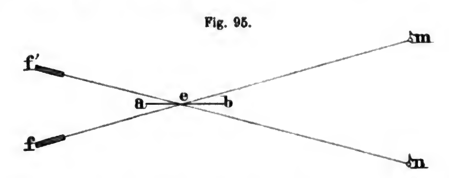
Fig. 94.



das eben beschriebene Verfahren, dessen Richtigkeit sich der Leser selbst beweisen wird, zu wiederholen.

Zu 3. Das Verfahren, durch welches die parallele Lage der Spiegelebenen mit ihrer Drehaxe hergestellt wird, beruht auf dem Satze, dass eine Ebene durch eine halbe Drehung um eine ihr parallele Axe in eine mit ihrer ersten Lage parallele aber entgegengesetzte Stellung gebracht wird, und dass die beiden Lagen der gedrehten Ebene nicht mehr parallel sind, wenn die Drehaxe zu ihr nicht parallel ist.

Fig. 95.



Um dieses Verfahren anzuwenden stelle man zwei mit Fadenkreuzen versehene Fernrohre (f, f') so auf, dass deren Axen sich schneiden und auf ihnen die Gegenstände m und n, welche 60 bis 80 Fuss entfernt sind, deutlich erscheinen. Nun befestige man das Spiegelwerk auf einem Holzwürfel so, dass seine Axe dem Augenmasse nach auf der oberen Fläche des Würfels senkrecht steht, und bringe alsdann die zu prüfende Spiegelebene in den Durchschnittspunkt e der optischen Axen der Fernrohre, so dass sie auf der Ebene dieser Axen senkrecht steht und den Winkel men nahezu halbirt. Durch kleine Drehungen des Spiegels (oder vielmehr des ihn tragenden Würfels) kann man bewirken, dass der Gegenstand n auf der Axe des Fernrohrs f erscheint. Wendet man nun den Spiegel um seine eigene Axe auf die andere Seite, so wird er den Punkt m spiegeln. Trifft dessen Bild auf die Axe des Fernrohrs f', so ist ohne Zweifel die Axe des Spiegels seiner Ebene parallel; weicht es aber von der Fernrohraxe ab, so rührt die eine Hälfte des angezeigten Fehlers von der Lage der Spiegelaxe gegen die Spiegelebene und die andere Hälfte von der Lage des Holzwürfels her. Beide Fehlertheile müssen nun so lange verbessert werden, bis nach einer halben Drehung des Spiegels nach rechts oder links das Spiegelbild der Punkte n und m auf der optischen Axe des auf der Spiegelseite stehenden Fernrohrs erscheint. Die Lage der Spiegel gegen ihre Axe wird durch Schräubchen f, g, k (Fig. 92), denen entsprechende Federn entgegenwirken, verbessert.

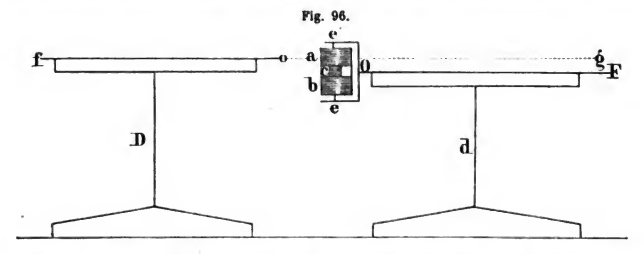
Zu 4. Das einfachste und hinreichende Genauigkeit gewährende Mittel, sich von der parallelen Lage beider Hälften des grossen Spiegels zu überzeugen, besteht darin, dass man eine gerade Linie, z. B. die lothrechte Kante eines massiven Gebäudes, mit der man die Spiegelaxe dem Augenmasse nach parallel stellt, in den Bestandtheilen des grossen Spiegels

betrachtet und zusieht, ob ihr Bild eine einzige gerade Linie ist oder nicht. Erscheint bloss ein Bild, so sind die Spiegelhälften parallel; sieht man aber zwei Linien, welche sich gegen einander neigen, so kommt dieses offenbar von der fehlerhaften Lage eines Spiegels her, welche demnach zu verbessern ist. Hiezu dient die in Fig. 92 mit k bezeichnete Stellschraube.

Ein anderes Mittel, die vierte Untersuchung zu machen, ist am Ende der folgenden Nummer angegeben.

Zu 5. Um zu untersuchen, ob der kleine und grosse Spiegel senkrecht auf einander stehen, stelle man nach Fig. 96 das Heliotropenfernrohr (F)

Fig. 96.



und ein zweites Fernrohr (f) so auf, dass ihre optischen Axen parallel sind und die des Hilfsfernrohrs (f) um etwa einen Zoll höher liegt als die des Hauptrohrs. Diese Forderung wird am einfachsten dadurch erfüllt, dass man das Fernrohr F, nachdem es auf einen gut beleuchteten sehr fernen Gegenstand gerichtet war, aus seinen Lagern hebt und umkehrt, hierauf aber das Hilfsfernrohr in der angegebenen Höhe ebenfalls auf jenen Gegenstand einstellt. Nun mache man die Spiegelaxe nahezu lothrecht und bewirke durch entsprechende Drehung an dem Spiegel und dem Fernrohre, dass ein zur Seite stehender Gegenstand (Q) durch Zurückstrahlung aus dem kleinen Spiegel auf der Axe des Hauptfernrohrs erscheine. Zeigt dann gleichzeitig das Hilfsfernrohr f das Bild von Q auf seiner Axe, so steht der kleine Spiegel senkrecht zu der oberen Hälfte des grossen Spiegels, und folglich auch zu der unteren, wenn beide vorher nach Nr. 4 parallel gestellt waren. Tritt die angegebene Erscheinung nicht ein, so wird die Lage des kleinen Spiegels durch die auf die Feder i (Fig. 92) wirkende und am unteren Ende derselben angebrachte Schraube verbessert, indem man dieselbe nach Erforderniss lüftet oder anzieht.

Dieses Verfahren gründet sich, wie man sieht, auf dieselbe Wirkung zweier senkrecht auf einander stehender Spiegel, welche der Einrichtung des Gauss'schen Heliotrops zu Grunde liegt. Man kann dasselbe auch benützen, um die vorhergehende Berichtigung (Nr. 4) zu prüfen, indem man das Hauptfernrohr um 180° in seinen Lagern dreht und nachsieht, ob die zweite Hälfte des grossen Spiegels, welche jetzt oben ist, einen auf der

entgegengesetzten Seite von Q befindlichen Gegenstand Q' auf der optischen Axe des Hilfsfernrohrs abbildet, wenn ihn der kleine Spiegel auf der Axe des Hauptfernrohrs zeigt.

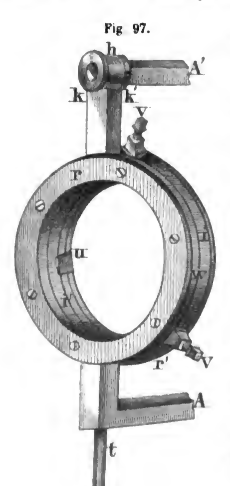
In Hinsicht der Aufeinanderfolge der Untersuchungen ist zu bemerken, dass es nöthig ist, Nr. 3 vor Nr. 4 zu machen, weil im entgegengesetzten Falle eine Berührung der Schraube f die Berichtigung Nr. 4 wieder stören würde, während es sich von selbst versteht, dass die Untersuchung Nr. 1 der Nr. 5 vorausgehen muss.

Das Hilfsheliotrop von Stierlin.

§. 93. Ein Theodolith oder ein Nivellirinstrument kann in ein Gauss'-sches Heliotrop umgewandelt werden, wenn man das oben beschriebene Spiegelwerk an dem Objectivende des Fernrohrs des Theodolithen oder des Nivellirinstruments befestigt. Nach der Angabe von Stierlin wird diese Befestigung für Fernrohre von verschiedener Grösse, welche sich nicht um ihre optische Axe drehen lassen, durch folgende Einrichtung am zweckmässigsten bewerkstelligt.

Die den Spiegel tragende Gabel A ist nach Fig. 97 und Fig. 98 an ein ringförmiges Gehäuse (ii', rr') befestigt, das aus zwei concentrischen Cylindern (i, i') und zwei platten Ringen (r, r') besteht. In diesem Gehäuse befinden sich drei Einsätze (u, u), welche in gleichen Entfernungen den inneren Cylinder (i') durchdringen, und eben so viele Stahlfedern (g, g), welche an dem äusseren Cylinder befestigt sind und gegen die Köpfe der Einsätze drücken. Durch diese Stahlfedern und die drei Stellschräubchen (v, v), welche über den Köpfen der Einsätze stehen, ist es möglich, die Füsse der letzteren gegen die Objectivfassung so zu pressen, dass das Gehäuse (ii', rr') und mit ihm das ganze Spiegelwerk von ihr festgehalten wird. Es versteht sich von selbst, dass die Stellschräubchen in der Art angezogen werden müssen, dass das Gehäuse möglichst centrisch auf dem Fernrohre sitzt.

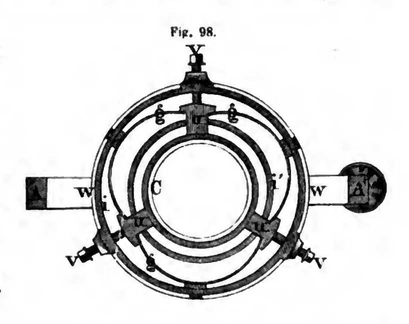
Fig 97.



Durch die Einrichtung, wie sie bis jetzt beschrieben wurde, ist es nicht möglich, das Spiegelwerk um eine zur optischen Axe des Fernrohrs parallele Axe zu drehen, wenn sich, wie hier angenommen wird, das Fernrohr in seinen Lagern nicht drehen lässt. Diese Drehung der Spiegel wird aber dadurch möglich, dass die Gabel A (Fig. 98) an einem Ring (w, w)

befestigt ist, welcher das Gehäuse ii', rr' centrisch umgibt und sich bloss durch seine Reibung auf demselben in jeder Lage erhält, welche man ihm durch den Stift t, der in die Gabel eingeschraubt wird, gibt. An einem um seine optische Axe drehbaren Fernrohre ist der Ring w unnöthig und kann das Spiegelwerk wie an dem Heliotropenfernrohr befestigt werden.

Fig. 98.

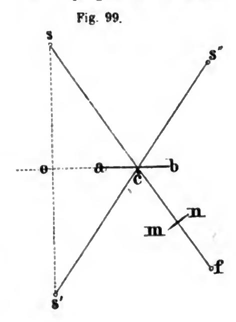


Um eine Hebung des Fernrohrs in seinen Lagern durch das Gewicht des angeschraubten Spiegelwerks zu vermeiden, kann man auf der Ocularseite ein Gegengewicht anbringen, wozu ein hinreichend weiter Ring sich eignet, der ein mit Schroten gefülltes kleines Gefäss trägt.

Das Heliotrop von Steinheil.

§. 94. **Theorie.** Dieses Heliotrop unterscheidet sich von dem vorigen hauptsächlich dadurch, dass es nur einen einzigen Spiegel hat. Bei der Erfindung desselben kam es darauf an, den Spiegel so einzurichten, dass er zwei an Helligkeit verschiedene Bilder von der Sonne zeige, welche zu beiden Seiten des Spiegels und mit der Erzeugungsstelle in einer Richtung liegen, damit das matte Sonnenbild dazu benützt werden könne, das helle auf den Punkt zu richten, von dem aus es gesehen werden soll. Diese Anforderung wird erfüllt, wenn man in der Mitte des Spiegels ein kleines Scheibchen (von etwa einer Linie Durchmesser) des Belegs ablöst und mit der abgelösten Stelle eine convexe Glaslinse auf die Weise in Verbindung bringt, wie es die nebenstehende Figur verlangt.

Fig. 99.



Stellt nämlich in Fig. 99 die Linie ab einen ebenen und parallelen Glasspiegel und s die darauf scheinende Sonne vor, so ist s' deren Spiegelbild, welches von dem Beleg auf der Rückfläche des Glases ab erzeugt wird. Ist in c das Beleg abgenommen, so geht in der Richtung sc Licht durch das Glas, welches von einer senkrecht entgegengestellten Convexlinse mn aufgefangen werden kann. Da

die Lichtstrahlen, welche auf diese Linse treffen, deren Axe parallel sind, so vereinigen sie sich in dem Brennpunkte f der Linse. Befindet sich an dieser Stelle eine weisse Fläche von feiner Kreide, so wird diese das empfangene Licht zum Theil wieder auf die Linse zurückstrahlen, und diese sendet es, weil es vom Brennpunkte kommt, in der Richtung ihrer Axe (fc) auf die unbelegte Stelle c des Spiegels ab. Dort geht ein Theil des Lichts in der Richtung cs weiter, während der übrige Theil in der Richtung cs' zurückgeworfen wird und in s'' ein mattes Sonnenbild erzeugt, das, wie leicht zu beweisen ist, mit c und s' in einer Richtung liegt. Es ist klar, dass das Bild s'' nur hinter dem Spiegel (durch die Scheibe c) und das Bild s' nur vor dem Spiegel (in der Richtung s''c) gesehen werden kann; und eben so leicht ist einzusehen, dass, wenn das Bild s'' einen bestimmten Gegenstand (B) deckt, von diesem Gegenstand aus das helle Sonnenbild s' gesehen werden muss.

Das matte Bild s'' hat ein Aussehen wie der Vollmond und lässt die Gegenstände, welche in seiner Richtung liegen, deutlich durchscheinen; man kann es ganz gut mit blossem Auge ansehen und zur richtigen Stellung des Spiegels benützen, indem man dessen Lage so lange ändert, bis das Bild s'' da zu liegen scheint, wo das Heliotropenlicht gesehen werden soll, das wie ein hellglänzender Stern funkelt.

Da beide Sonnenbilder durch eine und dieselbe Spiegelebene erzeugt werden: das helle nämlich auf der inneren Seite der hinteren belegten Glasfläche und das matte auf der äusseren Seite derselben Fläche, da wo sie von Beleg frei ist, so ergibt sich von selbst, dass das Steinheil'sche Heliotrop gar keiner Berichtigung bedarf.

§. 95. **Beschreibung.** Fig. 100 gibt eine perspectivische Ansicht und Fig. 101 einen lothrechten Durchschnitt des Steinheil'schen Heliotrops in natürlicher Grösse. Der Spiegel (M) hat eine Länge von anderthalb und eine Breite von einem bayerischen Decimalzoll. Er ist in einen Rahmen von Messing gefasst und in der Mitte c nach einem Kreise von 1,3 Linien Durchmesser vom Belege frei gemacht. Der Rahmen lässt sich um eine Axe kk' drehen, welche durch den Mittelpunkt des Scheibchens c geht. Der Spiegelträger (H) steckt mit einem kegelförmigen Zapfen in einer Hülse (D), welche um eine wagrechte Axe (E) gedreht werden kann. Der Zapfen des Trägers H ist durchbohrt und trägt am oberen Ende der Bohrung die kleine Linse m und in der Höhlung die weisse Fläche f, welche auf dem Fuss der Schraube n angebracht ist. Durch die Stellschraube p kann die Drehung des Zapfens gehemmt werden, während die Feder o und die Mutter r dessen Erhebung in der Hülse D verhindern und überhaupt seine Drehung regeln. Ausser den Bewegungen um die drei Axen kk', mn und E ist noch eine vierte um den Gestellzapfen z möglich, welcher von der Hülse F umschlossen ist, an der sich das Scharnier E befindet. Man begreift, wie man durch alle diese Bewegungen dem Spiegel jede beliebige Lage und namentlich eine solche geben kann, bei welcher das durch die

Oeffnung C dringende Licht parallel mit mn auf die Linse m fällt und gleichzeitig das matte Sonnenbild einen gegebenen Punkt (B) deckt. Der Zapfen z endigt abwärts in einer Baumschraube, welche mit der geränderten Scheibe G gedreht wird: das Instrument lässt sich also überall befestigen, wo diese Schraube eindringt.

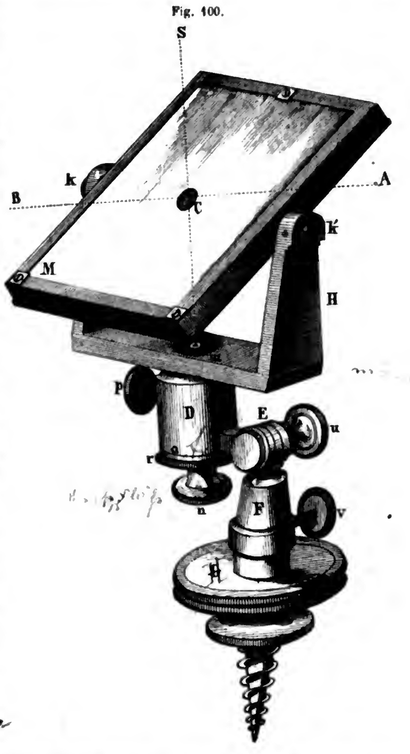
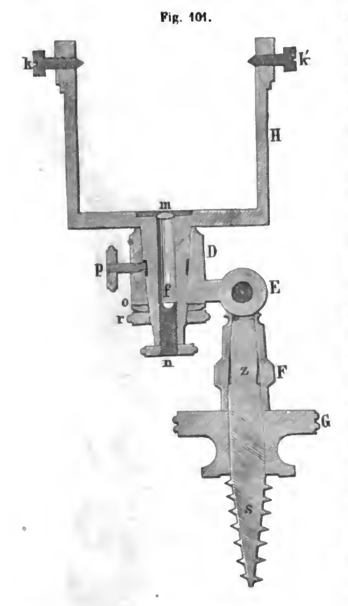


Fig. 100.

§. 96. **Gebrauch.** Das Gestelle wird in dem Punkte, von dem aus einem andern (B) das Sonnenlicht zugeführt werden soll, festgeschraubt und der Träger H des Spiegels um den Zapfen z so gedreht, dass die Spiegelseite gegen die Sonne und den Punkt B steht. Hierauf dreht man den Spiegel um die Axe kk' und diese selbst mit dem Träger H um die Axen mn und E so lange, bis der durch die Stelle c des Spiegels gehende Sonnenschein die Linse m centrisch umgibt. Sobald diese Erscheinung eintritt, steht die Spiegelaxe kk' senkrecht gegen die Richtung der Sonnenstrahlen, während die Linsenaxe damit parallel ist. Nun wird man auch, hinter dem Spiegel durch die Oeffnung c sehend, das matte Sonnenbild in der Luft schwebend erblicken und leicht ermessen, welche Drehungen an den verschiedenen Axen noch weiter vorzunehmen sind, um dieses Bild auf den gegebenen Punkt B zu bringen.

Man kann fragen, ob es möglich ist, das Steinheil'sche Heliotrop, welches kein Fernrohr hat, auf grössere Entfernungen richtig einzustellen, als man mit blossem Auge noch deutlich überschauen kann. Hierauf lässt sich antworten, dass zwar der Punkt, welcher das Heliotropenlicht empfangen soll, noch gesehen werden muss; dass aber dessen Sichtbarkeit durch das Heliotrop

Fig. 101.



selbst verstärkt werden kann. Denn sollen z. B. drei sehr weit entfernte Signalpunkte A, B, C durch drei Heliotrope A′, B′, C′ gegenseitig gut sichtbar gemacht werden, so richtet man zuerst in A ein Fernrohr auf das Signal B ein, wo ein Gehilfe mit dem Heliotrop B′ sich befindet. Stellt man hierauf vor dieses Fernrohr das Heliotrop A′ so, dass die unbelegte Stelle c in der optischen Axe liegt, so versteht sich von selbst, dass das Sonnenlicht von A nach B kommt, sobald das matte Sonnenbild den durch das Fernrohr gesehenen Punkt B deckt. Der Gehilfe in B wird nunmehr das Heliotropenlicht von A mit blossem Auge sehen und darnach sein Heliotrop B′ stellen. Verfährt man mit dem Punkte C, wo ein zweiter Gehilfe mit einem dritten Heliotrop C′ sich befindet, eben so wie mit B: so sieht man in A zwei durch Heliotropenlicht bezeichnete Signale B und C, ohne dass zur Einstellung der daselbst befindlichen Heliotrope ein Fernrohr nöthig gewesen wäre. Die Operation in A zeigt übrigens, wie sich das Steinheil'sche Heliotrop mit einem Fernrohr verbinden lässt.

Das Heliotropenlicht.

§. 97. Baeyer beschreibt in seinem Werke: „Das Nivellement zwischen Swinemünde nnd Berlin“ die Erscheinungen, welche das Heliotropenlicht in grösseren Entfernungen darbietet, folgendermassen:

In den nächsten Stunden am Mittage ist es sehr gross, blass, verwaschen, oft 30 bis 40 Sekunden im Durchmesser haltend und in einer starken hüpfenden Bewegung. Zuweilen ist sogar die Zerstreuung durch die ungleichen Bewegungen der Luft so stark, dass keine Spur des Lichts zu entdecken ist, selbst wenn man die Richtung sehr genau kennt; etwas später wird dann ein grosser matter Lichtschein sichtbar, der allmählig an Helligkeit zu- und an Ausdehnung abnimmt. Dieser Lichtschein erhält nach und nach die Gestalt einer Scheibe von 10 bis 15 Sekunden Durchmesser, die hüpfende Bewegung geht in eine zitternde über und wird endlich so

gering, dass man die Scheibe schon mit ziemlicher Sicherheit beobachten kann. Dieser Zustand tritt bald früher, bald später, in der Regel zwischen 4 und 5 Uhr ein. Die Lichtscheibe wird näher am Abend immer kleiner und ruhiger und geht einige Stunden vor Sonnenuntergang in einen kleinen, oft ganz unbeweglichen Punkt über, der erst mit dem Untergang der Sonne verschwindet. In der Nähe der Küste, im flachen Lande oder da, wo der Lichtstrahl nahe am Erdboden fortgeht, tritt sehr häufig nach der Ruhe der Bilder mehr oder weniger kurz vor dem Abend ein zweites Zittern ein, welches sich von dem ersten dadurch unterscheidet, dass es nicht immer eine Lichtscheibe bildet, sondern mehr in einem Hüpfen des kleinen Lichtpunktes besteht, das aber meist so stark wird, dass ein Beobachten darnach unmöglich ist. Des Vormittags findet dieselbe Erscheinung, nur in umgekehrter Ordnung und mit der Abänderung statt, dass das Bild nur selten und auf kurze Zeit in einen kleinen ruhigen Lichtpunkt übergeht. Die Dauer der ruhigen Bilder ist an einzelnen Tagen sehr verschieden und am längsten bei warmem, trockenem, anhaltend heiterem Wetter.

Gauss gibt über die Wirkung des Heliotrops Folgendes an: Auf die Entfernung vom Lichtenberge nach dem Berge Hill, welche 39952 Meter oder 5,4 deutsche Meilen beträgt, sah man das Heliotropenlicht immer mit blossem Auge; unter besonders günstigen Umständen war es zwischen dem Brocken und dem Hohenhagen auf eine Entfernung von 69194 Meter oder 9,3 deutschen Meilen auch noch mit blossem Auge wahrzunehmen und in der Entfernung von 105986 Meter oder 14,2 deutschen Meilen zwischen dem Brocken und dem Inselsberge konnte es mit dem Fernrohre gesehen und gegen Sonnenuntergang noch sehr scharf anvisirt werden.

Eine untergeordnete aber für grosse Vermessungsarbeiten nicht unwichtige Anwendung des Heliotrops besteht in der Benützung desselben zur Mittheilung von Nachrichten zwischen zwei Beobachtern an zwei entfernten Signalen. Man kann nämlich mit zwei gegeneinander gestellten Heliotropen in folgender Weise leicht telegraphiren.

Als Ankündigung des Telegraphirens dienen sehr schnell auf einander folgende Verdeckungen des Spiegels mit der Hand. Dadurch entsteht ein in der Ferne leicht wahrnehmbares Blitzen. Der Empfänger der Nachricht erwiedert dieses Zeichen, wenn er bereit ist, die Mittheilung entgegenzunehmen. Es versteht sich wohl von selbst, dass sich die Nachrichten nur auf die dringendsten Bedürfnisse der eben auszuführenden Messungen beziehen und daher durch Zahlen ausgedrückt werden können, deren Bedeutung man schon vorher festgesetzt hat, wie z. B. (nach Baeyer)

für die Zahl 1: Ich sehe das Licht schlecht.
„ „ „ 2: Das Licht verkleinern.
„ „ „ 3: Das Licht vergrössern.
„ „ „ 4: Ich bin fertig und will abreisen.
„ „ „ 5: Ich bin verhindert zu beobachten.
„ „ „ 6: Das Hinderniss ist gehoben.

für die Zahl 7: Ich bitte um Licht.
„ „ „ 8: Ich bin noch nicht fertig.
„ „ „ 9: Ich kann das Licht jetzt nicht gebrauchen.
„ „ „ 10: Es ist ein Bote unterwegs.

Will man nun, nachdem eine Nachricht angemeldet und ihre Annahme erwiedert ist, die Mittheilung (1) machen, so verdeckt man den Spiegel 30 Sekunden lang, macht ihn dann 30 Sekunden lang frei und verdeckt ihn hierauf abermals: der Lichtblick von 30 Sekunden Dauer stellt somit die Zahl 1 dar; zwei durch ein Dunkel von 30 Sekunden getrennte Lichtblicke, jeder zu 30 Sekunden bedeuten die Zahl 2; drei solche Lichtblicke die Zahl 3 u. s. f.

Dass eine Nachricht verstanden worden sey, wird dadurch angedeutet, dass man sie erwiedert, wenn sie bejaht werden soll, wie z. B. (2) durch (2), (3) durch (3) u. s. w.; und dass man sie durch eine andere Zahl beantwortet, wenn sie nicht bejaht werden kann, wie z. B. (4) durch (8), (7) durch (10) u. s. w.

Dritter Abschnitt.

Instrumente zum Winkelmessen.

§. 98. Die Winkel, welche durch Messinstrumente aufgenommen oder auf das Feld übergetragen werden, können verschiedene Lagen gegen loth- oder wagrechte Linien und Ebenen haben. Nach dieser Lage werden sie verschieden benannt.

Ein Winkel, dessen Schenkel in einer wagrechten Ebene liegen, heisst ein wagrechter Winkel (Horizontalwinkel); liegen seine Schenkel in einer lothrechten Ebene, so nennt man ihn einen lothrechten Winkel (Vertikalwinkel); und liegen seine beiden Schenkel in einer Ebene, die weder loth- noch wagrecht ist, so heisst er ein schiefer Winkel. Jeder dieser Winkel kann ein rechter, spitzer, stumpfer oder erhabener Winkel seyn.

Hat ein lothrechter Winkel einen wagrechten Schenkel, so heisst er insbesondere ein Höhenwinkel (Elevationswinkel), wenn der zweite Schenkel über dem ersten liegt, und ein Tiefenwinkel (Depressionswinkel), wenn der zweite Schenkel unter dem ersten liegt. Ist aber ein Schenkel eines lothrechten Winkels selbst lothrecht, so kann man einen solchen Winkel einen Zenithwinkel[1] nennen.

[1] Eigentlich ist dafür der Name »Zenithdistanz« gebräuchlich; aber diese Bezeichnung ist nicht gut gewählt, weil man sich hier unter dem Ausdruck »Distanz« einen Kreisbogen zu denken hat, welcher den Winkel des geneigten Schenkels gegen das Loth misst, während man sonst unter diesem Worte nur den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten versteht.

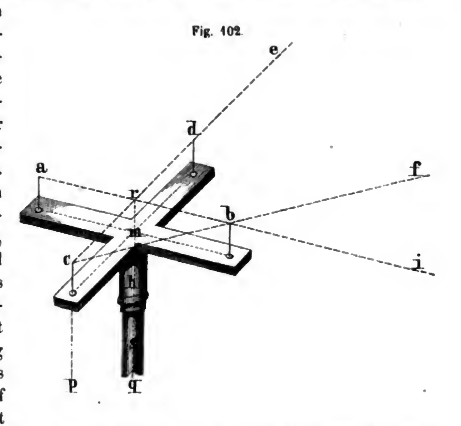
Man kann die aufzunehmenden oder abzusteckenden Winkel entweder dem Gradmasse nach bestimmen oder durch Zeichnung darstellen. Je nachdem die Grösse eines Winkels auf diese oder jene Art ausgedrückt werden soll, sind die dazu dienenden Instrumente wesentlich verschieden. Es lässt sich desshalb hierauf eine Eintheilung der Winkelmesser gründen. Einen anderen Eintheilungsgrund gibt der Umstand ab, ob es nöthig ist, beide Winkelschenkel anzuvisiren oder nur einen. Wir ziehen die erstere Eintheilungsart vor, weil sie die für einen bestimmten Zweck gebotenen Mittel besser überschauen lässt als die zweite, finden es jedoch für nöthig, drei statt zwei Abtheilungen zu machen, um die Werkzeuge, welche nur gewisse unveränderliche Winkel angeben, von denen zu trennen, welche jeden beliebigen Winkel darstellen.

A. Instrumente zur Absteckung von unveränderlichen Winkeln.

Das Winkelkreuz.

§. 99. Die einfachste Vorrichtung zur Absteckung eines rechten Winkels besteht in der Verbindung eines mit zwei Diopteren versehenen rechtwinklichen Kreuzes mit einem Stocke, der als Gestelle dient (Fig. 102.) Die Visirebenen der Diopter stehen senkrecht zu einander und in ihrer Schnittlinie liegt die Axe des Stockes. Das Kreuz kann aus Holz oder Metall bestehen, in jedem Falle aber muss es sich mit einer Hülse rechtwinklig auf das Gestelle befestigen lassen, sobald es gebraucht wird. Die Diopter haben irgend eine der in §. 23 beschriebenen Einrichtungen: hier sind sie bloss durch senkrechte Stifte angedeutet. Diese Stifte und folglich auch die durch sie bestimmten Visirebenen, sind lothrecht, sobald die Ebene des Kreuzes wagrecht oder der tragende Stock lothrecht ist. Bei der Absteckung eines rechten Winkels kommt es immer darauf an, den Stock lothrecht zu halten. Ist das Auge für diese Stellung noch nicht hinreichend geübt, so kann man sie durch einen unter dem Kreuz angehängten Senkel prüfen.

Fig. 102.



Will man mit diesem Werkzeuge auf eine gegebene Richtung eine

Senkrechte abstecken, so stelle man den Stock in dem gegebenen oder angenommenen Fusspunkte der Senkrechten lothrecht auf, drehe das Kreuz mit dem Stocke so, dass eine Absehlinie (a b) in die gegebene Richtung fällt und richte hierauf in die zweite Absehlinie (cd) einen Stab (e) ein, so bezeichnet dieser und der Stock des Winkelkreuzes die gesuchte Senkrechte — vorausgesetzt, dass das Werkzeug fehlerfrei ist, d. h. wirklich senkrecht gegen einander stehende Visirebenen hat.

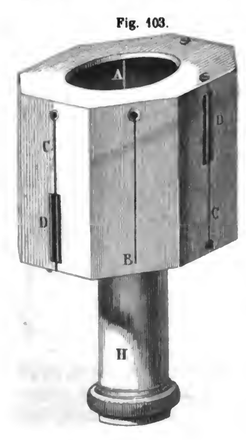
Um sich hievon zu überzeugen, darf man nur, nachdem die Absteckung des Stabes e durch die Visirebene cd vollzogen ist, diese Ebene in die gegebene Richtung drehen und zusehen, ob der Stab e auch in der Visirebene ba steht. Ist dieses der Fall, so steht offenbar ab senkrecht auf cd, weil die Nebenwinkel brd und dra einander gleich sind. Läge bei der zweiten Stellung der Stab e nicht in der Visirebene ba, so müsste ein Stift (a oder b) so lange fort versetzt werden, bis die genannten Nebenwinkel und folglich alle vier Winkel um r einander gleich würden.

Man sieht leicht ein, dass sich mit dem Winkelkreuze, welches selbstverständlich nicht für genaue Messungen berechnet ist, auch Winkel von 45^0 abstecken lassen, wenn man die Abstände der Diopterstifte von dem Mittelpunkte r gleich gross macht und einmal in der Diagonale, das anderemal in der Seite des hierdurch entstehenden Quadrats (abcd) visirt.

Die Winkeltrommel.

§. 100. Vier Seiten der Trommel (Fig. 103), wovon je zwei parallel sind und jedes Paar auf dem anderen senkrecht steht, haben Diopter, deren Oculare und Objective beide aus Ritzen (wie A und B) bestehen, während auf jeder der übrigen vier Seiten gleichzeitig eine Ritze (C, C') als Ocular und ein ausgespanntes Pferdehaar (D, D') als Objectiv dient, wobei sich von selbst versteht, dass nur die auf parallelen Seiten befindlichen Oculare und Objective zusammengehören. Die Visirebenen A B, A'B' und ebenso C D, C'D' stehen unter sich senkrecht gegen einander und schneiden sich in der Axe der Trommel, welche auch die Axe der Hülse H und des in sie zu steckenden Stockes ist. Dagegen bilden die Visirebenen AB und CD oder AB und C'D' u. s. w. mit einander Winkel von 45 Graden. Man kann folglich mit der Winkeltrommel gerade so wie mit dem Winkelkreuze ganze und halbe rechte Winkel abstecken, und das Verfahren,

Fig. 103.



welches man bei der Prüfung des Instruments zu befolgen hat, ist ebenfalls dem im vorigen Paragraphen angegebenen gleich.

Der Winkelspiegel.

§. 101. Seit Erfindung des Winkelspiegels, [1] welche mit der des Spiegelsextanten zusammenhängt und in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts von dem Optiker Adams in London gemacht wurde, sind die Winkelkreuze und Trommeln wenig mehr im Gebrauche. Denn der Winkelspiegel bedarf keines Stockes als Gestelle und er liefert eine senkrechte Richtung durch einmaliges Visiren, wozu ein einziger Augenblick der Ruhe hinreicht.

Die beigedruckte Figur zeigt den Winkelspiegel in natürlicher Grösse. In einem offenen prismatischen Messinggehäuse (A B C), mit zwei fensterartigen Oeffnungen (F, F') und einem senkrechten Griffe an der unteren Fläche, befinden sich zwei ebene Glasspiegel (S und S'), welche auf der Grundfläche (C) des Gehäuses senkrecht stehen und einen Winkel von 45⁰ mit einander bilden. Jeder dieser Spiegel ist in starkes Messingblech gefasst und beide Fassungen sind mit einander durch eine Feder (G), welche an der Rückwand des Gehäuses befestigt ist, verbunden. Während der eine Spiegel (S) unverrückbar feststeht,

Fig. 104.



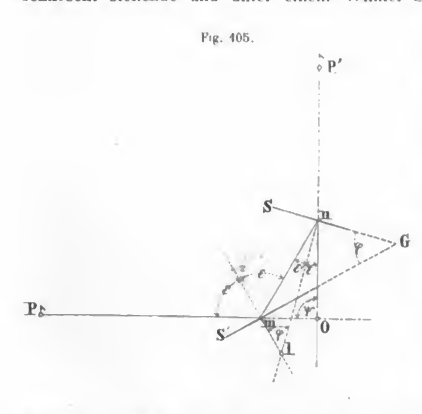
kann der andere (S') durch die Stellschräubchen a und b, welche auf seine Fassung wirken, so weit gedreht werden, als nöthig ist, um ihm die vorgeschriebene Neigung von 45⁰ gegen den ersten Spiegel zu geben, wenn er sie zeitweise nicht haben sollte. Von diesen zwei Schräubchen sitzt das eine (a) auf der Gehäuswand BC auf und greift mit seiner Spindel in ein Gewinde in der Fassung des Spiegels S' ein, während das andere (b) mit seinem Kopfe von der Gehäuswand absteht und mit seinem Fusse auf die

[1] Diese Erfindung ist eigentlich nur eine Anwendung des allgemeinen Princips, welches dem Spiegelsextanten zu Grunde liegt, auf einen besondern Fall.

Spiegelfassung bloss drückt aber nicht in sie eingreift. Man sieht sofort ein, dass, wenn man a zurück- und b vorwärts dreht, der Winkel der Spiegel kleiner, und umgekehrt, wenn man b zurück- und a vorwärts dreht, dieser Winkel grösser wird.

§. 102. Theorie. Stellen GS und GS' (Fig. 105) zwei auf einer Ebene senkrecht stehende und unter einem Winkel $SGS' = \varphi$ gegen einander geneigte Planspiegel vor, und trifft auf einen von ihnen (hier S'G) das von einem leuchtenden Punkte P ausgehende Licht in einer Richtung Pm (die wir uns mit der Ebene, worauf die Spiegel stehen, parallel denken), so wird es unter dem Winkel ε, mit dem es gegen das Loth in m fällt, in der Richtung mn auf den zweiten Spiegel zurückgestrahlt. Bildet es daselbst mit dem Lothe den Winkel ε', so geht es in der Richtung nO, welche mit diesem Lothe den Winkel

Fig. 105.



ε' macht, zurück, und ein Auge in O erblickt den Punkt P nach der Richtung On in P' abgebildet. Da für das Dreieck mnl der Aussenwinkel $\varepsilon = \varphi + \varepsilon'$ und für das Dreieck mOn der Aussenwinkel $2\varepsilon = \psi + 2\varepsilon'$, so folgt aus diesen beiden Gleichungen, wenn die erste mit 2 multiplicirt wird:

$$\psi = 2\varphi, \quad \ldots \ldots \quad (84)$$

d. h. der einfallende Strahl bildet mit dem zweimal zurückgeworfenen einen doppelt so grossen Winkel als die auf einer Ebene senkrecht stehenden Planspiegel, von welchen die Zurückwerfung ausgeht.

Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass die eintretenden Lichtstrahlen mit der Ebene, worauf die Spiegel stehen, parallel sind. Wären sie es nicht, so könnten auch die austretenden Strahlen mit der Grundebene nicht parallel seyn, wie eine einfache geometrische Betrachtung lehrt, die sich auf das Grundgesetz der Katoptrik stützt. Dann würde aber auch nicht mehr der Winkel der ein- und austretenden Strahlen selbst, sondern der ihrer senkrechten Projectionen auf die Grundebene in der durch die Gleichung (84) ausgedrückten Beziehung zu dem Winkel der Spiegel stehen.

Soll nun, unter der ursprünglichen Annahme paralleler Strahlen, der Winkel ψ ein rechter seyn, so muss nach dem eben ausgesprochenen Satze nothwendig $\varphi = 45^0$ seyn. Ist der Winkel $\varphi > 45^0$, so wird $\psi > 90^0$, und umgekehrt wird $\psi < 90^0$, wenn $\varphi < 45^0$ ist.

§. 103. **Gebrauch.** Soll mit einem Winkelspiegel, den wir uns jetzt fehlerfrei denken, auf eine gegebene gerade Linie (PO) in einem gegebenen Punkte (O) derselben eine Senkrechte (OP') abgesteckt werden, so halte man lothrecht über dem gegebenen Punkt den Winkelspiegel so, dass von dem Stabe P Licht auf den einen ihm zugewandten Spiegel (GS') fallen kann und sehe mit dem Auge, das sich bei O vor der Gehäuswand BC des Winkelspiegels befindet, durch die Oeffnung F' gleichzeitig in den Spiegel GS und durch die zweite Oeffnung nach dem Stabe P', welchen ein Gehilfe in entsprechender Entfernung von O mit ausgestrecktem Arme lothrecht zwischen den Fingern hält, des Winkes gewärtig, den man ihm mit der Hand gibt, um den Stab in die Richtung zu bringen, in welcher sich das Bild von P zeigt. Erscheint endlich der Stab P' als die Fortsetzung des Bildes von P (d. h. stehen beide in gerader lothrechter Richtung), so ist die Aufgabe gelöst und POP' ein rechter Winkel.

§. 104. **Prüfung und Berichtigung.** Um zu untersuchen, ob ein Winkelspiegel seinem Zwecke genügend entspricht, stelle man drei Stäbe (P, O, R) in eine gerade Linie, die äusseren vom mittleren etwa 100 Fuss entfernt. Alsdann stecke man nach dem vorigen Paragraphen auf die Richtung PO die Gerade OP' und auf OR die Gerade OR' senkrecht ab. Fallen diese zwei Geraden in eine einzige Richtung zusammen, so ist der Winkelspiegel offenbar richtig, weil er in jedem Falle einen Winkel (POP' und ROR') lieferte, der einen gleichen Nebenwinkel hat, also selbst ein rechter ist. Liegen dagegen OP' und OR' in verschiedenen Richtungen, so können zwei Fälle eintreten: entweder liegt nämlich das Bild von P auf der Seite des Stabes P und das von R auf der Seite des Stabes R; oder aber es liegt das Bild von P auf der Seite von R, und das von R auf der Seite von P. In dem ersten Falle liefert der Winkelspiegel spitze Winkel (POP' und ROR'), und in dem zweiten Falle stumpfe Winkel (POR' und ROP') statt rechte: es ist folglich auch in dem einen Falle der Winkel der beiden Spiegel kleiner als 45⁰ und in dem andern Falle grösser als 45⁰, und daher, je nachdem der erste oder zweite Fall eintritt, durch die Schräubchen a und b nach Anleitung des §. 101 grösser oder kleiner zu machen, und zwar so lange fort, bis die Richtungen OP' und OR', welche er angibt, in eine einzige (PJ) zusammenfallen.

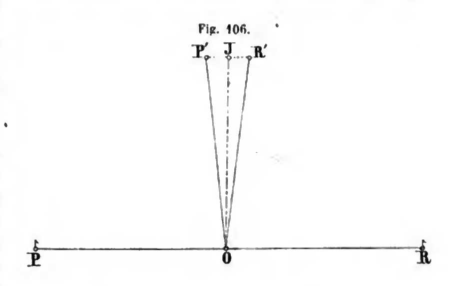
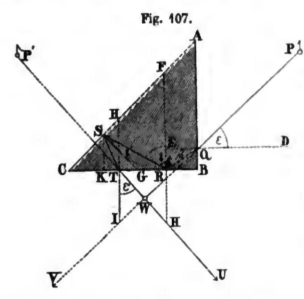


Fig. 106.

Das Winkelprisma.

§. 105. Zur Absteckung rechter Winkel kann man sich statt des Winkelspiegels eines senkrechten Glasprismas bedienen, dessen Grundfläche entweder ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck oder ein Viereck ist, das man erhält, wenn man ein regelmässiges Achteck durch zwei senkrecht auf einander stehende Durchmesser in vier gleiche Theile zerlegt. Wir wollen jedes dieser Prismen, da es nach zweimaliger Brechung und Zurückstrahlung den Weg der Lichtstrahlen um einen rechten Winkel verändert, ein Winkelprisma nennen, und beide nur nach der Anzahl ihrer Seiten unterscheiden. Das dreiseitige Prisma (Fig. 107) erfüllt den ausgesprochenen Zweck, nachdem es mit einer Fassung versehen ist, welche die Hypotenusenebene A C blendet und ein bequemes Halten des Glases gestattet. Denkt man sich nämlich, dass P W die gegebene Richtung sey, worauf in dem Punkte W eine Senkrechte W P′ abgesteckt werden soll, so halte man über dem Punkte W das Prisma so, dass auf eine seiner Kathetenebenen (A B) Licht von dem Stabe P trifft. Dieses Licht wird den Weg P Q R S T W machen und dem in W befindlichen Auge das Bild des Stabes P in P′ zeigen. Aus §. 30 und Gleichung (10) weiss man aber, dass der Winkel U W V, unter welchem sich die zwei Richtungen P W und W P′ schneiden, gerade 90^0 beträgt: richtet man daher, gleichzeitig in und über das Prisma schauend, in die letztgenannte Richtung einen Stab so ein, dass dieser und das Bild von P sich decken, so ist P′ W P ein rechter Winkel, wie verlangt war.

Fig. 107.



Wenn die von P kommenden Lichtstrahlen so auf das Prisma treffen, dass sie auf ihrem Wege durch dasselbe nur einmal und zwar von der Hypotenusenebene A C zurückgestrahlt werden, so ist der Winkel, welchen die Richtungen der ein- und austretenden Strahlen mit einander bilden, nach den Gleichungen 18 und 19 um den doppelten Einfallswinkel (ε) kleiner oder grösser als 90^0, mithin einem rechten Winkel nur in dem Falle gleich, wo der Einfallswinkel $\varepsilon = 0$ ist. Man wird daher im Allgemeinen zwei Bilder von P in dem Prisma erblicken; es ist aber leicht, beide von einander zu unterscheiden: dasjenige nämlich, welches durch einmalige Zurückstrahlung erzeugt wird und dem Winkel $90^0 \pm 2\varepsilon$ angehört, verändert seine Lage, sobald man das Prisma mit dem Griffe um seine Axe dreht, während das durch zweimalige Reflexion entstandene bei dieser Drehung ruhig stehen bleibt, indem seine Lage von der Grösse des Einfallswinkels ε ganz unabhängig ist. Auch ist das letztere Bild, welches bei der Absteckung

eines rechten Winkels benützt werden muss, weniger hell als das erstere, weil bei der Zurückstrahlung von der Kathetenebene BC und von der Hypotenusenebene, wenn letztere nicht spiegelartig belegt ist, einiges Licht verloren geht. Die geringere Helligkeit und die Unbeweglichkeit des Bildes sind sichere Anhaltspunkte zur schnellen Auffindung desselben: übrigens wollen wir noch die Bemerkung beifügen, dass man dieses Bild nur am Ende der Kathetenebene (hier bei C) suchen darf, weil eine zweimalige Zurückwerfung des Lichts ein Austreten der Strahlen TU in der Mitte der Ebene BC unmöglich macht.

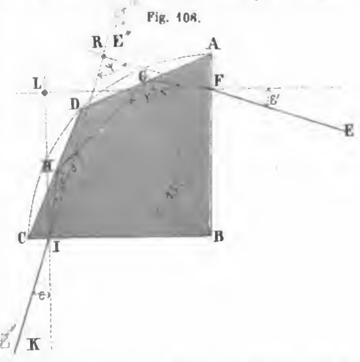


Fig. 108.

In ähnlicher Weise wie das dreiseitige Winkelprisma erfüllt das vierseitige (Fig. 108) seinen Zweck, wenn es in einer mit einem Griff versehenen Fassung liegt, welche seine schiefen Flächen AD und CD blendet.

Hätte man mit diesem Prisma auf die gegebene Richtung ER in dem Punkte R eine Senkrechte (RE″) abzustecken, so brauchte man nur über dem Punkte R das Prisma mit einer der Kathetenebenen (hier AB) gegen den in E befindlichen Stab zu halten und mit dem Auge bei K in das Prisma zu sehen. Dort wird man in der Richtung KIR, welche nach §. 31 und Gleichung (11) auf der gegebenen Richtung ER senkrecht ist, ein Bild E′ des Stabes E erblicken. Richtet man einen Stab E″ so ein, dass er das Bild E′ deckt, wobei man gleichzeitig in und über das Prisma zu sehen hat, so bezeichnen die drei Punkte E″, R, E einen rechten Winkel.

Die Winkelprismen, welche der Verfasser hiermit zur Benützung empfiehlt und deren er sich seit dem Jahre 1851 schon bedient, haben vor dem Winkelspiegel mindestens das voraus, dass sie nie einer Berichtigung bedürfen, wenn sie ursprünglich richtig geschliffen sind. Das in Fig. 108 vorgestellte vierseitige Prisma liefert zwar hellere Bilder als der Winkelspiegel; es ist aber viel theuerer als dieser und daher weniger zu empfehlen als das dreiseitige (Fig. 107). Wer übrigens das in den nachfolgenden Paragraphen beschriebene Prismenkreuz besitzt, bedarf keiner Winkelprismen mehr, da dasselbe zwei solche Prismen enthält.

Das Prismenkreuz.[1]

§. 106. Durch die vorher betrachteten Werkzeuge kann ein rechter Winkel mit hinreichender Genauigkeit und Bequemlichkeit abgesteckt werden;

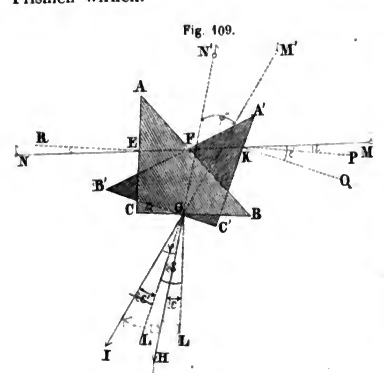
[1] Ausführlicheres hierüber findet man in der Abhandlung: »Theorie und Gebrauch des Prismenkreuzes von C. M. Bauernfeind.« München bei J. Palm, 1851.

der praktische Geometer hat aber auch sehr oft Winkel von 180° abzustecken. Dieses ist der Fall, wenn er zwischen zwei gegebenen Punkten einen dritten in gerader Linie einschalten oder den Durchschnittspunkt zweier Diagonalen eines Vierecks auf dem Felde suchen soll. Er kann zwar diese Aufgaben in der Regel mit Fluchtstäben und einem oder zwei Gehilfen lösen; aber die Lösung auf diesem Wege ist unter allen Umständen weitläufig, manchmal unsicher, in einzelnen Fällen unmöglich.

Diese Erwägung gab uns vor einigen Jahren Veranlassung zur Erfindung des Prismenkreuzes, eines einfachen Werkzeuges, das der Hauptsache nach aus zwei Glasprismen besteht, deren Grundflächen gleichseitige rechtwinklige Dreiecke sind und welche so aufeinander liegen, dass ihre Hypotenusenebenen sich senkrecht kreuzen, während die Kathetenebenen und die Axen mit einander parallel sind. Mit diesem Prismenkreuz kann man nicht allein Winkel von 180° auf die einfachste Weise und ohne Zuziehung von Gehilfen, sondern auch rechte Winkel abstecken, indem jedes der Prismen für sich ein Winkelprisma ist (Fig. 107). Für geometrische Terrainstudien, flüchtige Aufnahmen, Messungen auf breiten Flüssen u. dgl. bietet es dem Winkelspiegel gegenüber entschiedene Vortheile, wie von einer grossen Anzahl Praktiker bereits thatsächlich anerkannt ist und täglich mehr anerkannt wird.

§. 107. **Theorie.** Ein Theil der Theorie des Prismenkreuzes ist bereits in dem §. 30 niedergelegt, wo wir den Gang des Lichts durch ein Glasprisma, wie es bei unserem Instrumente zur Anwendung kommt, betrachteten. Ein anderer Theil ist in der ersten Abtheilung des §. 105 enthalten, indem dort gezeigt wurde, wie jedes einzelne Prisma zur Absteckung eines rechten Winkels benützt werden kann. Es bleibt uns daher nur noch übrig, zu zeigen, wie zwei in der vorhin angegebenen Weise zusammengestellte Prismen wirken.

Fig. 109.



Um unsere Betrachtung etwas allgemeiner zu machen, nehmen wir vorläufig an, dass zwar die Axen der Prismen, aber nicht ihre Kathetenebenen parallel sind. Diese sollen vielmehr einen Winkel $CGB' = \delta$ miteinander bilden und dadurch Veranlassung seyn, dass die Hypotenusenebenen sich unter einem Winkel $AFA' = 90^0 + \delta$ kreuzen.

Denkt man sich das Prismenkreuz in die gerade Verbindungslinie zweier leuchtender Punkte M und N ge-

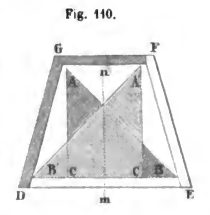
bracht und so gehalten, dass die einfallenden Lichtstrahlen mit den Grundflächen der Prismen parallel laufen, so bilden die von N in der Richtung NM kommenden und durch das Prisma ABC gehenden Strahlen nach ihrem Austritte mit der Richtung NM den Winkel $\psi = 90^0 - 2\varepsilon$ (wenn NER $= \varepsilon$), während die in der Richtung MN auf das Prisma A'B'C' treffenden Strahlen nach ihrem Gange durch das Prisma mit der ursprünglichen Richtung MN den Winkel $\psi' = 90^0 + 2\varepsilon'$ einschliessen (§. 30, Gl. 8 und 9). Das Prisma ABC zeigt das Bild von N nach der Richtung HG in N', und das Prisma A'B'C' das Bild von M nach der Richtung IG in M'. Beide Richtungen schliessen einen Winkel

$$\varphi'' = 2(\varepsilon' - \varepsilon) = 2\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

ein, wie man aus der Figur leicht ableiten kann. Dieser Winkel φ'' wird null, sobald δ null ist,[1] d. h. sobald die Kathetenebenen der Prismen parallel und die Hypotenusenebenen senkrecht zu einander sind. In diesem Falle decken sich mithin die Bilder von M und N, da sie in einer gemeinschaftlichen Richtung liegen: d. h. wenn die Punkte M und N durch lothrechte Stäbe bezeichnet sind, so werden die in den beiden Prismen abgebildeten Stäbe wie ein Stab erscheinen, der durch beide Gläser reicht. Hierin liegt der Grund für die oben bezeichnete und in der beigedruckten Figur versinnlichte Stellung der Prismen in dem Prismenkreuze.

Nehmen wir nun an, dass die Prismen diese Stellung haben, so wird man sich mit Hilfe der Ausdrücke Nr. 8 und 9 ohne Mühe überzeugen, dass eine Deckung der Bilder von M und N nicht stattfindet, wenn man mit dem Prismenkreuze ausserhalb der Geraden MN steht: die Bilder M' und N' werden gegen die Stäbe M und N in einem Falle so liegen, wie in Fig. 109, d. h. N' auf der Seite von N und M' auf der Seite von M, und in dem andern Falle wird sich M' auf der Seite von N und N' auf der Seite von M befinden. Da die Deckung der Bilder nur dann eintritt, wenn man das Prismenkreuz in die Gerade MN bringt, so ist dieses folglich ein Mittel, einen Punkt (F) in diese Gerade einzuschalten, ohne irgend eine Beihilfe.

Fig. 110.

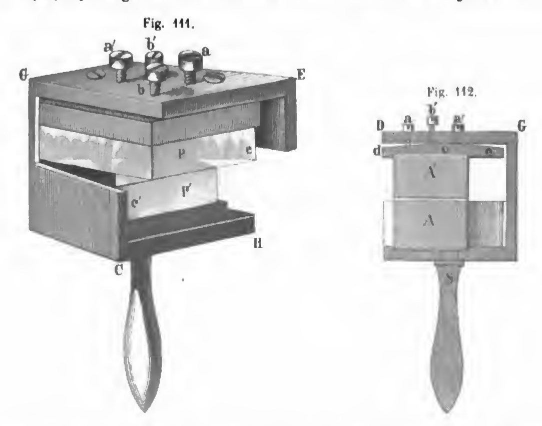


§. 108. **Beschreibung.** Fig. 111 gibt eine perspectivische Ansicht des Prismenkreuzes in seiner wirklichen Grösse. Das Gehäuse der Gläser P und P' ist ein hohles Prisma mit einer trapezförmigen Grundfläche, wie sie Fig. 110 zeigt, die auch die Lage der Prismen deutlich macht. Die Katheten-

[1] Nach Gleichung (85) würde der Winkel φ'' auch ohne δ dann null werden, wenn der Einfallswinkel ε dem ε' der Grösse nach gleich wäre und beide entgegengesetzte Vorzeichen hätten. Diese beiden Bedingungen können aber nicht gleichzeitig stattfinden, wie einfache geometrische Betrachtungen zeigen. Zwar kann $\varepsilon = \varepsilon'$ werden; dann sind aber beide ε positiv oder beide negativ, und es ist daher in dem ersten Falle der Winkel $\varphi'' = +2\varepsilon = +2\delta$, und in dem zweiten Falle $\varphi'' = -2\varepsilon = -2\delta$.

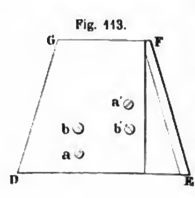
flächen Pe, P'e' der beiden Prismen liegen in einer Ebene, welche wir die Ocularebene nennen wollen, da durch sie die Bilder angeschaut werden. Die anderen Kathetenflächen liegen auf entgegengesetzten Seiten des Gehäuses und sind parallel: sie empfangen das von den seitwärts stehenden Stäben (M, N) ausgehende Licht und können daher die Objectivebenen

Fig. 111. Fig. 112.



der Prismen heissen. Nach der Grösse einer solchen Ebene ist das Gehäuse ausgeschnitten, damit das Licht in das entsprechende Prisma gelangen kann: links oben, rechts unten. Die Hypotenusenebenen werden zur Vermehrung der Helligkeit des Bildes, das zur Absteckung rechter Winkel dient, entweder wie gewöhnliche Spiegel belegt oder nach der Liebig'schen Methode versilbert. Um die Prismen parallel zu stellen, dienen die 4 Stellschräubchen a, a' und b, b', deren Wirkungsweise sich mit Hilfe des obenstehenden Durchschnittes Fig. 112 (nach der Linie mn in Fig. 110) leicht erklärt. Das obere Prisma (A') ist nämlich an der Fassung de, welche sich um den Punkt o ein wenig drehen kann, festgekittet. Durch die Schräubchen a und a', welche durch Schlitze in der Gehäusplatte DG gehen und in die Fassung de eingreifen, lässt sich das obere Prisma so viel drehen als nöthig ist, um die Kathetenebenen parallel zu machen, nachdem vorher mit Hilfe der Schräubchen b und b', die bloss auf die Platte de drücken, die Axen der Prismen parallel gestellt worden sind. Die gegenseitige Stellung der in Rede stehenden Schräubchen ergibt sich aus der Oberansicht der Gehäusplatte in der beigedruckten Figur 113.

Fig. 113.



§. 109. **Prüfung und Berichtigung.** Die Prüfung des Prismenkreuzes umfasst folgende Untersuchungen:

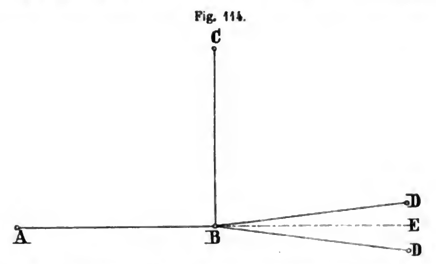
1) ob jedes der Prismen richtig geschliffen ist;

2) ob die Prismenaxen parallel sind, und

3) ob die Kathetenflächen parallel sind und die Hypotenusenebenen senkrecht zu einander stehen.

Zu 1. Am einfachsten erfährt man, ob die Prismen richtig geschliffen sind, auf folgende Weise. Man stecke mit dem zu prüfenden Prisma nach §. 105 und Fig. 114 erst einen Winkel ABC und hierauf von B aus einen zweiten Winkel CBD ab. Findet man, dass die drei Stäbe A, B, D in gerader Linie liegen, so ist offenbar ABC = CBD = R und folglich das Prisma richtig; liegen aber die genannten drei Punkte nicht in einer Geraden, so ist das Prisma fehlerhaft und durch den Optiker zu verbessern.

Fig. 114.

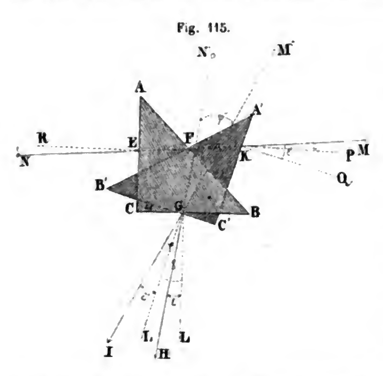


Zu 2. Um zu prüfen, ob die beiden Prismenaxen parallel sind, braucht man nur zwei parallele Gegenstände, z. B. lothrechte Stäbe, Mauerkanten, Blitzableiterstangen etc. durch die Ocularebenen zu betrachten und zuzusehen, ob auch die Bilder parallel sind oder nicht. Bilden dieselben einen Winkel mit einander, so ist der Unterschied desselben von 180^0 der Fehler, welcher in der Lage der Prismenaxen stattfindet und der durch die Schräubchen b, b′ weggeschafft werden muss, nachdem zuvor die beiden anderen Schräubchen etwas gelüftet wurden. Ohne diese Lüftung könnte sich durch den Druck der Schräubchen b und b′ die Fassung de um den Punkt o nicht drehen. Von selbst versteht sich, dass von den Schräubchen b und b′ das eine ebenfalls vorher zu lüften ist, wenn das andere vorwärts gedreht werden soll.

Zu 3. Von der Parallelstellung der Kathetenebenen überzeugt man sich, indem man drei Stäbe in ziemlich grossen Entfernungen in gerader Linie aufstellt, das Instrument über den mittleren Stab hält und zusieht, ob sich die Bilder der beiden äusseren Stäbe decken. Ist dieses der Fall, und gehen die Bilder auch nicht auseinander, wenn man das Instrument an dem bezeichneten Standpunkt um seine Axe dreht, so sind die Kathetenebenen parallel und die Hypotenusenebenen senkrecht zu einander; decken sich aber

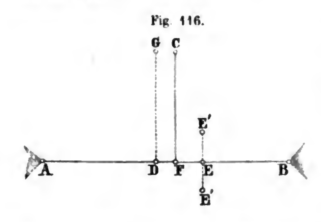
die Bilder der Stäbe nicht, so sind auch die Kathetenebenen nicht parallel und die Hypotenusenebenen nicht senkrecht aufeinander. Nach Gleichung (85) zeigt der Winkel φ'', um welchen die Bilder auseinander stehen, den doppelten Fehler (δ) in der Lage der Prismen an, und es muss desshalb das obere Prisma um $\frac{1}{2}\,\varphi''$ oder δ durch die Schräubchen a und a′ gedreht werden. In welchem Sinne die Drehung zu geschehen hat, hängt davon ab, ob die Bilder M′ und N′ auf Seite ihrer Gegenstände M und N oder entgegengesetzt liegen: in dem ersteren Falle ist der Winkel A F A′ der Hypotenusenebenen grösser und in dem zweiten Falle kleiner als ein rechter, woraus sich leicht ergibt, in welchem Sinne das obere Prisma zu drehen ist, um die Grösse dieses Winkels auf 90⁰ zurückzuführen.

Fig. 115.



§. 110. **Gebrauch.** Soll ein Punkt E (Fig. 116) zwischen zwei gegebenen Punkten A und B, welche so liegen, dass man von einem zum anderen nicht visiren kann, in gerader Linie eingeschaltet werden, so stelle man sich mit dem Prismenkreuze in einem beliebigen Punkte E′, der in der Nähe des gesuchten liegt, auf und halte das Instrument so, dass die beiden Ocularebenen gegen das Auge, die Objectivebenen aber gegen A und B gerichtet sind. Hierauf bewege man sich so lange vor- oder rückwärts, bis man an einen Punkt E kommt, in welchem sich die Bilder von A und B in den beiden Prismen decken, so ist E der gesuchte Punkt, welcher nunmehr durch einen unter das Instrument zu stellenden Stab bezeichnet werden kann.

Fig. 116.



Will man von einem gegebenen Punkt C ausserhalb einer gegebenen Geraden A B eine Senkrechte auf diese fällen, so richte man sich auf die eben beschriebene Weise in die Gerade A B ein, drehe das Instrument zwischen den Fingern so weit um seine Axe, bis man in der spitzen Ecke (bei e oder e′ Fig 111) eines Prismas das durch zweimalige Zurückstrahlung entstandene Bild eines der Gegenstände A oder B erblickt, und bewege sich alsdann in der Geraden AB, bis dieses Bild mit dem durch das blosse Auge

unter oder über der Ecke e oder e' hinweggesehenen Stab C zusammenfällt. Sobald diese Deckung eintritt, bezeichnet das Instrument selbst den gesuchten Punkt, welcher durch ein Loth oder einen Stab auf dem Boden angegeben wird. Um sich zu überzeugen, dass man bei der Bewegung gegen A oder B hin nicht aus der Geraden AB gekommen sey, braucht man nur die der ersten Drehung entgegengesetzte Wendung des Instruments zu machen und zuzusehen, ob die Bilder von A und B sich wieder decken. Fände diese Deckung nicht statt, so müsste sie durch eine Bewegung gegen die Linie AB wieder hergestellt und die vorige Absteckung verbessert werden.

Wie auf eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkt derselben eine senkrechte abgesteckt wird, ist bereits im §. 105 angegeben. Weitere Anwendungen des Prismenkreuzes folgen in der Lehre von den Messungen.

B. Instrumente zur Aufnahme der Winkel durch Zeichnung.

§. 111. Die meisten Messungen werden in der Absicht gemacht, das Gemessene in Plänen bildlich darzustellen. Diese Absicht kann auf zwei Wegen erreicht werden: entweder mittelbar dadurch dass man aus den auf dem Felde gemessenen Linien und Winkeln die Figuren, welche die gegenseitige Lage der Punkte versinnlichen, zu Hause berechnet und zusammenstellt; oder unmittelbar dadurch, dass man auf einem mit Papier überzogenen Reissbrette eine Vorrichtung aufstellt, welche gestattet, die Richtungen, in denen man visirt, sofort auf das Papier zu zeichnen. Erhält man hierdurch die Winkel der Figuren, so bedarf es nur noch eines verjüngten Massstabes und eines Zirkels, um auch gemessene Längen sofort in einem bestimmten Verhältnisse zur wirklichen Grösse abtragen zu können.

Das Zeichenbrett muss, da es weder auf den Boden gelegt noch in der Hand gehalten werden kann, von einem Gestelle getragen werden: beide zusammen geben aber einen Messtisch.

Da die Pläne den Grundriss einer Gegend darstellen, so ist es nöthig, dass sich die Tischplatte wagrecht stellen lässt: folglich bedarf man zu dem Messtische ausser der hiefür passenden Einrichtung seines Gestelles einer Libelle. Soll die von einem bestimmten Punkte des Feldes aus aufgenommene verjüngte Figur der natürlichen geometrisch ähnlich seyn, so ist klar, dass jener Punkt und sein Bild auf dem Papier in einer Lothrechten liegen müssen: dazu ist aber eine Lothgabel nöthig. Fügt man hiezu die schon erwähnte Visirvorrichtung, welche Kippregel heisst, und den gleichfalls schon genannten Zeichnungsmassstab, so ist der gesammte Messtischapparat, den wir nun im Einzelnen betrachten wollen, beisammen. Der Messtisch wurde zu Ende des 16. Jahrhunderts (im Jahre 1590) vom Professor Praetorius in Altdorf bei Nürnberg erfunden und hat seitdem mannichfaltige Abänderungen und Verbesserungen erfahren. Da wir jedoch keine Geschichte desselben schreiben, sondern nur sein Wesen und seinen Gebrauch zeigen wollen, so wird es genügen, dieses an den Messtisch-

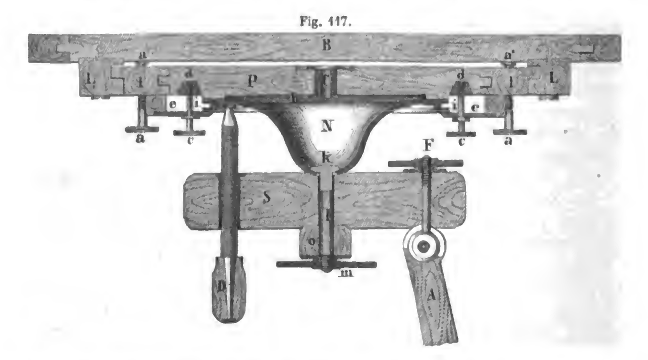
apparaten zu thun, welche nach Reichenbachs und unserer Angabe in dem mechanischen Institute von Ertel und Sohn in München angefertigt werden. Man lernt auf diese Weise eine ältere und eine neuere Einrichtung kennen, und wird demnach im Stande seyn, auch die Messtischapparate anderer Mechaniker zu behandeln und zu beurtheilen.

Der Messtisch (Mensel).

§. 112. **Beschreibung.** Der Reichenbach'sche Messtisch hat wie jeder andere zwei Hauptbestandtheile, nämlich das Gestelle (Stativ) und das Tischblatt. In Fig. 117 sind beide im senkrechten Durchschnitte, in Fig. 118 ist das Gestelle allein perspectivisch dargestellt.

Das Messtischblatt (B) muss ein vorzügliches Reissbrett von rechteckiger oder quadratischer Grundform seyn und darf seine ebene Oberfläche durch atmosphärische Einwirkungen nicht verändern. Hier beträgt die Quadratseite 1,8 Fuss bayr.; an anderen Messtischen misst sie oft nur $1^1/_2$, manchmal aber auch $2^1/_2$ Fuss. Zur Vermeidung des Werfens wird das

Fig. 117.



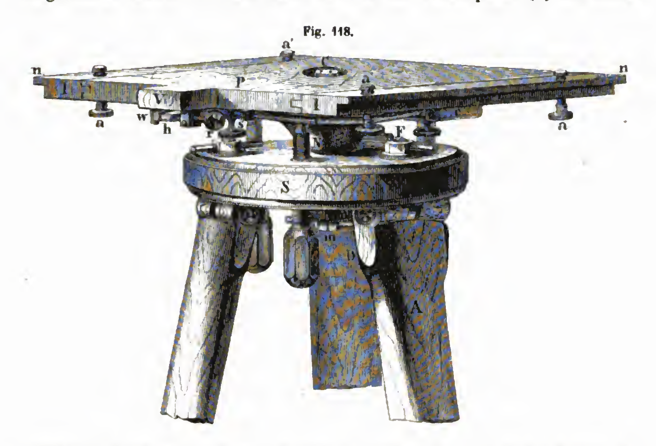
Blatt aus einem Rahmen und mehreren rechteckigen Platten von gut ausgetrocknetem Ahorn- oder Lindenholz in der Art zusammengesetzt, dass sich die Faserlagen kreuzen. Die Verbindung des Blattes mit dem Gestelle geschieht durch zwei auf der unteren Blattfläche festgeschraubte und mit Nuthen versehene Leisten (L, L), welche an die Federn (n, n) der Wendeplatte (P) des Gestelles gesteckt und durch vier in dieser Platte stehende Stellschrauben (a, a) fest angedrückt werden können. Auf diesem Wege lässt sich das Messtischblatt in der Richtung seiner Leisten verschieben und feststellen.

Das Messtischgestelle soll sich vor Allem auf wie immer geneigtem

festen Boden leicht und unbeweglich aufstellen lassen. Dieses geschieht hier durch drei mit eisernen Schuhen beschlagene Beine (A, A), welche mit einem $2^1/_2$ Zoll dicken cylindrischen Kopfe (S) in folgender Weise verbunden sind. Die oberen Enden der Beine sind walzenförmig abgerundet und passen in ähnliche Vertiefungen des Kopfes. Nach der Axe der Rundung geht durch jedes Bein ein Metallcylinder, welcher in der Mitte von einer in einem Ausschnitte des Beines steckenden Metallscheibe gefasst wird, die sich an einer den Gestellkopf (S) durchdringenden Schraube (F) befindet. Durch Anziehen und Nachlassen der Mutter dieser Schraube mit einem Knebel kann die Reibung des Beins in seiner Höhlung vermehrt und vermindert und folglich seine Beweglichkeit kleiner und grösser gemacht werden.

Ferner soll das Gestelle so eingerichtet seyn, dass es eine leichte Vertikalbewegung des Blattes gestattet, um dasselbe mit Hilfe einer Libelle wagrecht zu stellen. Zu dem Ende ist hier die Wendeplatte (P) mit einer

Fig. 118.



metallenen Nuss (N) verbunden, welche in einer Höhlung des Gestellkopfes (S) ruht und mit einer durch sie und den Kopf gesteckten Schraube (I, Fig. 117) mehr oder weniger gegen die Unterlage gedrückt werden kann. Dreht man die Mutter (m) zurück, so kann sich die Nuss in ihrer Höhlung um den Kopf (k) der Schraube in dem Masse bewegen als es die drei Stellschrauben (D) gestatten, welche auf ihren platten Rand, in den sie an der Wendeplatte ausläuft, drücken. Da durch drei Punkte die Lage einer Ebene bestimmt ist, so sieht man leicht ein, dass durch die eben genannten Stellschrauben die Wendeplatte (P) und mit ihr das Tischblatt (B) in ihrer Neigung gegen den Horizont verändert werden können. Bei dieser Veränderung

soll die Nuss nicht mehr gelüftet werden als nöthig ist, sie durch den sanften Druck der Stellschrauben um den Punkt k zu bewegen. (Fig. 117.)

Die Wendeplatte soll eine Drehung des Blattes im wagrechten Sinne gewähren, um eine gezeichnete Richtung mit einer natürlichen auf dem Felde parallel zu stellen. Geschieht diese Drehung um einen sehr kleinen Winkel mit Hilfe einer Schraube, so nennt man sie eine feine; geschieht sie aber mit der Hand ohne die Schraube, so heisst sie eine grobe Drehung.

Diese beiden Drehungen geschehen hier um einen senkrechten hohlen Zapfen, welcher auf einer Metallplatte (b) steht, womit die Nuss oben abgeschlossen ist. Diesen Zapfen umgibt eine in die Wendeplatte eingelassene Hülse, während seine Höhlung die Mutter einer Schraube (C) ist, durch welche die genannte Platte stets gegen den ebenen Rand der Nuss gedrückt wird. Um diesen Druck gleichmässiger zu machen, befindet sich unter dem Kopf der Schraube C eine federnde Metallscheibe, die jedoch in der Zeichnung nicht gut sichtbar ist. Will man die Drehung der Wendeplatte hemmen, so zieht man die zwei Stellschrauben c, c an, welche die Metallplättchen e, e gegen den Rand i, i der Nuss drücken und dadurch eine Reibung erzeugen, welche dem beabsichtigten Zweck entspricht.

Die Schrauben c, c müssen gelüftet seyn, wenn man eine grobe oder feine Drehung ausführen will. Soll die grobe Drehung gehemmt werden, so hat man nur die Klemmschraube s anzuziehen, wodurch die Wendeplatte in Folge der Reibung der Klemmplatte u an dem genutheten Rand der Nuss festgehalten wird, wie aus den Figuren 119 und 120 deutlich zu entnehmen ist, von denen die erstere einen Durchschnitt und die letztere eine Unteransicht der Klemmvorrichtung darstellt.

Fig. 119.

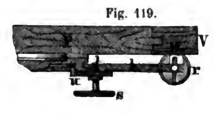
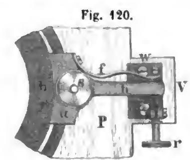


Fig. 120.



Nach dieser Hemmung ist aber noch eine feine Drehung mit der Schraube r möglich; denn da durch die Klemmschraube s nur der Arm h an der Nuss festgestellt wurde, so kann sich die Wendeplatte noch um ihre Axe (C) drehen. Diese Drehung ist indess auf den kleinen Bogen eingeschränkt, welcher vom Fusse der Schraube r bis an die Stahlfeder f reicht, die an der Klemmplatte u sitzt. Man entnimmt hieraus, dass dem Messtischblatte schon durch die grobe Drehung seine vorgeschriebene Richtung nahehin gegeben werden muss, wenn die genaue Einstellung durch die feine Drehung möglich seyn soll. Ist diese Einstellung bewirkt, so zieht man die Schrauben c, c fest an, um jede weitere Drehung unmöglich zu machen.

§. 113. **Aufstellung des Messtisches.** Die Aufstellung kann unter verschiedenen Bedingungen geschehen; wer jedoch die folgenden drei gleichzeitig zu erfüllen versteht, weiss sich in allen Fällen zu helfen. Es sey nämlich

1) ein gegebener Punkt des Messtischblatts über einen gegebenen Punkt des Feldes zu bringen;

2) eine von jenem Punkte ausgehende Richtung des Blattes mit einer entsprechenden auf dem Felde in eine Ebene zu drehen, und

3) das Messtischblatt wagrecht zu stellen.

Wir wollen die gegebene Richtung auf dem Felde MN und ihr Bild auf dem Messtischblatte mn nennen und annehmen, es sey zunächst m über M centrisch aufzustellen, so dass m in dem Lothe von M liegt.

Man bringe den Messtisch über den Punkt M des Feldes und stelle ihn so, dass nach dem Augenmasse erstens m über M, zweitens mn in der Richtung von MN, und drittens das Blatt ziemlich wagrecht liegt. Diese erste Aufstellung prüfe man hierauf mit der Lothgabel und verbessere sie nach Massgabe der Abweichung, welche dieselbe anzeigt, entweder durch Verschiebung des Blattes, oder durch Versetzen des Gestelles, oder durch beide zugleich. Nach einigen Versuchen wird man es dahin bringen, dass m centrisch über M steht; während mn nahehin in MN liegt und das Blatt nicht stark von der wagrechten Lage abweicht.

Nun beginnt die Horizontalstellung damit, dass man die Knebelmutter m öffnet und eine berichtigte Röhrenlibelle in der Richtung zweier Stellschrauben D, D auf das Messtischblatt setzt. Indem man eine dieser Schrauben zurück, die andere vorwärts dreht, bringt man die Libelle zum Einspielen. Das Blatt steht also in der Richtung der Libellenaxe wagrecht. Nun stelle man die Libelle senkrecht auf ihre erste Richtung, so dass sie jetzt über die dritte Stellschraube D weggeht. Bringt man mit dieser Schraube die Libelle wieder zum Einspielen, so steht das Blatt nach der zweiten Richtung wagrecht. Durch diese zweite Stellung kann aber die erste etwas verändert worden seyn; man bringt daher die Libelle in ihre erste Lage zurück und bewirkt, indem man gleichzeitig die Mutter m etwas anzieht, durch die Stellschrauben D, D abermals das Einspielen. Hierauf kommt die Libelle wiederholt in die zweite Lage, und es wird auch hier das Horizontalstellen durch die dritte Schraube D gleichzeitig mit dem Anziehen der Mutter m bewirkt. Eine Rückversetzung der Libelle in die erste Lage zeigt jetzt kaum mehr eine Abweichung; ist dieses aber der Fall, so muss die Libelle an jeder Stelle des Bretts, wenn dieses und das aufgespannte Papier vollkommen eben sind, einspielen. Es ist wesentlich, dass man die Primschraube I durch die Knebelmutter m so stark anzieht, dass sich die Nuss nicht mehr drehen kann; dieses Anziehen darf aber selbstverständlich nicht nach der Horizontalstellung geschehen, sondern muss, wie schon angegeben, während dieser nach und nach vorgenommen werden.

Nach der Horizontalstellung ist noch die Einstellung der Richtung mn in die Richtung MN zu bewirken. Da schon vorher mn nach dem Augenmasse in die Ebene von MN gebracht wurde, so wird die feine Drehung hinreichen, das Zusammenfallen der Ebenen von MN und mn zu bewirken. Zu dem Ende denke man sich an mn ein Diopter gelegt, dessen Visirebene

durch mn geht; öffne die Schrauben c,c etwas, ziehe die Klemmschraube s an und drehe die Mikrometerschraube nach Erforderniss vor- oder rückwärts, bis die Visirlinie auf den Punkt N trifft. Schliesst man alsdann die Schrauben c,c, so dass die Platten e,e an dem Rand der Nuss fest anstehen, so ist die Aufgabe gelöst und eine wiederholte Prüfung mit der Lothgabel, der Libelle und dem Visirwerkzeug wird zeigen, ob sie mehr oder weniger gut gelöst ist. Eine geringe Abweichung des Punktes m aus der Lothlinie von M schadet übrigens, wie später nachgewiesen wird, nichts, indem selbst bei einer Abweichung von einem Zolle die daraus hervorgehenden Winkelfehler noch lange innerhalb der Genauigkeitsgrenze, welche die Messtischaufnahme gewährt, liegen. Um so mehr ist aber auf die genaue Einstellung der Linie mn und in unebenem Terrain auf die wagrechte Lage des Messtischblattes zu sehen.

§. 114. **Neuere Messtische.** Der Reichenbach'sche Messtisch lässt, wie alle älteren Messtische, hinsichtlich der Stabilität und leichten, sicheren Handhabung Manches zu wünschen übrig. Es haben sich desshalb mehrere Mechaniker veranlasst gesehen, andere Constructionen, theils nach eigenen, theils nach fremden Ideen auszuführen, welche, dem Messtische seine Schwerfälligkeit benehmend, ihn dem Theodolithen näher bringen, und dieses Ziel wurde von Ertel in München, Breithaupt in Cassel, Osterland in Freiberg, G. Starke und E. Kraft in Wien mehr oder weniger erreicht.

Der Messtisch von Osterland wurde von Prof. Junge in Freiberg in Dinglers polytechnischem Journale (Bd. CLVIII S. 345) beschrieben und es hat diese Beschreibung ebendaselbst (Bd. CLX S. 88) eine Entgegnung von O. Börsch in Cassel zu Gunsten des Breithaupt'schen Messtisches hervorgerufen, in welcher der letztere ausführlich besprochen und mit dem ersteren verglichen wurde. Eine ähnliche kleine literarische Fehde fand statt zwischen G. Starke, welcher seinen patentirten Messtisch im 1. Hefte des Jahrgangs 1860 der Zeitschrift des österreichischen Ingenieurvereins beschrieb, und E. Kraft in Wien, welcher im 4. und 5. Hefte desselben Jahrgangs der genannten Zeitschrift seine wohlbekannten Messtische gegen die Starke'schen vertheidigte.

Indem wir bezüglich der Einrichtung und Beurtheilung dieser Messtische auf die genannten Zeitschriften verweisen, beschreiben wir nachfolgend den Messtisch, welchen wir im verflossenen Jahre bei Ertel und Sohn dahier für die hiesige k. Ingenieurschule anfertigen liessen und der sich bei allen bis jetzt damit vorgenommenen Prüfungen und Aufnahmen als zweckmässig bewährt hat.

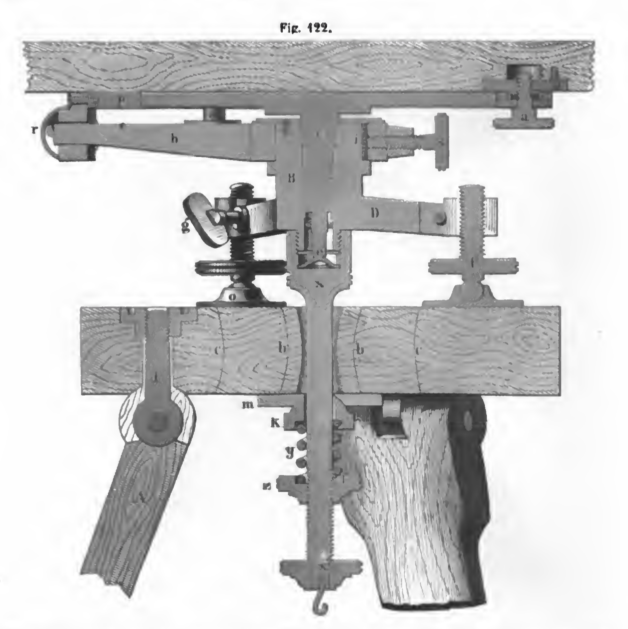
Unser Messtisch, welcher in Fig. 121 perspektivisch, jedoch ohne Blatt, und in Fig. 122 im Durchschnitte dargestellt ist, hat Einiges mit dem Breithaupt'schen und Osterland'schen gemein, unterscheidet sich aber von beiden hauptsächlich durch die Art der Befestigung und seitlichen Verschiebung des Menselblattes. An dem Reichenbach'schen Messtische ist dieses Blatt mittels Nuthen und Schrauben an der Wendeplatte befestigt (Fig. 118) und es kann

Fig. 121.



nur nach einer einzigen Richtung (a'n, na') verschoben werden. Der Osterland'sche Messtisch besitzt eine solche Vorrichtung gar nicht und es ist in der Beschreibung desselben lediglich bemerkt, dass das Menselblatt auch zum Verschieben eingerichtet werden kann. Wenn aber das Blatt gegen seinen Untersatz verschoben werden soll, wie es nach dieser Bemerkung nicht anders möglich ist, so führt diese Verschiebung, wie die Reichenbach'sche, den Uebelstand mit sich, dass der Schwerpunkt des Menselblattes ausserhalb seiner Unterstützung liegt, wodurch die Wandelbarkeit des Instruments offenbar vermehrt wird. Wir schrauben das Tischblatt an einen Messingteller von 10 Zoll Durchmesser durch 3 gleichweit entfernte Schrauben (a, a) fest und verschieben es sammt der Axe in 2 auf einander senkrechten Oeffnungen von 4 Zoll Länge (cc, c'c'), die in dem Stativkopfe angebracht sind. Dadurch kann also das Menselblatt um je $1\frac{1}{2}$ Zoll aus der Mitte des Stativs gerückt werden, ohne dass sich die gegenseitige Lage des Blattes und seines Trägers im mindesten ändert. Zur Verbindung des Dreifusses D mit dem Stativkopfe S wenden wir die Stangenschraube x

Fig. 122.



(Fig. 122) gerade so an, wie dieses Breithaupt zuerst bei Nivellirinstrumenten und Grubentheodolithen (siehe daselbst) gethan hat.

Das Breithaupt'sche Messtischgestelle, welches im Kopfe einen kreisförmigen Ausschnitt hat, durch den die Büchse des Dreifusses geht, gestattet zwar auch eine seitliche Verschiebung des Aufsatzes mit dem Menselblatte; dieselbe beträgt aber kaum $^3/_4$ Zoll und erfordert eine complicirte Verbindung des Dreifusses mit dem Stativkopfe. In diesem müssen nämlich auf der unteren Seite und in Abständen von 120⁰ drei starke Spiralfedern angebracht werden, um den hölzernen Boden des Kopfes, auf den die Schraubenmutter der Dreifussbüchse mittelbar durch eine zweite Holzplatte drückt, federnd zu machen.

Die grobe Horizontaldrehung des Menselblattes wird an unserm Messtische durch eine am oberen Rande der Dreifussbüchse angebrachte, aus einem Ringe und einer Klemmschraube (s) bestehende Bremse gehemmt und hierauf die feine Drehung durch die Mikrometerschraube (r) mit entgegenstehender Spirale (q) bewirkt. Diese von Ertel fast allgemein angewendete Vorrichtung entspricht hier ihrem Zwecke vollständig, und es ist

nach unserer Erfahrung weder eine zweite Klemmschraube (welche Osterland gebraucht), noch eine Differentialmikrometerschraube (welche Breithaupt anwendet), zur Feinstellung nöthig.

Die Axe C ist massiv aus Rothguss und nach Reichenbach bloss an dem oberen und unteren Ende conisch abgedreht. Der Druck des Menselblattes und des Tellers geht durch diese beiden Kegeltheile allein auf die Büchse B über, da die Grundfläche des Tellers p und der cylindrische Theil der Axe die Büchse nicht weiter berühren. Durch die Elasticität der in der Schraubenstange angebrachten federnden Platte e wird dem Drucke des Zapfens einigermassen entgegengewirkt und so die Bewegung erleichtert.

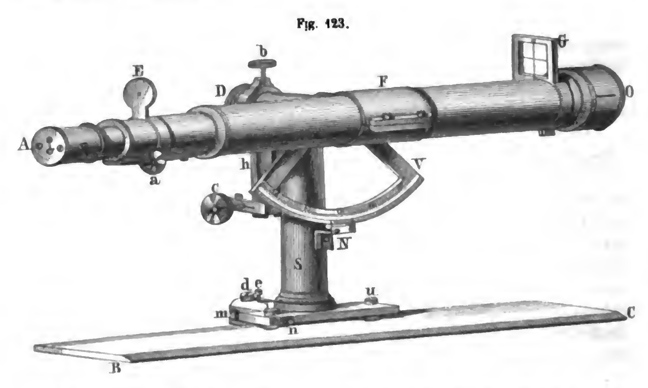
Da bei der Horizontalstellung des Messtischblattes die durch eine Fussschraube (f) hervorgebrachte Drehung um die in Messingplatten (o, o) befindlichen Füsse der gegenüberstehenden Schrauben stattfindet, so muss sich die Schraubenstange (x) in den kreuzförmigen Ausschnitten (cc, c′c′) um den Betrag des Drehwinkels frei bewegen können, wesshalb diese Ausschnitte (wie Fig. 122 zeigt) nach oben und unten etwas erweitert sind. Die punktirten Linien b, b deuten die Weite des Ausschnitts in der Mitte des Stativs an, wo dieselbe so gross seyn muss, dass der Kopf x der Schraubenstange leicht hindurchgeht. Der Kugelansatz k, welcher durch die Schraube z und die Spirale y gegen die Messingplatte m und die Grundfläche der Stativplatte wirkt, darf selbstverständlich nur nach und nach und erst dann fest angezogen werden, wenn das Blatt horizontal ist. Die Schraube z ist demnach hier geradeso zu handhaben, wie bei dem Reichenbach'schen Messtische die Schraube I (Fig. 117). Zur Verstärkung der Wirkung der Stangenschraube und folglich zur Vermehrung der Sicherheit gegen ein zufälliges Drehen des Menselblattes sind die Grundflächen der Fussplatten o,o möglichst rauh gemacht, weil mit der Rauhheit dieser Flächen die Reibung und folglich auch der Widerstand gegen Drehung wächst.

Die Kippregel.

§. 115. **Beschreibung.** Die Vorrichtungen zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der Winkelschenkel sind sehr verschieden. Früher bediente man sich fast ausschliesslich des Diopterlineals, einer Verbindung von einem messingnen Lineale mit zwei Dioptern, deren Visirebene durch die Kante des Lineals geht und auf dessen Ebene senkrecht steht. (Fig. 5 gibt hievon eine Anschauung, wenn man sich die Diopter so weit zur Seite geschoben denkt, dass die Visirlinie in die durch die Linealkante gelegte Normalebene fällt.) Da aber die Diopter an dem Fehler leiden, der in §. 25 besprochen wurde, und Kurzsichtige sich derselben ohne Brillen gar nicht bedienen können, so findet man in neuerer Zeit viel häufiger Fernrohre als Diopter mit dem genannten Lineale verbunden. Diese Verbindung ist so eingerichtet, dass sich das Fernrohr um eine zur Linealebene parallele

und gegen die Kante des Lineals senkrecht stehende Axe auf- und niederdrehen (kippen) lässt. Daher der Name Kippregel. Die nachfolgende Fig. 123, welche eine vollständige Ansicht dieses Instruments gibt, bedarf nur kurzer Erläuterungen.

Fig. 123.



Auf dem messingnen Lineale (BC) ist ein senkrechter Ständer (S) mit seiner Unterlagsplatte so befestigt, dass er, wie weiter unten erklärt wird, durch die Schräubchen d, e und m, n sowohl im lothrechten als wagrechten Sinne etwas gedreht werden kann. Dieser Ständer trägt an seinem Kopfe eine zu seiner Mittellinie senkrecht stehende Axe (D) mit der das Fernrohr (F) rechtwinklich verbunden ist und um welche es gekippt wird. Man nennt diese Axe die Drehaxe des Fernrohrs. Dieselbe reicht so weit über den Ständer hinaus, dass die optische Axe in die Normalebene der Linealkante (BC) gebracht werden kann. Das Fernrohr, ein astronomisches mit Fadenkreuz, kann eine grobe und eine feine Drehung machen. Die grobe ist möglich, wenn durch Rückwärtsdrehen der Schraube b der Druck auf die Drehaxe aufgehoben wird, und die feine, wenn man die Schraube b anzieht und die Mikrometerschraube C (welche auf den Hebel h drückt, dem eine Stahlfeder entgegenwirkt) vor- oder rückwärts dreht. Ein Gradbogen (V), dessen Ebene der Visirebene parallel ist und dessen Mittelpunkt in der Drehaxe liegt, die in ihrer Verlängerung die optische Axe schneidet, dient zur Messung der Höhen- und Tiefenwinkel der Visirlinien. Dieser mit der Drehaxe festverbundene Bogen ist kein wesentliches Erforderniss der Kippregel, erscheint aber als angenehme Beigabe in Fällen, wo man die Grösse der genannten Winkel zu kennen wünscht. Sein Nullpunkt soll in der Senkrechten liegen, die man im Mittelpunkte des Bogens gleichzeitig auf die Drehaxe und die Richtung der Visirlinie des Fernrohrs ziehen kann.

Vom Nullpunkt aus ist der Bogen nach beiden Seiten hin in der Regel nur bis auf halbe Grade unmittelbar getheilt, während der an dem Ständer feststehende [1] Nonius (N) zur mittelbaren Ablesung bis auf einzelne Minuten eingerichtet ist. Bei horizontaler Stellung des Messtisches gibt selbstverständlich die linke Seite des Bogens Höhenwinkel und die rechte Tiefenwinkel an. Das Diopter (EG), welches auf dem Fernrohre steht, kann man zur schnelleren Auffindung der anzuvisirenden Gegenstände und auch zur Aufnahme selbst benützen. Sowohl das Ocular (E) als das Objectiv (G) ist mit einem Klemmring an das Rohr geschraubt; beide lassen sich also etwas zur Seite drehen, wenn es nöthig ist.

§. 116. **Prüfung und Berichtigung.** Von einer guten Kippregel wird verlangt:

1) dass die Kante des Lineals vollkommen gerade sey;

2) dass das Fadenkreuz deutlich gesehen werde;

3) dass die Visirlinie in einer Ebene sich bewege;

4) dass diese Ebene auf der Linealebene senkrecht stehe;

5) dass die Visirebene durch die Linealkante gehe oder wenigstens damit parallel sey; und endlich

6) dass bei paralleler Lage der optischen Axe und der Linealkante die Nullpunkte des Vertikalkreises und seines Nonius sich decken.

Zu 1 und 2. Diese beiden Untersuchungen sind aus leicht aufzufindenden Gründen nöthig und ihre Ausführung darf als bekannt vorausgesetzt werden.

Zu 3 und 4. Die Nothwendigkeit der Forderungen (3) und (4) leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dass die Kippregel dazu bestimmt ist, die in verschiedenen Lagen befindlichen Winkelschenkel auf das Messtischblatt zu projiciren. Man nimmt diese zwei Untersuchungen in der Regel gemeinschaftlich vor, da die dritte für sich desshalb schwer auszuführen ist, weil sich das Fernrohr in den meisten Fällen nicht durchschlagen (d. h. in die entgegengesetzte Richtung drehen) lässt. Es sind jedoch selbstverständlich beide Forderungen erfüllt, wenn der Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes beim Auf- und Niederbewegen des Rohrs der auf wagrechter Unterlage stehenden Kippregel fortwährend eine lothrechte Linie deckt.

Darum verschaffe man sich zunächst eine lothrechte Linie durch einen langen Senkel oder eine Mauerkante und stelle in einer Entfernung von etwa 100 Fuss den Messtisch wagrecht und die zu prüfende Kippregel darauf. Alsdann stelle man durch Drehung des Instruments das Fadenkreuz auf einen beliebigen Punkt des Lothes ein und sehe zu, ob dasselbe beim Auf- und Niederkippen fortwährend dieses Loth deckt oder nicht. Geht dabei das Fadenkreuz vom Loth ab, so sind entweder die Fehler (3) und (4) einzeln oder gemeinschaftlich vorhanden; d. h. es steht entweder die Absehlinie zur Drehaxe des Fernrohrs nicht senkrecht (3), oder es ist diese

[1] Für die Messung der Winkel ist es begreiflicherweise einerlei, ob sich der Nonius oder der Kreisrand verschieben lässt. (§. 70.)

Axe der Ebene des Lineals nicht parallel (4), oder endlich es neigt sich die Drehaxe gleichzeitig zu der Absehlinie und der Ebene des Lineals.

Häufig rührt die erwähnte Abweichung nur von dem Fehler Nr. 4 her. Man verbessert daher zunächst die Stellung der Drehaxe gegen die Ebene des Lineals nach Massgabe der Abweichung der Visirebene von der lothrechten Lage. Da diese Axe senkrecht zum Ständer steht, so muss dessen Axe gegen die Linealebene verändert werden, was auf folgende Weise geschieht. Die Unterlagplatte (PQ) des Ständers ruht auf den 3 Punkten r, s (Fig. 124) und d (Fig. 125). Lüftet man die Schräubchen u und i, so kann dieselbe um die Axe rs mit Hilfe der Schräubchen d und e gedreht werden. Soll nämlich die Axe des Ständers und damit die Drehaxe des Fernrohrs gegen die Vorderseite des Lineals geneigt werden, so muss die Unterlagplatte bei d, e erhoben werden, was durch Lüftung des Schräubchens d und Anziehen von e geschieht, da das erstere Schräubchen in das Lineal eingreift, das letztere aber bloss darauf drückt. Die entgegengesetzten Drehungen der Schräubchen bringen auch die entgegengesetzten Bewegungen der Axen hervor.

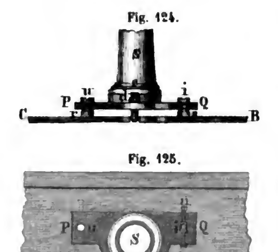


Fig. 124.

Fig. 125.

Ist es durch diese Verbesserungen nicht möglich, das Fernrohr dahin zu bringen, dass bei wagrechter Lage des Messtischblattes das Fadenkreuz im Auf- und Niederkippen fortwährend an der lothrechten Linie, auf deren einen Punkt es anfangs eingestellt war, hingleitet, so ist es wahrscheinlich, dass die optische Axe nicht senkrecht steht zur Drehaxe. Um sich hierüber mehr Gewissheit zu verschaffen, stelle man das Fadenkreuz auf den obersten Punkt der Lothlinie ein und beobachte beim Niederkippen die Abstände des Kreuzpunktes von dieser Linie. Findet man, dass dieselben erst zu- und dann wieder abnehmen, so ist dieses ein Beweis für die schiefe Lage der Axen; denn in diesem Falle beschreibt die optische Axe um die Drehaxe einen Kegel und der Weg, den das Fadenkreuz am Lothe bezeichnet, ist der Schnitt des Kegelmantels mit einer durch das Loth gehenden und der Kegelaxe parallelen Ebene, demnach ein Stück von einer Hyperbel. Ständen die beiden Axen senkrecht gegen einander, so wäre der Weg des Fadenkreuzes eine gerade Linie, die immer stärker von dem Lothe abwiche, je tiefer das Rohr herabgedreht würde. Ein solcher Fehler, wenn er sich zeigt, kann durch seitliche Verschiebung des Fadenkreuzes verbessert werden, da dessen Schnittpunkt und der optische Mittelpunkt des Objectivs die Visirlinie bestimmen. Die Verschiebung des Rings, welcher das Fadenkreuz trägt, geschieht durch zwei seitlich angebrachte Schräubchen. Nach welcher Seite

das Kreuz verstellt werden muss, wird in jedem gegebenen Falle der Augenschein leicht klar machen.

Ist die Kippregel zum Durchschlagen eingerichtet, so kann man die Untersuchung Nr. 3 auf folgende Weise für sich durchführen. Man stelle den Messtisch horizontal und richte die Kippregel so, dass zwei etwa 100 und 200 Fuss entfernte lothrechte Stäbe A und B von dem Fadenkreuze des Fernrohrs gedeckt werden, d. h. in der Visirlinie liegen. Alsdann schlage man das Fernrohr durch, ohne an der Stellung des Instruments sonst etwas zu verändern und stecke einen Stab C in einer Entfernung von 100 oder 150 Fuss so auf, dass er von dem Fadenkreuz geschnitten wird, also in der neuen Visirlinie liegt. Steht nun dieser dritte Stab mit den beiden ersten in gerader Linie, was man nach Wegnahme der Kippregel vom Messtische von B oder C aus untersuchen kann, so ist die Drehaxe des Fernrohrs senkrecht zur optischen Axe; liegen aber die drei Stäbe in zwei verschiedenen Vertikalebenen, so findet diese winkelrechte Lage der Axen nicht statt und es ist leicht zu finden, auf welcher Seite die Drehaxe einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der Fernrohraxe bildet. Durch seitliche Verschiebung des Fadenkreuzes kann man es leicht dahin bringen, dass beide Winkel gleich werden oder die Visirlinie und die Drehaxe senkrecht auf einander stehen.

Zu 5. Man befestige auf dem Messtische, 15 bis 20 Zoll von einander entfernt, zwei feine Nadeln senkrecht und stelle das Blatt wagrecht; dann setze man die Kippregel so darauf, dass die Linealkante an den beiden Nadeln liegt, und drehe schliesslich das Blatt so lange, bis das Fadenkreuz einen etwa 200 Fuss entfernten lothrechten Stab deckt. Visirt man nun auch an den beiden Nadeln hin, so decken dieselben den genannten Stab entweder, oder die Absehlinie geht an ihm vorbei. In dem ersteren Falle ist die Forderung Nr. 5 erfüllt, in dem zweiten aber nicht. Je nachdem die von den Nadeln bestimmte Visirlinie rechts oder links vom Stabe liegt, ist das Fernrohr am Ocularende links oder rechts zu drehen, bis die Drehaxe desselben senkrecht steht gegen die Richtung der Linealkante. Diese Drehung geschieht um den Punkt u und wird durch die Schräubchen m und n bewirkt. Es müssen zu dem Ende die Schräubchen u und i ein wenig gelüftet werden. Damit die Drehung um u stattfinden kann, während d in das Lineal hineingreift, ist die Platte PQ, wie Fig. 125 zeigt, bei d so weit ausgeschlitzt, als diese Drehung im ungünstigsten Falle erfordert. Die Wechselwirkung der Schräubchen m und n ist für sich klar: ihr Stützpunkt ist das Schräubchen i,

Fig. 124.

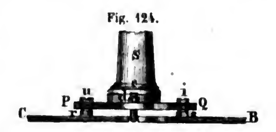


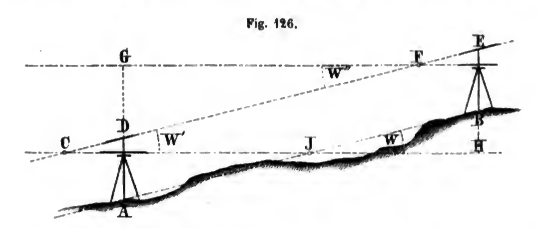
Fig. 125.

welches durch einen Schlitz in der Platte PQ und durch die Unterlage s in das Lineal reicht.

Zu 6. Diese Forderung ist nöthig, wenn die Kippregel die Höhen- und Tiefenwinkel richtig angeben soll. Steht der Messtisch und die Visirlinie wagrecht, so muss der Nullpunkt des Nonius auf den des Vertikalkreises zeigen, weil in diesem Falle auch der Höhen- oder Tiefenwinkel null ist. Stehen bei dieser Richtung des Tisches und des Rohres beide Nullpunkte um einen kleinen Bogen c von einander ab, so wird jeder gemessene Tiefen- und Höhenwinkel um die Grösse c fehlerhaft. Ob zu gross oder zu klein, hängt offenbar davon ab, ob unter den erwähnten Umständen der Nullpunkt des Kreises V links oder rechts vom Nullpunkt des Nonius liegt. Den Winkel, welcher durch den Bogen c gemessen wird, nennt man den Collimationsfehler des Instruments. Mit diesem Worte lässt sich die sechste Bedingung auch so aussprechen: die Kippregel soll keinen Collimationsfehler haben.

Um zu untersuchen, ob ein Collimationsfehler vorhanden und von welcher Grösse er ist, verfährt man wie folgt. An einem Bergabhange (Fig. 126) bezeichne man zwei Punkte A und B durch Grundpfähle. Dadurch ist die Richtung AB und ihre Neigung gegen den Horizont festgelegt.

Fig. 126.



Hierauf stelle man den Messtisch über A horizontal und bringe mit Hilfe der Lothgabel den Ständer S der Kippregel in das Loth von A. Demnächst messe man den Abstand AD = J und trage ihn auf eine Latte, vom Fusse an gerechnet. Diese Latte werde in B lothrecht aufgestellt, und es sey BE = AD = J. Nun richte man die Kippregel nach der Latte BE, stelle das Fadenkreuz auf den Punkt E ein und lese am Vertikalkreise den Höhenwinkel w', den er angibt, ab. Alsdann versetze man den Messtisch nach B und stelle ihn so hoch auf, dass bei wagrechtem Blatte der Abstand der Drehaxe E vom Punkte B gleich AD = J ist. Die Latte lasse man nunmehr in A lothrecht halten und visire die in D befindliche Marke von E aus an. Der Tiefenwinkel, welcher am Gradbogen abgelesen wird, sey w''.

Sind die beiden Ablesungen w' und w'' einander gleich, so hat das Instrument keinen Collimationsfehler; sind sie aber ungleich, so ist ihr halber Unterschied der Collimationsfehler. Denn nimmt man an, das w der wahre

Höhen- und Tiefenwinkel der Linie DE und c der Collimationsfehler ist, so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender zwei Gleichungen:

$$w' = w \pm c \text{ und } w'' = w \mp c.$$

Addirt man dieselben, so ergibt sich

$$w = \tfrac{1}{2}(w' + w'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

und subtrahirt man die zweite von der ersten, so folgt:

$$c = \pm \tfrac{1}{2}(w' - w''), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

wobei die Vorzeichen die zwei möglichen Lagen des Bogens c andeuten.

Ist der Höhenwinkel w' grösser als der Tiefenwinkel w'', so liegt der Nullpunkt des Kreises rechts vom Nullpunkt des Nonius; im entgegengesetzten Falle aber links. Bei der Lage rechts ist der Collimationsfehler, wenn er nicht weggeschafft werden kann, von den abgelesenen Höhenwinkeln zu subtrahiren und zu den Tiefenwinkeln zu addiren; bei der Lage links muss das Entgegengesetzte geschehen, wie man leicht selbst finden wird.

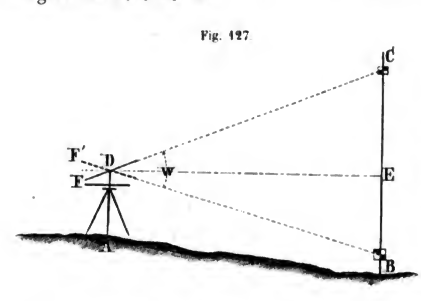
Wird der Nonius so eingerichtet, dass er ein wenig nach rechts oder links verstellt werden kann, so lässt sich der Collimationsfehler beseitigen und es braucht derselbe demnach bei gemessenen Höhen- und Tiefenwinkeln nicht in Rechnung gebracht zu werden.

§. 117. **Gebrauch der Kippregel.** Es seyen auf dem Felde drei Punkte A, B, C abgesteckt und es soll die Horizontalprojection des Winkels ABC gemessen werden. Man stelle den Messtisch über B auf, mache das Blatt horizontal und ziehe alle Schrauben an, welche eine Drehung des Blattes um seine lothrechte Axe verhindern. Dann bestimme man mit der Lothgabel auf dem Messtischblatte das Bild b des Punktes B auf dem Felde und visire mit der Kippregel, nachdem das Lineal genau an b gelegt worden ist, nach A, wo ein Stab lothrecht aufgestellt wurde. Ein feiner Strich mit einem harten Bleistifte nach der Linealkante gibt den Winkelschenkel ba, der mit BA in einer Vertikalebene liegt. Nun drehe man die Kippregel um den Punkt b nach C, stelle das Fadenkreuz genau auf den daselbst befindlichen Stab ein und ziehe wieder eine feine Linie am Lineale hin, so hat man auch den zweiten Schenkel bc in der Vertikalebene von BC. Da das wagrechte Messtischblatt die zwei lothrechten Ebenen abBA und cbBC nach den zwei Linien ba, bc schneidet, so ist offenbar abc der gesuchte Winkel.

Um den Punkt b kann man in der eben beschriebenen Weise beliebig viele Winkel aufnehmen. Das Anlegen des Lineals, welches mit grosser Genauigkeit geschehen muss, wird, wenn es oft wiederkehrt, dadurch zu erleichtern gesucht, dass man in dem Scheitel eine sehr feine mit einem Kopf von Siegellack versehene Nähnadel senkrecht einsteckt. Da aber dergleichen Anschlagnadeln oft zu Fehlern Veranlassung geben, so sollte man sie so viel als möglich zu vermeiden suchen.

Wie man mit dem Messtische und der Kippregel den Höhen- oder

Tiefenwinkel (w) einer durch zwei Punkte (A, B) gegebenen Linie findet, ist bereits im vorigen Paragraphen gezeigt worden und es bleibt daher nur noch anzugeben übrig, wie man einen Vertikalwinkel findet, der keinen wagrechten Schenkel hat.



Angenommen, es sey der Winkel BDC, unter welchem man nach Fig. 127 die lothrechte Linie BC von der Drehaxe D der Kippregel aus erblickt, wenn diese über dem gegebenen Punkt A steht, zu messen, so stelle man über diesem Punkte den Tisch wagrecht und bringe mit der Lothgabel den Ständer der Kippregel in das Loth von A. Hierauf messe man, indem man auf C einstellt, den Höhenwinkel $EDC = w'$ und durch Einstellung auf B den Tiefenwinkel $EDB = w''$. Die Summe beider ist der gesuchte Vertikalwinkel $BDC = w$. Es ist klar, dass hier der Collimationsfehler, wenn einer vorhanden ist, nicht berücksichtigt zu werden braucht, da er durch die Addition der Winkel w' und w'', welche ihn beide, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen enthalten, von selbst aus der Summe wegfällt.

§. 118. **Neuere Kippregeln.** In der Lehre von den Messungen wird gezeigt, dass die schiefe Lage der Visirebene der Kippregel gegen das Loth einen sehr grossen Einfluss auf die Winkelmessung ausübt, namentlich in durchschnittenem oder gebirgigem Terrain. Diese schiefe Lage tritt aber bei einer an und für sich fehlerfreien Kippregel auch dann ein, wenn das Messtischblatt nicht genau horizontal steht, oder wenn sich das aufgespannte Papier etwas erhebt, oder wenn unter das Lineal der Kippregel feine Sandkörnchen kommen u. s. w. Ferner haben wir in §. 116 gesehen, dass die Lage der Absehlinie der Kippregel gegen die Drehaxe des Fernrohrs in dem Falle schwer zu untersuchen ist, wo sich das Fernrohr nicht durchschlagen lässt. Es soll also dieses Instrument stets so eingerichtet seyn, dass erstens das Fernrohr durchgeschlagen und zweitens die Visirebene fortwährend vertikal erhalten werden kann. Endlich ist drittens für die Kippregel ein zum Distanzmessen eingerichtetes Fernrohr erwünscht. Diese drei Anforderungen erfüllt die Kippregel, welche wir im verflossenen Jahre zu dem in §. 115 beschriebenen Messtisch anfertigen liessen, und die wir nachstehend kurz beschreiben, unter der ausdrücklichen Bemerkung, dass die Construction von Kippregeln mit durchschlagbarem Fernrohre, auf dessen Drehaxe eine Röhrenlibelle steht, schon länger bekannt ist und daher hier

nur die Verbindung des Reichenbach'schen Distanzmessers mit der verbesserten Kippregel als neu erscheint. [1]

Fig. 128.



Fig. 128 stellt die neue, auch zum Distanzmessen eingerichtete Kippregel in perspektivischer Ansicht dar. Fernrohr und Lineal sind wie bei der vorhergehenden durch einen Ständer verbunden, auf dem, der Drehaxe des Fernrohrs parallel, eine Röhrenlibelle o ruht, durch deren Einspielen man sich fortwährend überzeugen kann, ob die genannte Axe horizontal und folglich die Visirebene vertikal ist. Sollte das Menselblatt seine horizontale Lage verändert haben, so wird dieses durch den Stand der Libelle sofort angezeigt, worauf man dieselbe durch die Fussschrauben f, f des

[1] Die auf Seite 150 u. ff. beschriebene Ertel'sche Kippregel trägt seit neuerer Zeit auf der Drehaxe D des Fernrohrs ebenfalls eine zu dieser Axe parallel gestellte Röhrenlibelle.

neuen Messtisches (Fig. 121) sofort verbessern kann. Wäre die geneigte Lage der Drehaxe des Fernrohrs durch zufällige Erhöhung des Papiers, womit das Menselblatt bespannt ist, oder durch Sandkörnchen, die unter das Lineal gekommen sind, entstanden, so kann man diese Ursachen ebenfalls erkennen und unschädlich machen. Hätte sich aber das Tischblatt, wie es allerdings vorkommt, verzogen, so dass seine Oberfläche keine Ebene mehr ist und folglich auch nicht überall wagrecht seyn kann, so bleibt nichts übrig, als an den geneigten Stellen des Blattes mit Hilfe der Schraube g die Drehaxe x des Fernrohrs zu heben oder zu senken, bis sie horizontal ist, was durch das Einspielen der Libelle angezeigt wird. (Die Wirkung der Schraube g erklärt sich dadurch, dass die Platte p, auf welcher Fernrohr, Libelle und Vertikalkreis (v) mittelbar ruhen, um eine der Linealkante parallel laufende Axe ii_1 drehbar ist.)

Die Einrichtung des Fernrohrs stimmt mit dem in §. 184 beschriebenen des Ertel'schen Universalinstruments vollkommen überein und muss desshalb, da hier die Distanzmesser noch nicht betrachtet werden können, dorthin verwiesen werden, sowie auch über die Einrichtung und den Gebrauch des ganzen Vertikalkreises mit zwei gegenüberstehenden Nonien Näheres in den §§. 135—137 nachzulesen wäre, falls die auf Seite 154—156 gegebenen Erläuterungen über den an der gewöhnlichen Kippregel angebrachten Gradbogen nicht hinreichen sollten. Um eine zu grosse Höhe des Ständers zu vermeiden, hat man am vorderen Ende des Fernrohrs ein Gegengewicht π_1 angebracht, durch welches die beiden ungleich langen Theile dieses Rohrs gleich schwer wurden, von denen selbstverständlich nur der kürzere Theil zum Durchschlagen benützt wird.

Die Prüfung und Berichtigung unserer Kippregel erstreckt sich über die Libelle, das Fernrohr und den Vertikalkreis.

Die Libelle lässt sich von der Drehaxe abheben und umsetzen und wird folglich nach §. 39 dieser Axe parallel gemacht. Die Horizontalstellung geschieht durch je zwei Fussschrauben f, f des Messtisches (Fig. 121), in deren Richtung die Libelle gestellt werden muss. In so ferne das Fernrohr bloss zum Visiren dient, wie das der gewöhnlichen Kippregel, wird es auch wie dieses untersucht und berichtigt, wobei hier nur die normale Stellung seiner Visirlinie gegen die Drehaxe erleichtert ist, welche nach der Schlussbemerkung zu Nr. 4 §. 116 vorgenommen wird. Gebraucht man aber das Fernrohr als Distanzmesser, so ist es nach §. 187 zu untersuchen und zu berichtigen.

Bezüglich der Prüfung und Berichtigung des Vertikalkreises und seiner Nonien sehe man §. 137 Nr. 4.

§. 119. **Genauigkeit der Messtischaufnahmen.** Es ist nicht unsere Absicht, hier schon den Einfluss nachzuweisen, welcher aus einem unvollkommenen Messtischapparate oder aus ungeschickter Behandlung desselben entspringt — davon wird bei den Winkelmessungen die Rede seyn — für jetzt liegt uns nur daran zu zeigen, wie gross die Genauigkeit der

Messtischaufnahmen unter den günstigsten Umständen, d. h. bei fehlerfreiem Apparate, tadelloser Arbeit, festem Boden und guter Beleuchtung seyn kann. Nehmen wir ausser diesen günstigen Umständen ferner noch an, dass der Scheitel b des aufgenommenen Horizontalwinkels a b c mit grösster Schärfe bestimmt sey, so wird die Genauigkeit dieses Winkels nur noch von der Dicke der Linien, welche seine Schenkel vorstellen, abhängen.

Heisst diese Dicke d und die Länge des Schenkels s, so verdeckt dieser Schenkel einen Winkel

$$w = 206265 \cdot \frac{d}{s} \text{ Sekunden}; \quad \ldots\ldots \quad (88)$$

und da derselbe Fehler auch bei dem zweiten Schenkel möglich ist, so wird der mit dem Messtisch aufgenommene Winkel im Allgemeinen um 2w unsicher, wenn auch der Geometer und sein Apparat ganz vorzüglich sind. Nimmt man an, dass d = 0,02 Linien und s = 10 Zoll = 100 Linien ist, so wird 2w = 82,5 Sekunden = 1 Min. 22,5 Sek. Bei kleinerem s würde 2w noch grösser werden, da die Ungenauigkeit mit der Länge der ausgezogenen Schenkel abnimmt. Wenn demnach schon unter den allergünstigsten Umständen ein Horizontalwinkel auf dem Messtische um fast anderthalb Minuten unsicher ist, so wird seine Genauigkeit unter gewöhnlichen Umständen, wo indessen noch sorgfältig gearbeitet wird, nicht grösser als etwa drei Minuten angenommen werden können.

Die Genauigkeit der Messtischaufnahme hängt unter Anderem auch sehr von der Güte ab, mit welcher das Zeichnungspapier auf das Messtischblatt gespannt ist. Denn wenn das Papier Falten macht, so ist die Wirkung davon dem schiefen Stande des Blattes und der daraus hervorgehenden schiefen Lage der Visirebenen gleich zu achten. Hieraus entspringen aber, wenn man nicht durch die richtige Anwendung neuerer Kippregeln (§. 118) den schlimmen Einflüssen vorbeugt, grobe Fehler. Da aber in jedem Falle das Papier tadelfrei aufgespannt seyn soll, so erscheint es nicht überflüssig, hier einige Bemerkungen über das Papieraufspannen zu machen.

Um zu verhüten, dass das Papier bei feuchter Witterung auf dem Tischblatte aufsteht, muss es sehr nass aufgespannt und an jeder Stelle des Bretts festgehalten werden. Dieses Festhalten geschieht durch Eiweiss, welches mit Wasser zu Schaum geschlagen und auf die Oberfläche des Tischblattes gleichmässig aufgetragen wird, nachdem das Papier, welches grösser ist als das Brett, stark angefeuchtet wurde. Sobald das Brett mit Eiweiss bestrichen ist, wird das Papier mit der nassen Seite vorsichtig aufgelegt und mit einem reinen Tuche (nach allenfallsiger Unterbreitung eines Bogens Papier) von der Mitte gegen den Rand hin angedrückt. Zeigen sich Blasen unter dem Papiere, so werden diese durch wiederholtes Streichen gegen den Rand getrieben, wo sie verschwinden. Liegt das Papier auf der ganzen Oberfläche des Tisches fest an, so werden die vorstehenden Ränder desselben mit Gummi, Mundleim oder flüssigem Leim an den Seitenflächen des

Blattes auf bekannte Weise befestigt. Beim Abschneiden des Papiers löst sich das Eiweiss leicht vom Brette ab.

Das Festkleben des Papiers an den Seiten des Reissbretts hat ebenfalls seinen guten Grund; denn würde es auf der Oberfläche angeklebt werden, so wären geringe Erhöhungen an den Rändern und folglich schiefe Lagen des Lineals der Kippregel und der Visirebenen nicht zu vermeiden, und überdiess würde die Ebene des Blattes durch das Abschneiden des Papiers sowohl als durch das Reinigen von den Klebmitteln leiden.

C. Instrumente zur Aufnahme und Absteckung der Winkel im Gradmasse.

§. 120. Die hieher gehörigen Instrumente können nach verschiedenen Principien gebaut seyn. Bis jetzt haben sich deren drei geltend gemacht. Es gründet sich nämlich die Einrichtung eines Winkelmessers entweder auf die Eigenschaft der Magnetnadel, zu jeder Zeit eine bestimmte Richtung gegen die Mittagslinie eines Orts anzunehmen; oder auf die Zurückwerfung und Brechung des Lichts durch Spiegel oder Prismen von Glas; oder endlich auf die Verbindung eines Fernrohrs mit dem beweglichen Durchmesser eines getheilten Kreises, woran die Drehung des Fernrohrs von einem Winkelschenkel zum andern mit entsprechender Genauigkeit abgelesen werden kann.

Nach diesen Grundlagen für den Bau kann man die gradmessenden Winkelinstrumente in Bussolen oder Winkelmesser mit Magnetnadeln, in Spiegelinstrumente oder Winkelmesser mit Spiegeln oder Prismen, und in Theodolithe oder Winkelmesser mit Horizontal- und Vertikalkreisen eintheilen.

1. Die Bussoleninstrumente.

§. 121. Der Name Bussole (von dem italienischen bussola, eine kleine Büchse) passt für die hier abzuhandelnden Instrumente in so ferne, als das Gehäuse der Magnetnadel und des Gradringes büchsenförmig ist und einen wesentlichen Bestandtheil der auf die Eigenschaften des Magnets gegründeten Winkelmesser ausmacht.

Zur gründlichen Einsicht in die Wirkungsweise der Bussoleninstrumente und namentlich zur Beurtheilung ihrer Genauigkeit wird erfordert, dass man einen Theil der durch Beobachtungen festgestellten Wirkungen des Erdmagnetismus kenne, wesshalb wir die für die Vermessungskunde wichtigsten derselben hier anführen.

Eine Magnetnadel, welche so aufgehängt ist, dass sie sich frei drehen kann, und in deren Nähe keine Gegenstände von Eisen sich befinden, nimmt bekanntlich von selbst eine bestimmte Richtung gegen die Mittagslinie ihres Orts an. Diese Richtung, der magnetische Meridian des Orts, fällt entweder mit der Mittagslinie zusammen oder nicht. Das

Zusammentreffen findet an den wenigsten Orten der Erde statt; an den meisten bildet der magnetische Meridian mit dem geographischen einen Winkel. Die Horizontalwinkel beider Meridiane nennt man die **magnetische Abweichung** (**Declination**). Diese Abweichung kann eine östliche oder westliche seyn. Die Linie, welche diejenigen Orte der Erde verbindet, an denen die Magnetnadel keine Abweichung anzeigt, die Linie ohne Abweichung, geht durch die Pole um die ganze Erde und theilt dieselbe in zwei Hälften, die europäisch-afrikanische und die asiatisch-amerikanische. In der ersten Hälfte ist die Abweichung des Nordpols der Nadel gegenwärtig westlich, in der zweiten östlich. Diese Abweichungen sind für einen und denselben Ort in verschiedenen Zeiten verschieden, und zwar nicht bloss hinsichtlich ihrer Grösse, sondern auch in Beziehung auf ihre Lage gegen die Mittagslinie: sie können nämlich für einen und denselben Ort grösser und kleiner, östlich und westlich werden. So waren im 16. Jahrhunderte alle Abweichungen in Europa östliche, wurden dann null und gingen in westliche über. Diese wuchsen bis vor etwa 30 Jahren zu einer bestimmten Grösse an und sind nun wieder im Abnehmen begriffen: es lässt sich erwarten, dass diese Abnahme fortdauert und in eine östliche Zunahme übergeht, worauf dann wieder eine Bewegung gegen den Erdmeridian eintritt u. s. f. Dergleichen Aenderungen im Stande der Magnetnadel gegen den Erdmeridian nennt man wegen der grossen Zeiträume, die sie erfordern, um an ihren Grenzen anzulangen, **säculare Aenderungen**. Die nachstehende Tabelle gibt einen Begriff von ihrer Grösse.

Ort.	Jahr.	Abweichung.	Ort.	Jahr.	Abweichung.
Paris	1580	11° 30′ östlich	Paris	1814	22° 34′ westlich
„	1618	8° 0′ „	„	1816	22° 25′ „
„	1663	0°	„	1825	22° 22′ „
„	1700	8° 10′ westlich	„	1828	22° 5′ „
„	1780	19° 55′ „	„	1832	22° 3′ „
„	1805	22° 5′ „	„	1835	22° 4′ „

So wie die Abweichungen der Magnetnadel an einem und demselben Orte mit der Zeit sich ändern, so sind sie auch zu ein und derselben Zeit an verschiedenen Orten verschieden, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht, in der wir einige Orte mit westlichen und andere mit östlichen Abweichungen zusammengestellt haben.

Ort.	Jahr.	Abweichung.	Ort.	Jahr.	Abweichung.
Hermannstadt	1845	10° 6′ westlich	Kasan	1842	3° 24′ östlich
Krakau	„	12° 15′ „	Katharinenburg	„	6° 39′ „
Gratz	„	14° 22′ „	Barnaul	„	8° 25′ „
München	„	16° 30′ „	Sydney	„	9° 51′ „
Stuttgart	„	17° 51′ „	Bay of Islands	„	13° 36′ „
Frankfurt	„	18° 13′ „	Port Louis	„	17° 36′ „

Die eben besprochenen Aenderungen der magnetischen Abweichungen geschehen nicht sprungweise, sondern stetig, so dass der Stand der Magnetnadel an einem und demselben Orte mit jedem Tage ein anderer ist. Aber auch die auf einen bestimmten Tag treffende mittlere Abweichung bleibt innerhalb dieses Zeitraums nicht unveränderlich, sondern ändert sich mehr und in anderer Weise als die Säcularänderung allein fordern würde. Es finden nämlich von der mittleren Richtung der Nadel, welche für irgend einen gegebenen Tag gilt, wieder östliche und westliche Abweichungen statt, und zwar sind dieselben im Sommer grösser als im Winter und bei Tage stärker als bei Nacht, so dass man den Grund dieser täglichen Aenderungen in dem Einflusse des Sonnenlichts auf die magnetischen Eigenschaften der Körper sucht. Auch hat man beobachtet, dass die täglichen Aenderungen wie die säcularen von der geographischen Lage der Orte abhängen. Folgende Tabelle gibt einen Begriff von der Grösse dieser Aenderungen an einem Tage.

Ort.	Abweichung.		Ort.	Abweichung.	
	Sommer.	Winter.		Sommer.	Winter.
St. Helena	0° 4',06	0° 3',03	Katharinenburg	0° 8',43	0° 3',89
Barnaul	7,34	2,96	München	9.34	6.37
Nortschinsk	7,51	2 53	Petersburg	10,07	5,88
Greenwich	8,16	7,02	Toronto	10,70	6,64

Die Magnetnadel hat in unseren Gegenden ungefähr um 8 Uhr Morgens ihre grösste östliche und um 2 Uhr Nachmittags ihre grösste westliche Abweichung; während des Abends und der Nacht kehrt sie wieder auf die Ostseite zurück. Die grössten östlichen und westlichen Abweichungen an einem Tage sind nicht in jedem Jahre von gleicher Grösse, sondern steigen und fallen innerhalb enger Grenzen, so dass man wieder Perioden des Zu- und Abnehmens der täglichen Bewegung der Magnetnadel annehmen muss. Nach Lamont dauert eine solche Periode etwas mehr als 10 Jahre und innerhalb derselben nimmt die Nadel z. B. für München eine grösste Abweichung von 11,5 Minuten und eine kleinste von 6,3 Minuten an, worauf sie wieder zur grössten zurückkehrt. In Folge der täglichen Bewegung kann der Winkel, den die äussersten Lagen der Nadel einschliessen, für München $2 \times 11,5$ oder 23 Minuten und in nördlicher gelegenen Orten noch mehr betragen.

Zu den täglichen Aenderungen der Abweichungen, welche für Messungen mit der Bussole schon schlimm genug sind, kommen die noch schlimmeren magnetischen Störungen oder diejenigen Abweichungen der Magnetnadel, welche ihrer täglichen Aenderung widersprechen und mit dem Stande der Sonne in keiner Beziehung stehen, wohl aber mit öfter wiederkehrenden Naturerscheinungen (z. B. Nordlichtern) oder grösseren Elementar-

ereignissen (wie Erdbeben, vulkanischen Ausbrüchen etc.) zusammenhängen. Diese Störungen machen die Nadel unruhig und veranlassen Schwankungen derselben, welche oft über einen Grad betragen.

Hieraus geht zur Genüge hervor, dass man die Bussoleninstrumente zu genauen Messungen niemals gebrauchen kann, und dass es folglich Verschwendung wäre, eine grössere Sorgfalt auf ihren Bau zu verwenden, als der Genauigkeit, womit sich die Richtung der Magnetnadel bestimmen lässt, entspricht. Diese Genauigkeit darf im Durchschnitte auf etwa 15 Minuten angenommen werden, vorausgesetzt erstens, dass man bei stattfindenden grösseren Störungen, welche sich durch ein Zittern der Nadel kundgeben, gar nicht beobachtet, und zweitens, dass die Messungen mit der Bussole nicht bloss auf die Bestimmung einiger Winkel beschränkt sind, sondern längere Zeit andauern und auch Lagenbestimmungen gegen die Mittagslinie erfordern.

Die Feldbussole.

§. 122. **Beschreibung.** Die Feldbussole, welche auch der Feldmessercompass genannt wird, besteht aus drei Theilen: dem Compass, dem Diopter und dem Gestelle. Fig. 129 stellt die Ertel'sche Feldbussole vor.

Fig. 129.



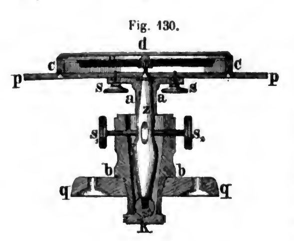
Der Compass. Ein cylindrisches Gehäuse (c) von 4 Zoll Durchmesser und $1/2$ Zoll Höhe ist auf einer ebenen Platte (p) von Messing befestigt. In der Mitte des Gehäuses erhebt sich ein spitziger Stahlstift und

auf diesem ruht mittels eines Carneolhütchens die Magnetnadel (n). In der Ebene des Oberrandes dieser Nadel liegt senkrecht gegen die innere Wand des Gehäuses der Gradring, welcher in 360 Grade eingetheilt ist. Die Numerirung dieser Grade läuft von links nach rechts wie auf dem Zifferblatte einer Uhr. Bei der Ablesung können halbe und viertel Grade genau genug geschätzt werden. Die Nadel und der getheilte Ring sind durch eine zur Ebene des letzteren parallele und in dem Gehäuse durch einen eingesprengten Ring festgehaltene Glasscheibe (d) gegen Beschädigung geschützt. Wenn die Nadel nicht gebraucht wird, so kann sie zur Schonung ihres Drehpunktes mit Hilfe eines Hebels (e), wenn er durch das Schräubchen i niedergedrückt wird, von der Stahlspitze abgehoben und an die Glasscheibe sanft angedrückt werden; dreht man die Schraube i zurück, so schwebt die Nadel wieder auf dem Stifte. Das Abheben der Nadel geschieht durch eine kleine Hülse, welche den Stift centrisch umgibt und an dem inneren Hebelende befestigt ist. Diese Vorrichtung nennt man die Arretirung der Bussole.

Das Diopter. Man wendet an Bussolen selten oder nie ein Fernrohr mit Fadenkreuz an, weil ein Diopter hinreichende Genauigkeit gewährt. Hier sind zwei Diopter in entgegengesetzten Richtungen angebracht: mit dem oberen wird von f nach f' und mit dem unteren von f' nach f visirt. Die beiden Visirrichtungen sollen in einer Ebene liegen, welche zum Gradringe senkrecht steht und durch dessen Mittelpunkt geht. Da wo diese gemeinschaftliche Visirebene den Gradring schneidet, befinden sich die Eintheilungszeichen 0^0 und 180^0, während ihr Schnitt auf der Bodenplatte des Gehäuses mit NS bezeichnet ist, wobei N an 0^0 und S an 180^0 liegt. Die Diopterflügel f und f' können, wie die Figur zeigt, um Scharniere auf dem Compass niedergelegt werden. An einigen Bussolen befindet sich das Diopter ausserhalb des Compasses; von dieser Einrichtung ist später (§. 125) die Rede.

Das Gestelle ist ähnlich wie das des Messtisches eingerichtet, soweit es die Beine und deren Verbindung mit der Kopfplatte (q), welche hier von Metall ist, angeht. Was aber die Horizontal- und Vertikalbewegungen, die dasselbe gestatten muss, betrifft, so werden diese an einem Zapfen (z) ausgeführt, welcher (nach dem Durchschnitte in Fig. 130) sich in einer mit der Kopfplatte festverbundenen Büchse (b) auf einer Kugel (k) dreht, wenn ihm die vier durch die Büchse gesteckten und auf ihn drückenden Stellschrauben (s_1, s_2, s_3, s_4) Spielraum gewähren. Man begreift leicht, wie sich der Zapfen z durch die Schrauben s_1 und s_2 in der Richtung s_1 s_2 und durch s_3 und s_4 in einer hierauf senkrecht stehenden Ebene hin und her bewegen und schliesslich feststellen lässt. Ist nun der Compass

Fig. 130.

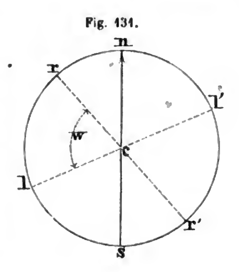


mit dem Zapfen senkrecht verbunden, so theilt der erstere offenbar die Bewegungen des letzteren und es steht jener horizontal, wenn dieser vertikal ist. Die Drehung des Compasses im wagrechten Sinne ist durch den hohlen Kegel (a) möglich, welcher das obere Ende des Zapfens centrisch umgibt, und an dessen Grundplatte die Compassplatte durch Schrauben (s, s) befestigt ist.

§. 123. **Gebrauch.** Um mit der Bussole einen auf dem Felde abgesteckten Winkel (l c r) zu messen, stelle man das Instrument über dem Scheitel (c) so auf, dass der Stift der Nadel in dem Lothe des Scheitels liegt (was durch einen Senkel leicht bewirkt werden kann) und bringe die Ebene des Gradrings durch die auf den Vertikalzapfen wirkenden Stellschrauben in eine horizontale Lage. Man könnte zu dem Ende auf dem Glasdeckel eine Dosenlibelle aufsetzen; es genügt aber auch, die Bussole dahin zu bringen, dass die beiden Nadelspitzen in der Ebene des Gradrings liegen bleiben, wenn dieser im Kreise gedreht wird. Denn da die fehlerfreie Nadel horizontal schwebt, so ist auch der Gradring horizontal, wenn er nach zwei sich schneidenden Richtungen in der Ebene der Nadel liegt.

Nach dieser Vorbereitung stelle man das Diopter zuerst auf den linken Schenkel (c l) genau ein und mache an der nördlichen Nadelspitze, nachdem kein Schwanken derselben mehr stattfindet, die Ablesung a′ und an der südlichen die Ablesung b′. Hierauf drehe man das Diopter auf den rechten Schenkel (c r), stelle es wieder genau ein und lese an beiden Nadelenden ab: die Ablesung sey an dem Nordende a″ und an dem Südende b″. Stellt die Nadel genau einen Durchmesser des Gradrings vor und ist dessen Theilung richtig, so werden die Ablesungen an dem Südende der Nadel um 180⁰ von denen am Nordende verschieden seyn, in der Art, dass $b' = 180^0 + a'$ und $b'' = 180^0 + a''$ ist. Ist aber die Nadel kein Durchmesser des Kreises, d. h. geht die Verbindungslinie ihrer Endpunkte nicht durch den Mittelpunkt der Theilung, so werden die Ablesungen a′, b′ und a″, b″ um etwas mehr oder weniger als 180⁰ verschieden seyn. Umgekehrt deutet diese Verschiedenheit bei richtiger Theilung des Kreises darauf hin, dass die Nadel kein Durchmesser, sondern eine Sehne ist. Den senkrechten Abstand dieser Sehne von dem Mittelpunkte der Theilung nennt man die Excentricität der Nadel. Durch die Ablesungen an den beiden Enden der Nadel wird, wie am Schlusse dieses Paragraphen zu ersehen, der Einfluss der Excentricität auf die Neigungswinkel der Visirlinien gegen den magnetischen Meridian beseitigt. Darin liegt der eine Grund der doppelten Ablesung; der andere aber ist, dass man eine allenfallsige Irrung in der ersten Ablesung sofort durch die zweite gewahr wird, wenn der Unterschied beider nicht genau oder doch sehr nahe 180⁰ beträgt.

Fig. 131.



Um aus den Ablesungen a' und a'' den richtigen Winkel lcr = w zu erhalten — ein fehlerfreies Instrument vorausgesetzt — hat man zu beachten, ob beide Winkelschenkel auf einer Seite der Nadel sich befinden, oder ob der eine links und der andere rechts von ihr liegt. In dem ersteren Falle ist der gesuchte Winkel

$$w = a' - a'' \qquad (89)$$

und in dem zweiten Falle, wo die erste Ablesung (a') kleiner ist als die letzte (a''):

$$w' = 360^0 + a' - a''. \qquad (90)$$

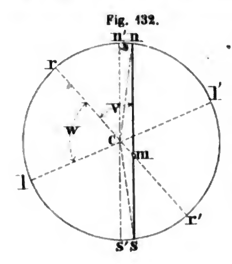
Daran, dass a'' > a', kann man allein schon erkennen, dass die Visirlinie beim Uebergange vom linken zum rechten Schenkel den Nordpunkt der Nadel überschritten hat.

Die Richtigkeit der vorstehenden zwei Gleichungen lässt sich wie folgt beweisen. Für den zu messenden Winkel w ist die Ablesung für den linken Schenkel = arc ln = a' und für den rechten Schenkel = arc rn = a'', folglich das Mass des gesuchten Winkels w = arc lr = arc ln — arc rn = a' — a''. Wäre l'cr' der zu messende Winkel, so würde a' = arc l'sn und a'' = arc r'sn, mithin auch arc l'r' = arc l'sn — arc r'sn = a' — a'' das Mass des Winkels w seyn. Hätte man endlich den Winkel rcl' = w' zu messen, so wäre a' = arc rn, a'' = arc l'sn und folglich, da arc rnl', das Mass des gesuchten Winkels, gleich arc rn + arc nl' und arc nl' = 360⁰ — a'' ist, w' = a' + 360⁰ — a'' = 360⁰ + a' — a'', w. z. b. w.

Obige Gleichungen enthalten folgende Regel: Aus den Ablesungen a' und a'', welche beziehlich für den linken und rechten Schenkel eines Winkels gemacht werden, erhält man die Grösse dieses Winkels in Graden, wenn man die zweite Ablesung von der ersten abzieht und in dem Falle, dass die Differenz negativ wird, 360⁰ zu ihr addirt.

Sollte eine Excentricität der Nadel stattfinden (was, wie schon bemerkt, die Ablesungen am Süd- und Nordende sofort kundgeben), so hat dieselbe zwar keinen Einfluss auf die Messung des Winkels zweier gegebener Richtungen, wohl aber auf die Neigung jedes einzelnen Schenkels gegen den magnetischen oder geographischen Meridian. Denn angenommen, dass in Fig. 132 c der Mittelpunkt des Gradrings und ns die Nadel (oder wenigstens die Verbindungslinie ihrer Endpunkte) sey: so erhält man die Neigung des linken Winkelschenkels cl gegen den magnetischen Meridian durch den Bogen ln angegeben, während sie in der That nur durch den Bogen ln' gemessen wird, der sich ergibt, wenn man durch c die n's' zu der Richtung der Nadel ns parallel zieht. Man findet also in diesem Falle die Neigung um den Winkel f zu gross. Dasselbe gilt für die Neigung des rechten Schenkels rc, welche

Fig. 132.



dem Bogen r n' entspricht, während man r n abliest. Da aber der Winkel l c r = w durch Abzug des Bogens r n = a'' von dem Bogen l n = a' erhalten wird, so heben sich hierdurch die aus der Excentricität der Nadel entspringenden Fehler (f) in jeder einzelnen Ablesung (a', a'') in Bezug auf den Winkel w der zwei Richtungen c l, c r auf.

Fasst man dagegen bloss den Neigungswinkel (r m n = v) irgend einer Richtung (c r) gegen den magnetischen Meridian (n s) in's Auge, so wird dieser in dem vorliegenden Falle durch die Ablesung a am Nordende der Nadel um den Winkel f zu gross erhalten. Macht man aber auch am Südende (s) eine Ablesung, so entspricht diese dem Bogen r l' s = b', welcher um das Stück s s' = n n' des Kreises zu klein ist. Es ist folglich auch s c s' = f. Setzt man r' c s = r l' s — 180⁰ = b' — 180⁰ = b, so ist offenbar der gesuchte Neigungswinkel

$$v = \frac{1}{2}(a + b). \qquad (91)$$

Dieser Ausdruck gilt für jede Richtung der Nadel, wenn man unter dem Neigungswinkel jenen versteht, welcher durch den Bogen zwischen dem Nullpunkt der Visirlinie und dem nächsten Nadelende gemessen wird. Unter dieser Voraussetzung liefert die letzte Gleichung folgende Regel: Mit einer excentrischen Nadel gibt eine sonst fehlerfreie Bussole den Neigungswinkel irgend einer Richtung gegen den magnetischen Meridian ohne Fehler, wenn man an den beiden Nadelenden abliest, die grössere Ablesung um 180⁰ vermindert und aus der dadurch erhaltenen Differenz und der kleineren Ablesung das arithmetische Mittel nimmt.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass bei dem Gebrauche der Bussole alle eisernen oder eisenhaltigen Gegenstände aus ihrer Nähe so weit entfernt werden müssen, dass keine Ablenkung der Nadel von ihrem Meridian zu fürchten ist.

§. 124. **Prüfung und Berichtigung.** Die Prüfungen, denen die Bussole vor ihrem Gebrauche zu unterwerfen ist, lassen sich in zwei Classen abtheilen: in die erste gehören jene, welche ein für allemal vorgenommen werden, und in die zweite diejenigen, welche vor jeder Anwendung der Bussole zu wiederholen sind. Zur ersten Classe rechnen wir folgende 3 Untersuchungen:

1) ob der Gradring richtig eingetheilt ist;

2) ob das Gehäuse keine Eisentheile oder andere auf die Nadel wirkende Metalle enthält, und

3) ob die Gehäusplatte nach ihrer Verbindung mit dem Centralzapfen zu diesem senkrecht steht.

Die Nothwendigkeit der beiden ersten Prüfungen stellt sich von selbst dar, und was die dritte betrifft, so lehrt eine einfache Betrachtung, dass sie für die Horizontalstellung des Gradrings durchaus erforderlich ist.

Zu 1. Bei der Bussole, die doch nur eine geringe Genauigkeit gewährt, genügt es, wenn man sich mit Hilfe eines guten Zirkels überzeugt, dass keine groben Theilungsfehler vorhanden sind. Zu dem Ende kann man nach

Wegnahme des Glasdeckels etwa 5 Grade der Theilung an einer beliebigen Stelle in den Zirkel nehmen und zusehen, ob zu je 5 anderen Graden derselbe Bogen gehört, und ob 72 solche Bögen den ganzen Kreis genau darstellen oder nicht. Hält die Theilung diese Probe aus, so wiederhole man dasselbe Verfahren mit der gleichen Zirkelöffnung noch viermal, gehe aber dabei immer von einem neuen Theilstrich aus, der gegen den vorigen um einen Grad absteht. Zeigt sich auch hier kein Fehler, so kann man sich mit der Theilung des Gradrings vollständig begnügen; sollten sich jedoch Unrichtigkeiten in der Eintheilung herausstellen, so müssten diese, falls sie nicht zu gross sind und den Ring unbrauchbar machen, angemerkt werden, um bei Messungen die gehörige Rücksicht darauf nehmen zu können. Indessen werden Bussolen, die aus guten mechanischen Werkstätten bezogen werden, kaum jemals einen für sie nachtheiligen Theilungsfehler haben, da erstens die Theilung mit Maschinen geschieht, welche für viel feinere Theilungen als die der Compassringe bestimmt sind, und zweitens der Ruf jener Werkstätten es fordert, dass die von ihnen ausgehenden Instrumente vor ihrer Absendung genau untersucht und nöthigenfalls verbessert werden.

Zu 2. Die zweite Untersuchung besteht darin, dass man das Gehäuse der Nadel ganz ruhig und langsam um seine Axe dreht und beobachtet, ob die Nadel fortwährend ihre Richtung beibehält, oder ob sie stellenweise sich von dem Gehäuse mit fort- oder niederziehen lässt. Sollte sich dieses Ziehen nach wiederholten Versuchen bestätigen, so kann es nur von einer Verunreinigung des Messings durch Eisen oder ein anderes auf die Nadel wirkendes Metall (z. B. Nickel) herrühren und es muss, je nachdem ein Fort- oder Niederziehen stattfindet, die Büchse oder die Bodenplatte des Gehäuses von besserem Metall angefertigt werden. Eine Abänderung dieser Untersuchung besteht darin, dass man die Nadel abhebt und auf eine feine Spitze ausserhalb des Gehäuses legt, dieses selbst aber ringsum an der Nadel vorüberführt und zusieht, ob diese ihre Lage ändert oder nicht.

Zu 3. Man stelle die Ebene des Gradrings dadurch horizontal, dass man eine berichtigte Dosenlibelle auf den Glasdeckel aufsetzt und durch die vier Stellschrauben (s_1 bis s_4), welche auf den Centralzapfen wirken, zum Einspielen bringt. Hierauf drehe man die Bussolenplatte sammt der Libelle langsam um den Zapfen und sehe zu, ob die Libelle fortwährend einspielt oder nicht: in dem ersteren Falle ist die geforderte senkrechte Lage vorhanden, in dem letzteren aber nicht. Will man die Abweichung (f) von der senkrechten Lage nach einer beliebigen Richtung (etwa nach der durch 0° und 180° oder durch NS bezeichneten) kennen lernen, so drehe man das horizontal gestellte Bussolengehäuse genau um 180° und beobachte den Ausschlag der Libellenblase in der gegebenen Richtung: die Grösse dieses Ausschlags misst alsdann die doppelte Abweichung von 90° und seine Lage zeigt an, auf welcher Seite des Zapfens der spitze und der stumpfe Neigungswinkel liegen. Denn denkt man sich unter bp einen Schnitt der wagrecht gestellten Bodenplatte nach einer beliebigen Richtung, und unter cz

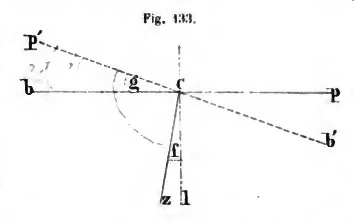


Fig. 133.

die Axe des Centralzapfens, so wird, wenn der Winkel bcz $= 90^0 - f$ ist, also die Abweichung f stattfindet, nach einer Drehung der Platte um 180⁰ die Linie bp in die Lage b′p′ übergehen, welche mit der Horizontalen bp einen Winkel $bcp' = 2f$ einschliesst, weil $p'cz = pcz = 90^0 + f$ und $bcp' = p'cz - bcz = 90^0 + f - (90^0 - f)$ ist. Dieser Winkel 2f wird durch den Ausschlag der Luftblase gemessen, während die Seite, auf welcher die Blase steht, auch die Seite des stumpfen Neigungswinkels (p′cz) ist.

Wenn sich der eben besprochene Fehler an einer Bussole in dem Masse herausstellt, dass er berücksichtigt werden muss, so kann nur entweder durch Abschleifen der Wendescheibe des Stativs oder durch ringförmige Scheibchen, welche man um die Spindeln der Schräubchen s, s und zwischen die durch sie verbundenen Platten legt, geholfen werden.

Zur Classe derjenigen Untersuchungen einer Bussole, welche von Zeit zu Zeit wiederholt werden müssen, gehören folgende:

1) ob die Nadel im Gleichgewichte ist oder wagrecht schwebt;

2) ob dieselbe keine Excentricität besitzt;

3) ob ebendieselbe empfindlich genug ist; und

4) ob die Visirebenen dem durch den Nullpunkt der Theilung gehenden Durchmesser des Gradrings parallel und auf dessen Ebene senkrecht sind.

Zu 1. Man stelle auf die früher angegebene Weise mit einer Dosenlibelle, welche auf den Glasdeckel der Bussole gesetzt wird, diesen Deckel und damit auch die ihm parallele Ebene des Gradrings horizontal: zeigt sich hierbei, dass die Enden der Nadel in der Ebene des Rings liegen, so kann man diese selbst als wagrecht schwebend betrachten; erhebt sich aber ein Ende über den Ring, so muss die Hälfte der Nadel, welcher dieses Ende angehört, durch etwas Wachs, das man unten anklebt, mit der anderen Hälfte so in's Gleichgewicht gebracht werden, dass beide Hälften horizontal liegen.

Zu 2. Von dem Einflusse der Excentricität auf die Winkelmessung und deren Bestimmung war bereits im vorigen Paragraph die Rede, wesshalb wir hier mit der Bemerkung darauf verweisen, dass man eine Verbesserung der Excentricität in der Regel nicht vorzunehmen pflegt, weil ihr Einfluss auf die Neigungswinkel gegen den magnetischen Meridian nach Gleichung (91) durch doppelte Ablesungen leicht beseitigt werden kann.

Zu 3. Um die Empfindlichkeit der Magnetnadel zu prüfen, stelle man das Gehäuse wagrecht und lese bei ruhigem Stand derselben auf dem Gradringe ab. Hierauf bringe man, ohne an dem Instrumente das Geringste zu ändern, die Nadel durch Näherung eines Eisenstücks, das vorher entfernt

lag, in Bewegung, und sehe zu, ob sie nach der Entfernung des Eisens und der Vollendung ihrer Schwingungen genau auf die frühere Stelle wieder zurückkehrt. Thut sie dieses nach wiederholten Versuchen, so ist sie empfindlich genug; wo nicht, so ist entweder der Stift, worauf sie schwebt, abgestumpft und daher zuzuschleifen, oder es hat sich die magnetische Kraft der Nadel vermindert und ist dieselbe durch Streichen mit einem Magnet wieder zu vermehren.

Zu 4. Die Forderung der parallelen Richtung der Visirebenen und des Durchmessers, welcher durch den Nullpunkt der Theilung geht, würde nicht nöthig seyn, wenn die Bussole bloss dazu diente, den Winkel zweier gegebenen Richtungen aus deren Neigung gegen den magnetischen Meridian zu finden. Denn obwohl jeder dieser Neigungswinkel mit einem Fehler behaftet ist, welcher dem Winkel (f) des Durchmessers $0^0 - 180^0$ gegen die Visirebene gleichkommt, so gibt doch ihr Unterschied den gesuchten Winkel richtig, weil der Minuend und der Subtrahend in gleichem Sinne um gleichviel zu gross oder zu klein sind. Dagegen bleibt der Neigungswinkel einer Linie gegen den magnetischen Meridian um $\pm$ f fehlerhaft, so lange die verlangte Paralleleïtät nicht stattfindet.

Die Forderung, dass die Visirebenen auf der Instrumentenebene senkrecht stehen, also lothrecht sind, sobald diese wagrecht ist, wird dadurch gerechtfertigt, dass nur unter dieser Bedingung die in schiefen Ebenen liegenden Winkelschenkel richtig auf die Horizontalebene des Instruments und, wenn die vorausgehende Forderung erfüllt ist, in die Richtung des durch Null gelegten Durchmessers projicirt werden. Ob die Visirebenen gegen die Instrumentenebene senkrecht stehen, untersucht man bei horizontal gestellter Büchse auf die in §. 23 angegebene Weise; und wenn Berichtigungen nöthig werden, so kann man sie nach der ebendaselbst gegebenen Anweisung vornehmen. Was aber die Stellung der Visirebenen gegen den Durchmesser $0^0 - 180^0$ betrifft, so lässt sich dieselbe wie folgt kennen lernen.

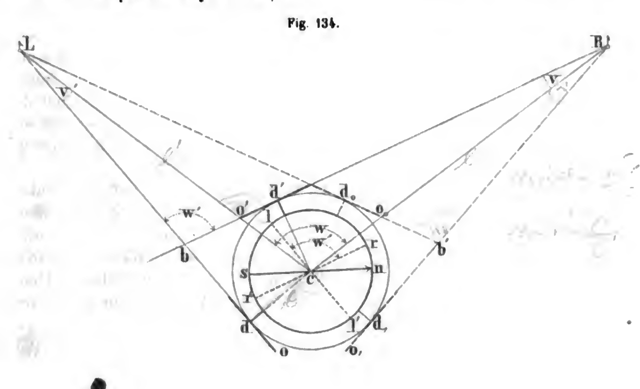
Man spanne über die Büchse einen Faden, der die Theilpunkte 90^0 und 270^0, also auch den mit OW bezeichneten Durchmesser genau deckt; stelle das Instrument horizontal und drehe die Büchse so lange im Kreise, bis der ausgespannte Faden in die von einem etwa 150 bis 200 Fuss entfernten Gegenstande und der Gehäusaxe bestimmte Richtung kommt; hierauf lese man den Stand der Nadel (am Nordende) ab und drehe die Büchse, bis die von S nach N laufende Visirebene den entfernten Gegenstand deckt; schliesslich lese man an demselben Ende der Nadel wie vorhin ab und bestimme aus den beiden Ablesungen den Drehwinkel. Ist dieser $= 90^0$, so ist die Visirebene dem Durchmesser $0^0 - 180^0$, welcher auf dem durch 90^0 und 270^0 gehenden senkrecht steht, parallel; ausserdem zeigt die Abweichung von 90^0 den gesuchten Fehler f an, welcher nach §. 23 durch Verschiebung der Ocularspalte zu verbessern ist. Dreht man in dem vorigen Sinne die Bussole weiter und stellt die zweite Visirebene NS auf den entfernten Gegenstand ein, so wird die Ablesung am Nordende der Nadel lehren, ob

die beiden Visirebenen mit einander parallel sind, oder wie die zweite gegen den Durchmesser 0⁰—180⁰ steht. Wenn nämlich der Unterschied der beiden letzten Ablesungen gerade 180⁰ beträgt, so sind die Visirebenen parallel und ihre Neigungen gegen die Richtung 0⁰—180⁰ gleich; ist aber dieser Unterschied grösser oder kleiner als 180⁰, so bilden dieselben einen diesem Unterschiede entsprechenden Winkel mit einander und es kann daraus leicht auf die Stellung der zweiten Visirebene gegen den Durchmesser 0⁰—180⁰ geschlossen werden. Eine für nöthig erachtete Verbesserung der Richtung dieser zweiten Ebene wird selbstverständlich wie bei der ersten vorgenommen.

Ein anderes Verfahren für die Prüfung Nr. 4 ist das folgende, bei welchem angenommen wird, dass für den Beobachtungsort die Mittagslinie und für die Beobachtungszeit die magnetische Abweichung gegeben sey. Man stelle das Instrument horizontal, drehe das Diopter in die Mittagslinie und lese die Abweichung der Nadel am Nordende ab. Stimmt die Ablesung mit der gegebenen magnetischen Abweichung, so ist die Linie 0⁰—180⁰ mit der Visirebene parallel, ausserdem aber nicht.

§. 125. **Excentricität der Visirlinie.** Es wurde bereits früher (§. 122) erwähnt, dass es Bussolen gibt, deren Diopter ausserhalb des Nadelgehäuses angebracht ist. Von einer solchen Bussole hat man eine richtige Vorstellung, wenn man sich an der in Fig. 129 abgebildeten die Diopterflügel f und f' weggenommen und dafür, der durch sie bestimmten Visirrichtung parallel, an der Büchse bei C ein anderes Diopter angebracht denkt. Wir wollen annehmen, dass dieses Diopter aus einem Messingrohre bestehe, welches an dem einen Ende eine kleine runde Ocularöffnung und an dem anderen Ende ein Fadenkreuz enthält. In der beigedruckten Fig. 134 stelle od die Visirlinie des Diopters, lrr'l' den Gradring, ns die Nadel und ll' den durch den Anfangspunkt der Theilung gehenden Durchmesser 0⁰—180⁰, womit die Visirlinie parallel seyn muss, vor.

Fig. 134.



Soll mit dieser Bussole ein Winkel $LcR = w$ gemessen werden, so stelle man das Instrument centrisch über den Scheitel c und mache den Gradring horizontal wie früher. Hierauf richte man das Diopter (od) auf das Signal L im linken Schenkel und lese am Nordende der Nadel den Bogen $ln = a'$ ab. Dann stelle man das Diopter in der Richtung $o'd'$ auf das zweite Signal R ein und lese bei n den Bogen $rn = a''$ ab. Der Unterschied $a' - a''$ der beiden Ablesungen misst offenbar den Winkel $lcr = dcd' = LbR = w'$, aber nicht unmittelbar den gesuchten Winkel w. Wollte man w' für w nehmen, so würde man einen Fehler in die Messung bringen, welcher dem Unterschiede $w' - w$ dieser zwei Winkel gleich wäre.

Es fragt sich nun, wie man mit Hilfe von w' den Winkel w finden kann. Nach der Figur ist der Aussenwinkel $Lo'R = w + v = w' + v'$, mithin auch

$$w = w' + v' - v. \quad \quad (92)$$

Die Winkel v und v' sind jedenfalls sehr klein, da sie von den Winkelschenkeln $cR = l$ und $cL = l'$ und der Entfernung $cd = cd' = e$, welche die Excentricität der Visirlinie oder des Diopters heisst, abhängen, jene aber gegen diese sehr gross sind. Man kann desshalb die Sinusse von v und v' ihren Bögen proportional und somit

$$v = 206265 \cdot \frac{e}{l} \text{ Sekunden},$$

$$v' = 206265 \cdot \frac{e}{l'} \text{ Sekunden}$$

setzen. Diese Werthe von v und v' in obige Gleichung gesetzt, wird

$$w = w' + 206265 \,.\, e \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right); \quad \quad (93)$$

$$w - w' = 206265 \,.\, e \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right). \quad \quad (94)$$

Die erste dieser zwei Gleichungen lehrt, wie man w aus w', der Excentricität e und den Längen der Winkelschenkel finden kann, während die zweite den Einfluss der Excentricität der Visirlinie auf die Messung eines Winkels zeigt. Aus beiden aber erkennt man, dass dieser Einfluss null wird, wenn die Winkelschenkel gleich lang sind, und dass er mit der Differenz dieser Längen so wie mit der Excentricität (e) selbst wächst. Für $e = 0',4$, $l' = 100'$ und $l = 200'$ wird $w - w' = 412{,}5$ Sek. $= 6{,}9$ Minuten.

Will man den Einfluss der Excentricität der Visirlinie auf die Winkelmessung, welcher oft sehr gross werden kann, beseitigen, so kann dieses durch eine zweite Messung des Winkels geschehen, nachdem man vorher das Diopter durchgeschlagen, d. h. in die entgegengesetzte Richtung gedreht hat, ohne an dem Stand des Gestelles das Geringste zu ändern. Unter dieser Voraussetzung liefert die zweite (nach der Anleitung zur ersten vorzunehmende) Messung den Winkel

$$w = w'' - v' + v, \quad \quad (95)$$

worin w'' die Differenz der beiden Ablesungen α' und α'', welche an dem Nordende der Nadel gemacht wurden, vorstellt. Addirt man diese Gleichung zu der mit (92) bezeichneten, so folgt aus beiden der gesuchte Winkel

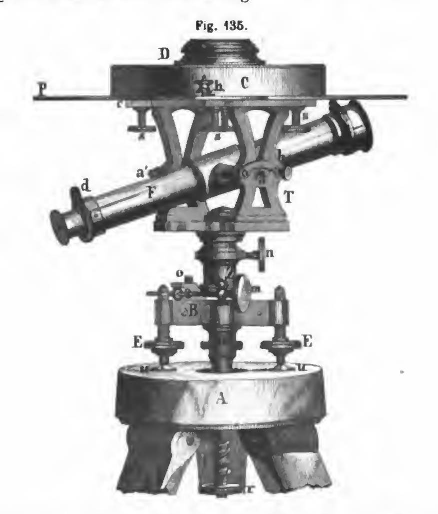
$$w = \frac{1}{2}(w' + w''), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

d. h. man findet mit einer Bussole, deren Visirlinie eine Excentricität besitzt, die wahre Grösse eines Winkels aus dem arithmetischen Mittel zweier Messungen, von denen die letztere mit durchgeschlagenem Diopter vorgenommen wurde.

Es versteht sich von selbst, dass der Einfluss der Excentricität der Visirlinie, wenn diese an einem Instrumente nicht absichtlich, sondern zufällig vorhanden ist, wie es z. B. an der in Fig. 129 abgebildeten Bussole der Fall seyn kann, ebenfalls nach der Gleichung (94) berechnet wird. Es ist aber auch klar, dass in einem solchen Falle, wo e ausserordentlich klein ist, die Grösse dieses Einflusses auf einen gemessenen Winkel so wenig beträgt, dass sie weit innerhalb der Grenzen der Genauigkeit einer Bussole liegt und daher wohl immer vernachlässigt werden kann.

§. 126. **Bussole von Breithaupt.** Nach der vorausgehenden Auseinandersetzung des Wesens der Feldbussole bedarf die in Fig. 135 versinnlichte Einrichtung nur einer kurzen Erläuterung.

Fig. 135.



Der Compass (C) ist wie bei der Ertel'schen Bussole beschaffen. Mit den 4 Schräubchen s, s wird die Gehäusplatte P an die Scheibe c der

beiden Träger T, T so befestigt, dass sie gegen die Axe des Centralzapfens Z senkrecht steht. Die Dosenlibelle D, welche auf dem Glasdeckel ruht, dient zur Horizontalstellung des Gehäuses.

Ein Fernrohr (F) von kurzer Brennweite und ganz einfacher Construction vertritt hier die Stelle des Diopters. Seine Drehaxe (a a′) ruht in den Trägern T, T, welche gestatten, es auszuheben und umzusetzen oder durchzuschlagen. Die Visirlinie bewegt sich bei der Drehung des Rohrs um die horizontale Axe aa′ in einer Vertikalebene, welche durch die Axe des Centralzapfens und den Durchmesser 0⁰—180⁰ des Gradrings bestimmt ist. Durch die Schliessen b, b wird die Drehaxe in ihrer Stellung festgehalten.

Das Gestelle (A), wie das Ertel'sche aus drei Beinen und einer Kopfplatte bestehend, trägt einen Dreifuss (B), welcher durch den Ansatz G und die Schraube r mit der Kopfplatte A verbunden ist. Da der Dreifuss wegen der Horizontalstellung des Gehäuses, die durch drei Fussschrauben (E, E) bewirkt wird, eine mässige Vertikalbewegung haben muss, so liegt die Schraube r nicht dicht an der Platte A, sondern an einer zwischen beide gestellten Spiralfeder f, welche sich um G windet. Auf diese Weise wird der Dreifuss am Gestelle festgehalten, ohne dass bei seiner Bewegung eine für ihn nachtheilige Spannung entsteht. Die Horizontaldrehung geschieht um den Centralzapfen Z. Diese Drehung fordert die Lüftung der Schraube n, welche gegen den Zapfen drückt. Nachdem man durch die grobe Drehung das Fernrohr gegen den anzuvisirenden Punkt gerichtet hat, kann man es mit Hilfe der Mikrometerschraube m genau einstellen und alsdann die Drehung durch Anziehen der Schraube n hemmen.

Was den Gebrauch, die Prüfung und Berichtigung dieser Bussole betrifft, so gilt hier Alles, was darüber in den §§. 122 und 123 gesagt wurde, wenn man sich darin nur „Fernrohr" statt „Diopter" gesetzt denkt und berücksichtigt, dass die Visirlinie des ersteren durch den Schnittpunkt des Fadenkreuzes und den optischen Mittelpunkt der Objectivlinse bestimmt wird.

Die Orientirbussole.

§. 127. Von den meisten geometrischen Aufnahmen wird verlangt, dass sie die Lage der aufgenommenen Punkte nicht bloss unter sich, sondern auch gegen bestimmte Richtungen, z. B. die Himmelsgegenden, darstellen. Man findet desshalb auf den Plänen fast immer die Mittagslinie und die Senkrechte darauf angegeben. Andererseits ist es für die Aufstellung des Messtisches auf dem Felde oft sehr erwünscht, die Richtung des magnetischen Meridians zu kennen. Zur Angabe dieser Richtung und der Mittagslinie für eine Messtischaufnahme, welche keinen Theil einer grösseren Vermessung ausmacht und folglich nicht auf ein Dreiecknetz gegründet ist,[1]

[1] Wenn einer Messtischaufnahme ein Dreiecknetz zu Grunde liegt, so ist die Lage aller aufgenommenen Punkte gegen die Mittagslinie aus diesem Netze bekannt, wie später gezeigt wird.

bedient man sich der Orientirbussole, welche aus einem parallelepipedischen Kästchen (von etwa 6 Zoll Länge, 3 Zoll Breite, 1 Zoll Höhe), worin sich eine Magnetnadel und zwei eingetheilte Kreisbögen befinden, besteht. Die Nadel ist wie bei der Feldbussole eingerichtet und wird wie dort mit dem sie tragenden Stifte in und ausser Verbindung gesetzt und auf ihre Empfindlichkeit geprüft. Die beiden Kreisbögen sind Theile eines Gradrings, der im Nadelstifte seinen Mittelpunkt hat, und liegen an den schmalen Seiten des Kästchens. Der Durchmesser dieser Bögen, welcher mit den Langseiten der Bodenplatte des Kästchens parallel läuft, wird durch eine schwarze Linie auf der Bodenfläche sichtbar gemacht und gewöhnlich mit SN bezeichnet. Dreht man das Kästchen so, dass die Nadel die Linie SN deckt, so stehen die Langseiten der Bodenplatte, welche als Lineale dienen, in der Richtung des magnetischen Meridians. Die Nullpunkte der beiden Kreisbögen liegen in dem Durchmesser SN; von ihnen aus werden nach beiden Seiten hin etwa 10 bis 15 Grade auf die Bögen gezeichnet.

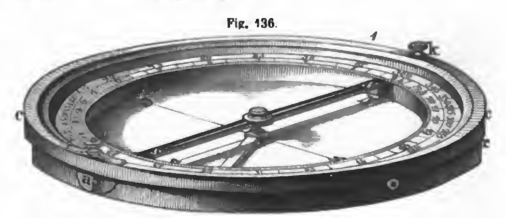
Soll mit Hilfe des eben beschriebenen Werkzeugs eine Messtischaufnahme nach den Himmelsgegenden orientirt werden, so verfahre man folgendermassen. Zunächst stelle man den Messtisch über einem beliebigen Punkt P des Feldes so auf, dass der Punkt p der Aufnahme, welcher das Bild von P ist, lothrecht über P liegt, und dass nach der Horizontalstellung des Blattes eine Seite pq des Plans mit der auf dem Felde gegebenen Seite PQ, wovon jene wiederum das Bild ist, in eine Vertikalebene fällt. Durch diese nach §. 113 zu vollziehende Arbeit wird die gezeichnete Figur mit der natürlichen, welche sie verjüngt darstellt, parallel gemacht: die Bildseiten haben folglich gegen die Himmelsgegenden dieselbe Lage wie die entsprechenden Seiten des natürlichen Grundrisses. Dreht man hierauf die auf den Plan gestellte Orientirbussole so lange seitwärts, bis die Nadel einspielt, d. h. die Linie SN deckt, und zieht an einer Langseite der Bodenplatte eine feine Linie, so bezeichnet diese den magnetischen Meridian. Ist nun für den gegebenen Ort und zur Zeit der Beobachtung die Abweichung der Nadel bekannt, so trägt man die Grösse derselben an die eben gezogene Linie, womit die gestellte Aufgabe in so ferne gelöst ist, als der neue Winkelschenkel, den man dadurch erhält, die Mittagslinie bezeichnet.

Schliesslich ist nur noch zu bemerken, dass man denselben Zweck, welcher eben durch die Orientirbussole erreicht wurde, auch durch die Feldbussole erfüllen kann: entweder indem man das Gehäuse von dem Gestelle abschraubt und die mit der Linie SN oder dem Durchmesser $0^0 - 180^0$ des Gradrings parallel laufenden Seiten der Bodenplatte gerade so wie die Langseiten des Kästchens der Orientirbussole benützt; oder aber indem man die Neigung einer Seite der aufgenommenen Figur gegen den magnetischen Meridian auf bekannte Weise misst, mit Hilfe der für Ort und Zeit gegebenen Abweichung der Magnetnadel auf die Mittagslinie bezieht, und diesen Neigungswinkel an jene Seite richtig anträgt.

Der Hängecompass.

§. 128. Was für den Feldmesser die in §. 122 beschriebene Bussole, ist für den Markscheider der Hängecompass, nämlich ein Mittel, wagrechte Winkel zweier beliebiger Richtungen und dergleichen Neigungswinkel einzelner Linien gegen die Magnet- oder die Mittagslinie zu messen. Während aber jener seine Bussole auf einem versetzbaren Gestelle befestigen kann, muss dieser seinen Compass an eine ausgespannte Schnur hängen, welche den Winkelschenkel, dessen Lage bestimmt werden soll, vorstellt. Diese Forderung bringt die Beschaffenheit der Bergwerke mit sich, welche nicht an allen Punkten das Aufstellen von Stativen gestattet. Da, wie eben bemerkt, bei Messungen mit dem Hängecompass die Winkelschenkel durch ausgespannte Schnüre angegeben werden, so bedarf dieses Werkzeug selbstverständlich keines Diopters, wesshalb es nur aus zwei Theilen besteht: dem Compass und dem Hängezeug.

Fig. 136.



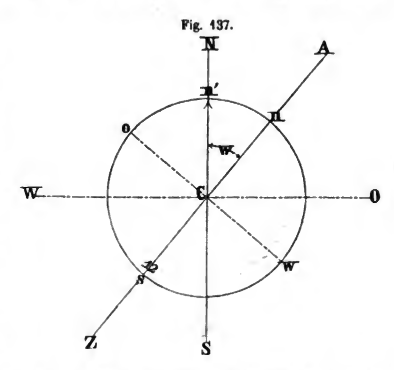
Der Compass ist, wie Fig. 136 zeigt, von dem der Feldbussole nicht wesentlich verschieden; nur die Eintheilung des Rings ist theilweise eine andere. Die meisten Bergleute sind nämlich von alter Zeit her gewohnt, die Winkel, welche gegebene Richtungen mit der Magnetlinie einschliessen, nicht nach Graden, sondern nach „Stunden" anzugeben, von denen eine der 24ste Theil eines Kreises oder ein Winkel von 15 Graden ist. Eine Stunde wird je nach Herkommen oder Verordnung entweder in Viertel, Achtel, Sechszehntel u. s. w. oder in 15 ganze und 30 halbe Grade eingetheilt. Die letztere Eintheilung ist jetzt die vorherrschende und verdient um so mehr den Vorzug, als sie mit der gewöhnlichen Kreiseintheilung zusammentrifft. Wir werden vorzugsweise nur diese berücksichtigen.

Vergleicht man die in der voranstehenden Figur abgebildete Eintheilung des Grubencompasses mit jener der Feldbussole, so ergeben sich ausser dem eben besprochenen Unterschiede noch zwei andere, von denen der eine in der Verwechselung der Bezeichnungen Ost und West, und der zweite in der entgegengesetzten, von rechts nach links laufenden Bezifferung liegt. Diese Verschiedenheiten erklären sich aber durch den Gebrauch des Grubencompasses.

Gesetzt nämlich, es sey der Horizontalwinkel, welchen in Fig. 137 die

Linie AC mit der Magnetlinie SN einschliesst, d. i. der Streichwinkel ACN = w zu bestimmen: so wird der Durchmesser SN des Theilringes, welcher mit Stunde 0 (0^h) und Stunde 12 (12^h) bezeichnet ist, in die gegebene Richtung CA gestellt und am Nordende (n') der Nadel, welche in die Magnetlinie SN fällt, abgelesen. Wäre nun der Kreis wie das Zifferblatt einer Uhr von links nach rechts beziffert, so würde die Ablesung für den Winkel ACN den Bogen n w s n' liefern, und man müsste diese Ablesung von 24 abziehen, um den gesuchten Bogen n n' in Stunden zu erhalten. Zählt man aber von n aus nach links, so erhält man durch die Ablesung bei n' sofort den gesuchten Bogen n n', welcher das Mass des Winkels ACN ist. Dieser Winkel liegt in dem vorliegenden Falle offenbar auf der Ostseite der Nadel; würden aber auf der Bodenplatte des Compasses West und Ost nicht mit einander verwechselt seyn, so ergäbe die Ablesung den Winkel ACN westlich und man hätte in der Aufzeichnung östlich dafür zu setzen. Um nun den Irrthümern, die sich hieraus ergeben können, ein für allemal vorzubeugen, bezeichnet man die Himmelsgegenden so, wie oben und in der Fig. 137 angegeben.

Fig. 137.

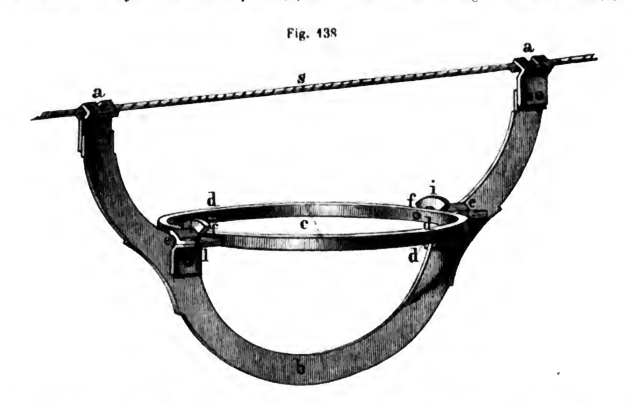


Wenn, wie in Fig. 136 angenommen, die Kreistheilung von 0^h bis 24^h geht und ein für allemal festgesetzt wird, dass die Zählung von rechts nach links läuft, so kann man die Bezeichnung der Lage der Winkel gegen die Magnetlinie ganz weglassen, da dieselbe schon durch die Grösse der Ablesung bestimmt ist, in so ferne die Stunden von 0 bis 12 östlichen und die übrigen westlichen Lagen angehören. Wo aber der Kreis in zweimal 12 Stunden eingetheilt wird, welche von demselben Nullpunkte ausgehen und in entgegengesetzten Richtungen fortschreiten, ist die Bestimmung der östlichen oder westlichen Lage des Winkels unumgänglich nöthig.

Das Hängezeug, welches in Fig. 138 des Raumes wegen in kleinerem Massstabe dargestellt ist als der zugehörige Compass (Fig. 136), besteht aus zwei rechtwinkelig verbundenen Stücken, dem Hängebogen (b) und dem Hängekranz (c). Beide sind aus hart geschlagenem Messing gearbeitet. Der Hängebogen ist etwa ein Drittel Linie dick und einen halben Zoll breit; seine Oeffnung richtet sich nach der Grösse des Hängekranzes, und diese nach dem Durchmesser des Compasses; die Hacken a, a dienen zum

Aufhängen des Instruments an einer festgespannten Schnur. Der Hängekranz wird ungefähr doppelt so dick und halb so breit gemacht als der Hängebogen; er ist winkelrecht abgedreht und hat an den Enden eines Durchmessers zwei cylindrische Zapfen (e, e) mit scheibenförmigen Ansätzen (i, i),

Fig. 138



um welche er sich in den am Hängebogen festgeschraubten Lagern (l, l) drehen kann. In einem zweiten auf dem ersten senkrecht stehenden Durchmesser liegen zwei Körner (d, d), welche den in der Richtung OW oder 6^h — 18^h mit entsprechenden Vertiefungen (o, o) versehenen Compass so aufnehmen, dass eine Drehung desselben um die Axe d, d oder die Ostwestlinie möglich ist. Durch diese Bewegung und jene um die Axe e, e oder die Südnordlinie des Hängerings kann der Compass (Fig. 136) leicht horizontal gestellt werden. Der Drehung des Hängekranzes sind übrigens durch die Ansätze i, i der Zapfen ziemlich enge Grenzen gesteckt; denn wenn die Anschläge f, f der Scheiben i, i auf die Lager l, l zu liegen kommen, so hört die Bewegung auf. An älteren Hängeinstrumenten ist der Kranz gar nicht beweglich, sondern sofort rechtwinkelig mit dem Hängebogen zusammengeschraubt, was unseres Erachtens gerade so gut ist als die neuere Einrichtung.

§. 129. **Gebrauch des Hängecompasses.** Soll mit dem eben beschriebenen Hängecompass der Horizontalwinkel (rcl) zweier Richtungen in einem Bergwerke bestimmt werden, so spanne man zunächst die Schnur nach dem rechten Schenkel aus und hänge an dieselbe das Instrument so, dass der Nordpunkt N des Compasses vom Scheitel des Winkels abgewendet ist. Hierauf sehe man zu, ob der Stundenring wagrecht liegt, was man, wie bei der Feldbussole, durch die Nadel erkennen kann; sanfte Drehungen um die Axen d, d oder e, e werden allenfallsige Abweichungen beseitigen. Ist

die Nadel zur Ruhe gekommen, so lese man an ihrem Nordende (n) ab und bemerke das Ergebniss dieser Ablesung (a'). Dasselbe Verfahren wiederhole man am linken Schenkel. Die hierbei erhaltene Ablesung a" bestimmt den Streichwinkel des linken, so wie a' den Streichwinkel des rechten Schenkels: der Unterschied a' — a" ist der gesuchte Winkel in dem Falle, dass das Streichen beider Schenkel zugleich östlich oder zugleich westlich ist; liegt aber der rechte Schenkel östlich und der linke westlich, so muss man zu der negativen Differenz a' — a" noch 360^0 oder 24^h addiren, um den verlangten Winkel zu finden. Das Bestimmen dieses Winkels aus den Ablesungen ist also dasselbe, welches wir bei der Feldbussole schon kennen gelernt haben; nur bezeichnet hier a' die Ablesung für den rechten und dort für den linken Schenkel. Dieses Voranstellen des rechten Schenkels ist aber bei Messungen mit dem Hängecompass desshalb nöthig, weil seine Bezifferung den entgegengesetzten Lauf von jener der Feldbussole hat.

§. 130. **Prüfung und Berichtigung.** Nachdem man den Compass für sich wie früher untersucht hat, ob der Stundenring richtig getheilt, das Gehäuse eisenfrei, die Nadel empfindlich und nicht excentrisch ist: prüft man ihn in seiner Verbindung mit dem Hängezeug weiter noch auf folgende Eigenschaften:

1) ob die Magnetnadel horizontal schwebt;

2) ob der Stundenring des Compasses immer eine wagrechte Lage annimmt; und

3) ob die Südnord- oder zwölfte Stundenlinie des Compasses in der lothrechten Ebene der Schnur liegt.

Zu 1. Ob die Magnetnadel ruhend eine wagrechte Lage annimmt, erfährt man dadurch, dass man das Instrument an eine von Ost nach West gespannte Schnur hängt und beobachtet, wie die Nadelenden gegen die Ebene des Stundenrings liegen. Zeigt sich, dass die Nadelspitzen in dieser Ebene liegen, so kann man noch nicht mit Sicherheit annehmen, dass die Nadel selbst wagrecht liegt, weil es möglich wäre, dass der Stundenring in der Richtung der Nadel dieselbe Neigung gegen den Horizont hätte wie diese. Man muss desshalb, um hierüber klar zu werden, das Instrument umhängen (d. h. die Plätze der Hacken vertauschen) und die Nadel abermals beobachten. Liegt sie diesesmal wieder in der Ebene des Stundenrings, so hat sie offenbar eine wagrechte Lage und ist Nichts an ihr zu verbessern; bildet aber ihr Rücken mit der Ringebene einen Winkel, so zeigt dieser den doppelten Fehler in der Lage der Nadel an: die eine Hälfte dieses Winkels wird alsdann an der Nadel, die andere an dem Hängekranz verbessert. Der Beweis dieser Behauptung ist so einfach, dass wir ihn übergehen zu dürfen glauben. Die Berichtigung der Nadel geschieht durch Beschwerung der Hälfte, welche sich erhebt, oder durch Leichtermachen derjenigen Hälfte, welche sich senkt; und was den Hängekranz betrifft, so muss man seine Stellung gegen den Bogen ebenfalls dadurch verbessern, dass man dessen eine Hälfte leichter oder schwerer macht. Zeigt sich gleich bei

dem ersten Aufhängen, dass die Ebenen der Nadel und des Stundenrings nicht zusammenfallen, so liegt der Fehler entweder in der Nadel, oder in dem Ring, oder in beiden zugleich. Man verbessere daher zunächst die Nadel durch Ankleben von etwas Wachs so, dass sie in die Ebene des Rings einspielt, hänge hierauf das Instrument um und verfahre weiter wie vorhin.

Zu 2. Daraus, dass der Compass nach dem oben beschriebenen Verfahren in der Richtung seiner Drehaxe d, d horizontal gestellt worden, folgt noch nicht, dass sein Stundenring in einer wagrechten Ebene liegt. Man muss desshalb, nachdem die Nadel untersucht worden, die Schnur in die Magnetlinie spannen und zusehen, ob nach eingetretener Ruhe die Nadelenden in der Ebene des Rings liegen. Fallen sie in diese Ebene, so ist dieselbe wagrecht; ausserdem aber ist entweder die Masse des Compassgehäuses zu beiden Seiten der Drehaxe d, d nicht gleich vertheilt, oder diese Axe geht nicht genau durch den Mittelpunkt des Kreises, oder aber die Reibung der Axe ist zu gross. In dem ersten Falle müsste das Gehäuse auf der schwereren Seite etwas abgeschliffen werden, in dem zweiten hätte man eines von den Löchern o, o der Büchse zu versetzen, und in dem dritten wäre die Reibung an den Körnern d, d zu vermindern. Welcher dieser drei Fälle stattfindet, oder, wenn sie gleichzeitig auftreten, welcher von ihnen vorwiegt, findet man durch einfache Versuche bald heraus. Wir bemerken hiezu bloss, dass es für die Untersuchung der Axenlage genügt, mit einem Zirkel nachzumessen, ob der Hängekranz genau in vier gleiche Theile getheilt ist und zuzusehen, ob die Axen durch diese Theilpunkte gehen. Ist dieses der Fall und stellt sich der Stundenring immer in gleicher Weise gegen die Nadel, wenn man den Compass um seine Axe d, d ein wenig dreht, so kann der Fehler nur in der ungleichen Vertheilung der Büchsenmasse liegen. Steht aber der Stundenring, nach einer kurzen Bewegung des Compasses, bald höher bald tiefer als ein und dasselbe Ende der Nadel, so ist die Reibung an der Axe d, d zu gross.

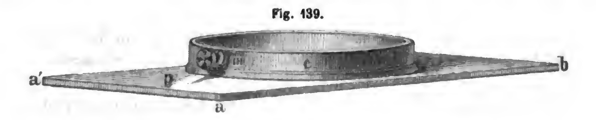
Zu 3. Die Untersuchung, ob die zwölfte Stundenlinie (oder der Durchmesser $0^h - 12^h = 0^0 - 180^0$) in der durch die Schnur gelegt gedachten lothrechten Ebene liegt, setzt, wenn sie mit Zuverlässigkeit gemacht werden soll, die Kenntniss der Mittagslinie und der magnetischen Abweichung an dem Orte der Untersuchung voraus. Sind diese bekannt, so spanne man eine Schnur in die Mittagslinie und lese nach eingetretener Ruhe den Stand der Nadel am Nordende ab. Findet man hierdurch dieselbe Abweichung, welche nach den magnetischen Beobachtungen für die Zeit und den Ort der Messung gilt, so ist der Stundenring richtig eingesetzt; ausserdem aber muss er so lange versetzt werden, bis die beobachtete magnetische Abweichung mit der gegebenen übereinstimmt.

Das Zulegezeug.

§. 131. Unter dieser Bezeichnung verstehen die Markscheider eine Vorrichtung zum Eintragen von Neigungswinkeln gegen die Magnetlinie in

Pläne, oder zur Abnahme solcher Winkel aus Zeichnungen. Dieses Werkzeug, welches auch Auftraginstrument heisst, besteht nach Fig. 139 aus einer rechteckigen Messingplatte (p) von 6 bis 8″ Länge, 4 bis 5″ Breite, 1 bis $1\frac{1}{2}$‴ Dicke, und aus einem in deren Mitte befindlichen und senkrecht darauf stehenden Kranze (c), welcher weit und hoch genug ist, den Compass des Hängezeugs (Fig. 136) in sich aufzunehmen. Dieser Compass wird so eingesetzt, dass die zwölfte Stundenlinie (0^h — 12^h) oder der

Fig. 139.



Durchmesser 0^0 — 180^0 mit den Langseiten (ab, a′b′) der rechteckigen Zulegeplatte, welche wie ein Lineal zu gebrauchen ist, parallel läuft. Um dieses mit der nöthigen Genauigkeit zu bewirken, dreht man den Compass in dem Zulegekranze so lange, bis zwei bestimmte an beiden Theilen befindliche Marken genau auf einander treffen, und macht ihn dann entweder mit einer Bremsschraube (n) oder durch irgend ein anderes Mittel fest.

Will man mit Hilfe des Zulegezeugs einen aufgenommenen Winkel (lcr) seiner Grösse und Lage nach bildlich darstellen, so braucht man nur auf dem horizontal gestellten Zeichnungsbrette die Kante der Zulegeplatte an den gegebenen Winkelscheitel (c) anzulegen und das Werkzeug um diesen Punkt so lange zu drehen, bis die Nadel dieselbe Stellung wie bei der Aufnahme des ersten Schenkels hat, also die gleiche Ablesung gibt. Zieht man alsdann längs der Kante eine feine Linie, so ist diese der eine Schenkel; den zweiten findet man in ähnlicher Weise, und aus beiden ergibt sich der ganze Winkel seiner Grösse nach. Will man die Neigung seiner Schenkel gegen die Magnetlinie darstellen, so drehe man die an c liegende Platte so lange, bis die Nadel in der zwölften Stundenlinie einspielt und ziehe an der Kante abermals eine Linie: diese ist nun der Magnetlinie parallel und bestimmt deren Lage gegen die Winkelschenkel.

Soll der Streichwinkel einer auf einem Plane gegebenen Richtung gefunden werden, so lege man diesen Plan horizontal und orientire ihn nach dem magnetischen Meridian, indem man die Zulegeplatte an die mit SN bezeichnete Magnetlinie des Plans anlegt und diesen so lange dreht, bis die Nadel mit der zwölften Stundenlinie zusammenfällt. Hierauf bringe man die Kante der Zulegeplatte an die gegebene Richtung und lese an dem Nordende der Nadel den gesuchten Winkel seiner Grösse und Lage nach ab.

Das Zulegezeug muss folgende Eigenschaften besitzen:

1) sollen die Längenkanten der Zulegeplatte gerade und parallele Linien seyn, und

2) müssen diese Kanten der zwölften Stundenlinie des Compasses parallel laufen.

Ob die erste dieser Eigenschaften vorhanden ist, erfährt man auf folgende Weise: Man befestige auf einem wagrecht stehenden ebenen Brette zwei feine Nadeln senkrecht und in etwas kleinerer Entfernung als die Zulegeplatte lang ist. Hieran lege man die eine Kante der Platte und drehe das Brett so weit, bis das Nordende der Nadel auf einen Theilstrich des Stundenrings genau einspielt. Alsdann bringe man die zweite Kante an die beiden Nadeln und lese nach eingetretener Ruhe der Nadel wieder an deren Nordende ab. Ist diese Ablesung von der ersten genau um 180^0 oder 12^h verschieden, so sind die Kanten der Zulegeplatte parallel, ausserdem aber nicht, und es zeigt die Abweichung des Unterschiedes beider Ablesungen von 180^0 oder 12^h den Neigungswinkel der zwei Langkanten der Platte an.

Wenn man zur Prüfung des Zulegezeugs auf die zweite der oben angeführten Eigenschaften nicht das in Nr. 3 des vorigen Paragraphen beschriebene Verfahren, welches die Kenntniss der Mittagslinie und der eben stattfindenden magnetischen Abweichung voraussetzt, anwenden will, wobei man die Kante der Zulegeplatte in die Mittagslinie zu stellen hätte: so stelle man auf dem Felde einen Messtisch horizontal auf; richte mit der geprüften und richtig gestellten Kippregel eine ausgespannte Schnur genau in ihre Visirebene, oder umgekehrt diese in jene; messe das Streichen der Schnur mit dem Hängecompass; lege hierauf den Compass in das Zulegezeug und schiebe dieses vorsichtig an die Kante des unverrückt stehen gebliebenen Lineals der Kippregel. Zeigt hiebei die Nadel denselben Streichwinkel für die Linealkante an, so ist dieses offenbar ein Beweis dafür, dass diese und folglich auch die anliegende Kante der Zulegeplatte mit der zwölften Stundenlinie, von welcher die Zählung der Winkel ausgeht, parallel ist; weichen aber die Ablesungen am Hängecompass und in dem Zulegezeug von einander ab, so gibt der Unterschied dieser Ablesungen den Neigungswinkel des Durchmessers 0^h — 12^h oder 0^0 — 180^0 gegen die Kante der Zulegeplatte an, vorausgesetzt, dass das Hängezeug wie die Kippregel berichtigt war.

Wenn man durch die eben beschriebenen Untersuchungen findet, dass die Kanten der Zulegeplatte entweder unter sich oder mit der zwölften Stundenlinie nicht parallel sind, so kann der Mechaniker solche Fehler leicht verbessern; wollte oder könnte man aber diese Verbesserungen nicht vornehmen lassen, so liesse sich auch mit dem fehlerhaften Zulegezeug unter folgenden Bedingungen richtig arbeiten. Erstens würde man hiebei immer nur eine und dieselbe Kante der Zulegeplatte benützen; zweitens brächte man beim Auftragen oder Abnehmen von Streichwinkeln den Neigungswinkel dieser Kante gegen die zwölfte Stundenlinie in der rechten Weise in Anrechnung; und drittens nähme man beim Auf- oder Abtragen von Winkeln, welche keine Streichwinkel sind, gar keine Rücksicht auf den vorhandenen Fehler, da dessen Einfluss auf jene Winkel nach §. 123 durch das bei dem Auf- oder Abtragen zu beobachtende Verfahren vernichtet wird.

2. Die Theodolithen.

§. 132. Mit dem Worte Theodolith, dessen Ableitung nicht mit Bestimmtheit anzugeben ist, [1] bezeichnet man jedes Winkelmessinstrument mit zwei eingetheilten Kreisen, welche senkrecht gegen einander und bei der Messung beziehlich horizontal und vertikal stehen. Die Formen der Theodolithen sind sehr verschieden; ihrem Wesen nach zerfallen sie aber nur in zwei Gattungen: in einfache Theodolithen oder Theodolithen schlechtweg, und in Repetitionstheodolithen oder Wiederholungskreise. Wir wollen zunächst von diesen zwei Gattungen der Theodolithen eine allgemeine Anschauung geben und die Bedingungen erläutern, welche an jeder zu erfüllen sind, und hierauf die Einrichtung und den Gebrauch mehrerer Theodolithen im Einzelnen kennen lernen. Die Zeichnungen, welche wir den allgemeinen Erörterungen beifügen, deuten nur die wesentlichen Theile der in Rede stehenden Instrumente in ihrer gegenseitigen Stellung an und sollen bloss dazu dienen, den durch den Text zu erweckenden Vorstellungen mehr Bestimmtheit zu verleihen. Sie sind gewissermassen die Skelette der später zu beschreibenden Individuen.

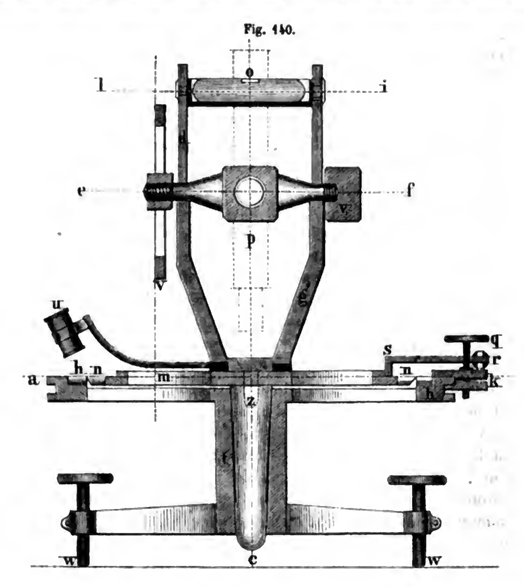
§. 133. **Der einfache Theodolith** hat im Allgemeinen folgende Einrichtung. Ein Kreis von Messing (h), der auf seiner Oberfläche mit einem Silberstreifen belegt und nach dem Gradmasse eingetheilt ist, steht durch Speichen mit einem massiven Untergestelle (t) in fester Verbindung. Dieses Gestelle ist gewöhnlich ein Dreifuss, welcher auf Stellschrauben (w) ruht, durch deren Drehung seine Lage und folglich auch die des Kreises verändert wird. Mit diesen Schrauben kann der Kreis horizontal gestellt werden, und von dieser Lage hat er den Namen Horizontalkreis. Mit diesem Kreis liegt ein zweiter (m) in einer Ebene (ak). Dieser ist um eine durch den Mittelpunkt des Horizontalkreises gehende und auf ihm senkrecht stehende Axe (cz) drehbar; sein Rand schliesst sich genau an den feststehenden Horizontalkreis an. Durch Speichen steht er mit seiner massiven Axe (z) in fester Verbindung, und an den Enden eines Durchmessers trägt er zwei Nonien von Silber (n). Da er zur Zählung der Grade dient, um welche alle mit ihm fest verbundenen Stücke von einem Winkelschenkel zum anderen gedreht worden sind, so heisst er der Alhidadenkreis. [1] Senkrecht darauf steht ein fester Träger (g) für das Fernrohr (p). Dieser Träger geht entweder von der Mitte des Alhidadenkreises aus und spaltet sich oben in zwei Arme zur Aufnahme der Drehaxe (cf) des Fernrohrs, oder er besteht sofort von unten an aus zwei Theilen, zwischen denen sich das Fernrohr bewegen kann. Jedenfalls sollen seine Arme so hoch seyn, dass man das Fernrohr durchschlagen kann. Das Fernrohr hat den Zweck,

[1] Einige glauben, dass das Wort Theodolith zusammengesetzt sey: aus θέα das Anschauen, ὁδός der Weg und λίθος der Stein. Um diese Ableitung zu begreifen, muss man wissen, dass in früherer Zeit die Unterlagen, auf welche man die Theodolithen stellte, immer aus Stein bestanden.

[2] Das Wort Alhidade ist nämlich nach Montucla gleichbedeutend mit Zähler.

die Winkelschenkel auf den Horizontalkreiss so zu projiciren, dass die Projectionen durch den Mittelpunkt dieses Kreises gehen. Es muss folglich die Visirlinie des Fernrohrs von der Alhidadenaxe geschnitten werden und auf der Drehaxe des Fernrohrs senkrecht stehen, diese Axe selbst aber mit dem Horizontalkreis parallel seyn. Denn stünde die Visirlinie nicht senkrecht zur Drehaxe, so würde sie beim Auf- und Niederkippen des Fernrohrs keine Ebene, sondern eine Kegelfläche beschreiben; wäre die Drehaxe dem Horizontalkreis nicht parallel, so bildete die von der Visirlinie beschriebene Ebene keinen rechten Winkel mit der Ebene dieses Kreises; und

Fig. 140.

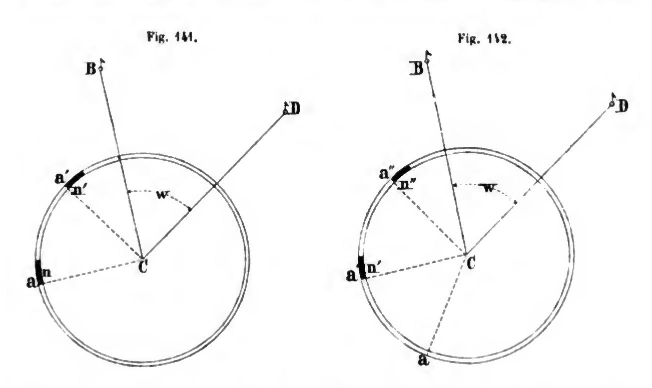


schnitten sich die Visirlinie und die Alhidadenaxe nicht, so gingen die Projectionen der Winkelschenkel nicht durch den Mittelpunkt des Horizontalkreises, welcher lothrecht über dem Scheitel des zu messenden Winkels aufgestellt ist. Mit dem Fernrohr ist eine Röhrenlibelle (o) zur Horizontalstellung des Kreises verbunden. Diese Libelle ruht entweder auf dem Fernrohr selbst, oder steht oder hängt an dessen Drehaxe: im ersten Falle ist sie der Visirlinie, im zweiten der Drehaxe parallel. Die Wirkung einer solchen Libelle auf den Horizontalkreis ist leicht zu begreifen. Steht sie

z. B. auf der Drehaxe und wird sie durch die Stellschrauben des Dreifusses zum Einspielen gebracht, so ist der Kreis nach der Richtung ihrer Axe horizontal, weil er der Drehaxe parallel ist; dreht man diese Axe und mit ihr die Libelle um einen rechten Winkel und bringt letztere wieder zum Einspielen, so ist der Kreis auch nach dieser zweiten Richtung und folglich im Ganzen horizontal, vorausgesetzt, dass an der wagrechten Lage der ersten Richtung Nichts geändert wurde, wovon man sich durch Zurückführen des Fernrohrs und der Libelle in die erste Stellung überzeugt. Ein mit der Drehaxe des Fernrohrs senkrecht verbundener getheilter Kreis, der Vertikalkreis (v), steht lothrecht, sobald die Drehaxe wagrecht ist. Dieser Kreis macht alle Bewegungen des Fernrohrs mit; zur Messung derselben dienen zwei feststehende Nonien, welche in der Regel an den Enden eines mit dem Horizontalkreis parallelen Durchmessers liegen. Sollte nur ein Nonius angebracht seyn, so befindet er sich gewöhnlich an dem unteren Ende eines lothrechten Durchmessers des Vertikalkreises. Es versteht sich von selbst, dass man diesen Kreis eben so gut wie den Horizontalkreis unbeweglich machen und in ihm einen Alhidadenkreis anbringen könnte: bei einfachen Theodolithen zieht man jedoch die eben beschriebene Einrichtung vor. Da mit dem Vertikalkreis eines solchen Instruments gewöhnlich nur Höhen- und Tiefenwinkel gemessen werden, so beziffert man die Eintheilung desselben in der Regel so, dass von den beiden Nullpunkten aus, welche der horizontalen Lage des Fernrohrs entsprechen, nach zwei entgegengesetzten Richtungen bis zu 90° fortgezählt wird. Diese Zahlen liegen folglich an den Enden eines Durchmessers, welcher auf dem ersten, der durch 0° geht, senkrecht steht, und entsprechen den grösstmöglichen Höhen- und Tiefenwinkeln. Als wichtige Nebenbestandtheile des Theodolithen sind noch zu erwähnen: erstens die Klemm- und Mikrometerschrauben, durch welche auf ähnliche Weise wie beim Messtische die grobe und feine Drehung des Vertikal- und Alhidadenkreises bewirkt wird; und zweitens die Lupen (u, u), welche zum Ablesen an den beiden Kreisen dienen.

§. 134. **Der Repetitionstheodolith** unterscheidet sich von dem einfachen Theodolithen dadurch, dass er bei einmaliger Aufstellung und zweimaliger Ablesung ein beliebig grosses Vielfaches eines gegebenen Winkels zu messen gestattet, aus dem man durch Division leicht den einfachen Winkel finden kann. Die Absicht, welche man bei Anwendung dieses Verfahrens hat, ist die Verminderung des Einflusses der Beobachtungsfehler auf den gemessenen Winkel; und diese Absicht wird, wie Theorie und Erfahrung lehren, unter gewissen Bedingungen in befriedigender Weise erreicht. Das Verfahren, die Winkel durch Repetition zu messen, wurde im Jahre 1752 zuerst von Tobias Mayer d. Ä. angegeben und einige Jahre später von Borda in etwas veränderter Gestalt unter dem Namen der doppelten Repetition oder Multiplication in die astronomische Praxis eingeführt. Zum besseren Verständniss des Folgenden müssen wir die Methode der einfachen Repetition, welche sich allein in der Anwendung erhalten hat, erörtern.

Soll der Winkel BCD durch Repetition gemessen werden, so stelle man den Theodolithen centrisch über dem Scheitel C auf und bringe den Horizontalkreis (h) in die wagrechte Lage. Hierauf richte man das Fernrohr auf das linke Signal B ein und lese am Nonius (n) des Alhidadenkreises den Bogen a ab. Ohne den Horizontalkreis zu verrücken, führe



man nun das Fernrohr nach dem Signal D und stelle das Fadenkreuz genau ein. Dadurch ist der Nonius von a nach a' gegangen. Würde man den Bogen a' ablesen, so gäbe der Unterschied a — a' den einfachen Winkel BCD mit den nicht zu vermeidenden Beobachtungsfehlern. Man liest aber a' nicht ab, sondern führt jetzt, indem man den Alhidadenkreis an dem Horizontalkreis festklemmt, diesen und jenen so weit von rechts nach links, bis das Fernrohr genau wieder auf das Signal B gerichtet ist. Dadurch kommt der Punkt a' des Horizontalkreises dahin, wo vorher a war, und die Fig. 141 geht in Fig. 142 über. Die Fortsetzung des Verfahrens besteht darin, dass man den Horizontalkreis wieder feststellt und den gelösten Alhidadenkreis von links nach rechts führt, bis das Fadenkreuz des Fernrohrs das Signal D schneidet. In Folge dieser Drehung kommt der Nonius an den Punkt a'' des Horizontalkreises. Will man hiermit die Repetition beschliessen, so liest man in a'' ab und dividirt den Bogen a'' — a, welcher offenbar den doppelten Winkel BCD vorstellt, durch 2, um den einfachen Winkel BCD zu erhalten. Auf diese Weise kann man das 10, 20, 30-, überhaupt das n fache eines Winkels messen und hieraus durch Division mit 10, 20, 30, . . . n den einfachen Winkel finden. Ueberschreitet der Nonius den Nullpunkt der Theilung, so muss zu der letzten Ablesung, welche a_n heissen soll, so viel mal 360° addirt werden, als der Nonius den Nullpunkt des Horizontalkreises überschritten hat. Ist dieses bei n maliger

Repetition m mal geschehen, so ist, wie leicht einzusehen, der gesuchte Winkel

$$w = \frac{360\,m + a_n - a}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

Nach den vorausgehenden Erklärungen begreift man, dass der wesentliche Unterschied zwischen einem einfachen und einem repetirenden Theodolithen darin liegt, dass bei diesem auch der Horizontalkreis um eine lothrechte Axe drehbar ist. Diese Drehbarkeit des Horizontalkreises wird nach Fig. 151 in folgender Weise bewirkt. In der Centralbüchse (t) des Dreifusses (δ) dreht sich ein hohler Zapfen (η) mit grösster Genauigkeit um seine Mittellinie. An diesem Zapfen ist der Horizontalkreis (h) in senkrechter Richtung befestigt. Die grobe Drehung dieses Zapfens und Kreises wird durch eine Klemme aufgehoben, welche mit der Centralbüchse in Verbindung steht; durch eine Mikrometerschraube ist alsdann noch eine feine Drehung möglich. In der Höhlung des Zapfens für den Horizontalkreis steckt der massive Zapfen (ζ) des Alhidadenkreises (h') so, dass die Axen beider Zapfen ganz genau zusammenfallen. Der Alhidadenkreis wird hier wie bei dem einfachen Theodolithen an dem Horizontalkreis gebremst und durch eine Mikrometerschraube fein gedreht. An der Alhidade der Wiederholungskreise sind in der Regel vier Nonien angebracht, welche um 90° von einander abstehen. Die Absicht, in welcher dieses geschieht, ist die Verminderung des Einflusses allenfallsiger Excentricitäts- und Theilungsfehler auf die Messung, indem man annehmen darf, dass das arithmetische Mittel aus vier Ablesungen der Wahrheit näher kommt als jenes aus zweien.

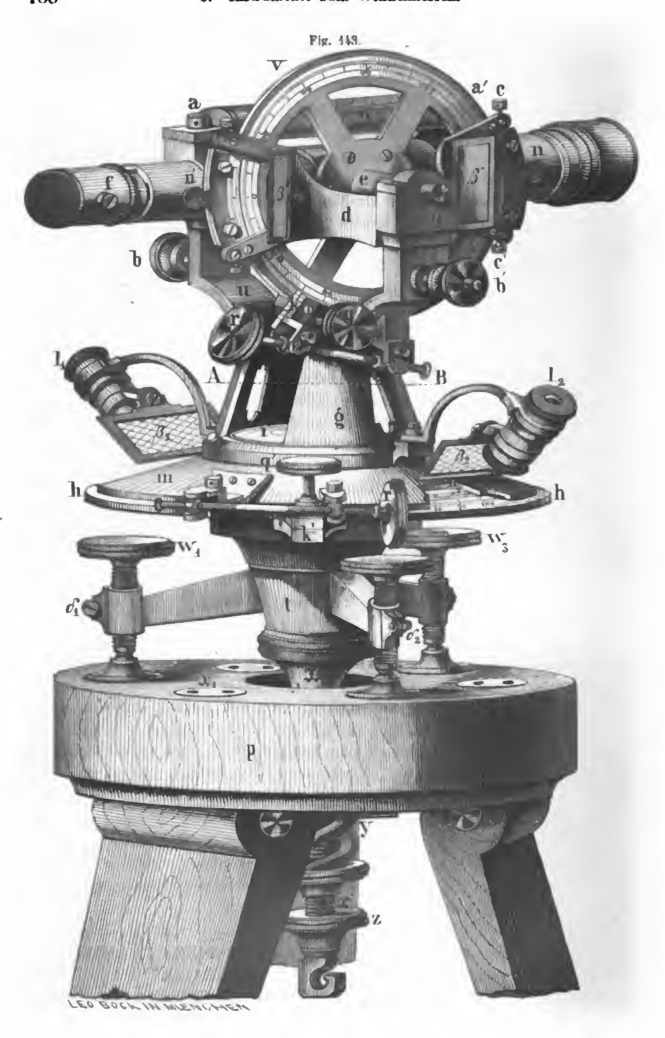
Einfacher Theodolith von Breithaupt.

§. 135. **Einrichtung.** Da es des Raumes wegen nicht möglich ist, in diesem Werke mehrere einfache Theodolithen abzubilden und zu beschreiben, so wird man darin, dass wir den folgenden Erörterungen ein Breithaupt'sches Instrument zu Grunde legen, kein stillschweigendes ungünstiges Urtheil über andere Theodolithen, sondern nur das Bestreben suchen, allen guten Werkstätten für mathematische Instrumente gerecht zu werden. Ein einfacher Theodolith von Ertel in München ist in dem folgenden vierten Abschnitte unter der Bezeichnung „Universalinstrument" beschrieben, da derselbe zugleich Distanzmesser und Nivellirinstrument ist.

Fig. 143 stellt die Ansicht eines einfachen Theodolithen mittlerer Grösse und Fig. 144 den lothrechten Durchschnitt des Dreifusses dieses Instruments mit dem Horizontal- und Alhidadenkreise vor. In beiden Figuren bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche Theile.

Der Dreifuss kann mit seinen an den Enden der Arme befindlichen Stellschrauben (w_1, w_2, w_3) auf jede feste ebene Unterlage gestellt werden; hier ist er aber durch eine Schraubenstange (x) mit einem Reichenbach'schen dreibeinigen Gestelle (p) fest verbunden, damit sich während der Messung

Fig. 148.


V
a
a′
c
n′
f
n
d
e
b
c′
b′
u
r
l₁
A
B
l₂
g
m
h
h
k′
w₁
w₃
d₁
t
d₂
p
z
LEO BOCK IN MÜNCHEN

sein Stand durch die Drehung der Alhidade mit dem Fernrohre nicht verändere. Sehr grosse und schwere Theodolithen bedürfen dieser Verbindung nicht; wo sie aber angebracht ist, darf sie die Wirkung der Stellschrauben des Dreifusses nicht hindern; sie darf also nicht zu starr seyn, sondern muss etwas federn. Desshalb ist die Schraube x mit einer Spirale (y) umwunden, die sich mit ihrem unteren Ende auf die Schraubenmutter x' und oben an eine kleine den Schaft x umgebende ausgehöhlte Messingplatte stützt, welche durch das Vorwärtsdrehen der Mutter x' an die Unterfläche des Gestellkopfes (p) gedrückt wird. Weil die Spirale y federt, so kann sich die Schraube x mit dem Dreifuss t um so viel erheben als die Stellschrauben des letzteren erfordern, während die Fussplatten dieser Schrauben jederzeit fest gegen die Kopfplatte des Gestelles gepresst sind. Die Schraube x ist, wie der Durchschnitt Fig. 144 zeigt, in ihrem oberen Theile hohl und mit einer Federung ausgefüllt, um die Bewegung des Alhidadenzapfens ε, der auf die Scheibe bei v drückt, zu erleichtern.

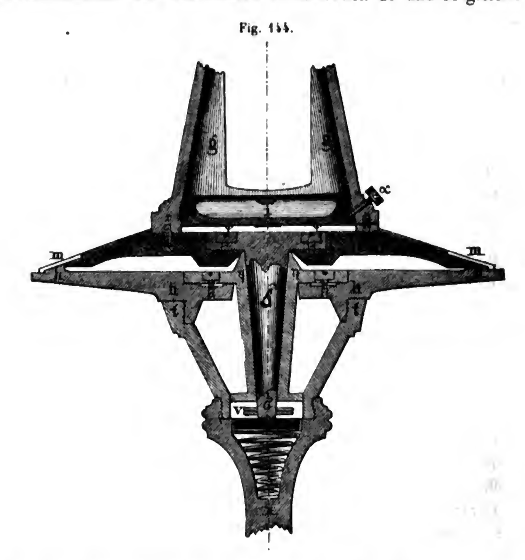
Der Horizontalkreis (h, h) hat an einfachen Theodolithen mittlerer Grösse 7 bis 8 Zoll Durchmesser. Bei $7^1/_2$ Zoll Durchmesser theilt Breithaupt den silbernen Limbus gewöhnlich in Drittel-Grade oder in 1080 gleiche Theile; übrigens gestattet dieser Durchmesser auch eine feinere Theilung bis zu Sechstel-Graden oder in 2160 gleiche Theile. Die Verbindung des Horizontalkreises mit dem Dreifusse zeigt der Schnitt in Fig. 144 so ausführlich, dass jede weitere Bemerkung darüber unnütz erscheint. Dass die Oberfläche dieses Kreises nicht eben, sondern kegelförmig ist, hat darin seinen Grund, dass diese Lage das Ablesen der Theilung etwas erleichtert. Indessen sind alle Schnitte des Limbus durch Ebenen, welche auf der Alhidadenaxe senkrecht stehen, concentrische Kreise, deren Mittelpunkte in dieser Axe liegen und deren Ebenen wagrecht sind, sobald die Alhidadenaxe lothrecht steht. Die Neigung der Kegelfläche gegen den Horizont beträgt 15 bis 20 Grade.

Der Alhidadenkreis (h', h') liegt mit dem Horizontalkreise in einer und derselben Kegelfläche und ist auf die in der Fig. 144 angedeutete Weise mit dem Centralzapfen (δ), dessen Mittellinie die Alhidadenaxe heisst, fest verbunden. Dieser Zapfen endigt unten in eine Schraube mit einer Mutter (v), welche von dem Unterrande der Centralbüchse (η) etwas absteht und den Zweck hat, das Abheben des Alhidadenkreises vom Horizontalkreise zu verhindern. Mit der Klemme k' und der Bremsschraube q' kann der Alhidadenkreis an dem Limbus festgehalten und in seiner groben Drehung gehemmt werden. Denn indem die Schraube q' angezogen wird, drückt sich die untere Platte der Klemme an den Horizontalkreis und verschafft so der mit der oberen Platte verbundenen Differential-Mikrometerschraube r' einen festen Stützpunkt. Wird nun diese Schraube, welche zwei Gewinde von verschiedenen Ganghöhen hat, nicht gedreht, so ist der Alhidadenkreis, auf dem der Ansatz mit der Schraubenmutter befestigt ist, gehindert, vor- oder rückwärts zu gehen. Dagegen wird er sich nach der einen oder anderen

Seite drehen, wenn man die Schraube r' vor- oder rückwärts bewegt. Durch diese wird also die feine Drehung des Alhidadenkreises und aller mit ihm fest verbundenen Theile bewirkt.

Die beiden Nonien (n_1, n_2) liegen in der Oberfläche der Alhidade und stehen sich gerade gegenüber. Sie sind von Silber und haben, wenn der Kreis in Drittelgrade getheilt ist, eine Angabe von einer halben Minute, und wenn er in Sechstelgrade getheilt ist, von zehn Sekunden. In dem ersten Falle ist also die Länge von 39 und in dem zweiten Falle die Länge von 59 Limbustheilen auf dem Nonius in beziehlich 40 und 60 gleiche Theile

Fig. 144.



getheilt. Von dem Limbus sieht man bei fast allen Breithaupt'schen Theodolithen nur wenig mehr als ein Stück von der Länge der Nonien, weil derselbe an allen übrigen Stellen von einem vorspringenden Rande der Alhidade desswegen zugedeckt wird, um ihn vor jeder Beschädigung durch Stoss, Feuchtigkeit, Staub, Schmutz u. dgl. zu schützen.

Das Fernrohr (ef) ruht mit seiner stählernen Drehaxe (e) in zwei mit Kappen zugedeckten Lagern auf den Armen (u, u) einer hohlen, der Länge nach durchbrochenen Säule (g), welche auf dem Alhidadenkreise festgeschraubt ist. Die Höhe dieser Säule und ihre Durchbrechung gestatten, das 14 Zoll lange Fernrohr an der Ocularseite durchzuschlagen. Das Objectiv

des Fernrohrs ist achromatisch und hat 14 Linien Oeffnung; das astronomische Ocular gewährt eine 25malige Vergrösserung. Das Fadenkreuz kann durch zwei Stellschräubchen (f, f) nur seitwärts, aber nicht auf und ab bewegt werden. Diese Bewegung reicht indessen immer aus, so lange sich das Fernrohr, wie hier, nicht um seine optische Axe drehen lässt. Denn da diese Drehung nicht möglich ist, so behält die Visirlinie stets dieselbe Lage gegen die mechanische Axe bei, wenn auch der Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes etwas unter oder über dieser Axe liegt. Es kommt nur darauf an, dass der Kreuzungspunkt in der Ebene liegt, welche durch den optischen Mittelpunkt des Objectivs geht und auf der Drehaxe senkrecht steht: in diese kann er aber durch die Stellschräubchen f, f gebracht werden.

Der Vertikalkreis (v) steht senkrecht auf der Drehaxe des Fernrohrs zwischen diesem und einem seiner Axenlager (u). Sein Durchmesser beträgt bei einem 7 bis 8zölligen Horizontalkreise gewöhnlich 5 Zoll. Der silberne Limbus ist alsdann unmittelbar in halbe Grade getheilt und gibt mit Hilfe der Nonien (n′, n″), welche sich diametral gegenüberstehen, einzelne Minuten an, indem auf ihnen 29 Limbustheile in 30 Nonientheile zerlegt sind. Der Vertikalkreis hat zwei Nullpunkte — für jeden Nonius einen — und von jedem dieser Punkte schreitet die Bezifferung nach zwei entgegengesetzten Seiten bis zu 90⁰ fort. Die Nonien, welche sich in Schraubenspitzen (c, c′) bewegen, können gegen die Ebene des Vertikalkreises geklappt und in der Richtung der Theilung ein wenig verschoben werden, um sie mit derselben richtig zu stellen. Eine Klemme (k) hemmt, wenn die Bremsschraube (q) angezogen wird, die grobe Drehung des Vertikalkreises und des Fernrohrs; durch die Mikrometerschraube r aber werden beide fein gedreht. Die Einrichtung dieses Bestandtheils ist dieselbe wie bei dem gleichnamigen Theile an dem Horizontalkreise.

Eine Röhrenlibelle (o) auf dem Fernrohre dient zur Horizontalstellung nicht allein des Fernrohrs, sondern auch des Limbus. Es erscheint daher die Dosenlibelle (i), welche auf dem Alhidadenkreise in der hohlen Tragsäule (g) steht, nicht als eine nothwendige, sondern bloss als eine angenehme Beigabe, durch welche man sich während der Messung fortwährend von dem ungeänderten horizontalen Stande des Instruments überzeugen kann. Jede dieser Libellen hat entsprechende Stellschräubchen zur Berichtigung: die Röhrenlibelle wird durch die Schraube a, welcher eine um ihre Spindel gewundene Spiralfeder entgegenwirkt, parallel zur Fernrohraxe gestellt und dreht sich dabei um eine horizontale Cylinderfläche auf der entgegengesetzten Seite bei a′. Die Dosenlibelle lässt sich durch drei Schräubchen (α), denen eine federnde kreuzförmig ausgeschnittene Platte unterhalb des Libellengehäuses entgegenwirkt, senkrecht zur Alhidadenaxe stellen.

§. 136. **Aufstellung und Gebrauch.** Soll mit dem eben beschriebenen und als fehlerfrei vorausgesetzten Theodolithen ein Horizontalwinkel gemessen werden, so ist zunächst das Instrument centrisch über dem Scheitel aufzustellen, was durch einen an den Hacken der Stativschraube

x angehängten Senkel leicht zu bewirken ist. Dabei gibt man dem Stativ eine solche Stellung, dass es gehörig feststeht und der Horizontalkreis dem Augenmasse nach wagrecht liegt. Hierauf stellt man durch eine entsprechende grobe und feine Drehung den Vertikalkreis auf die Nullpunkte seiner Nonien ein. Dadurch kommt, wenn kein Collimationsfehler vorhanden, die Libellenaxe in eine senkrechte Lage gegen die Alhidadenaxe. Nun bringe man durch Drehung der Alhidade das Fernrohr sammt der Libelle in die Richtung zweier Stellschrauben, etwa w_1 und w_3, und bewege diese Schrauben einzeln oder in Verbindung so lange, bis die Luftblase der Libelle einspielt. Wenn die Libellenaxe, wie vorausgesetzt wurde, wirklich senkrecht steht zur Alhidadenaxe, so muss die Luftblase auch dann noch einspielen, wenn man das Rohr mit der Libelle um 180^0 gegen die erste Stellung dreht.[1] Nachdem jetzt der Kreis in der Richtung w_1 w_3 wagrecht ist, drehe man die Alhidade um 90^0, so dass die Libelle nunmehr über die dritte Stellschraube w_2 zu stehen kommt, und bringe die Blase durch diese Schraube wieder zum Einspielen. Hat sich durch diese Horizontalstellung an der ersten nach w_1 w_3 Nichts geändert, so muss der Kreis nach allen Richtungen wagrecht seyn. Um sich hievon zu überzeugen, führt man das Rohr zunächst in seine erste Richtung zurück, und wenn die Libelle hier einspielt, so kann man es in verschiedene andere Richtungen bringen, wo das Einspielen ebenfalls stattfinden muss. Sollten sich hiebei kleine Ausschläge der Luftblase ergeben, so müsste das eben beschriebene Verfahren von da ab wiederholt werden, wo die Libelle in der Richtung w_1 w_3 wagrecht gestellt wurde. Nach der Horizontalstellung kann man selbstverständlich die Bremsschraube q am Vertikalkreise, welche bisher fest angezogen war, öffnen und das Fernrohr beliebig bewegen, ohne dass dadurch die wagrechte Lage des Horizontalkreises oder die lothrechte Stellung des Vertikalkreises im geringsten verändert würde.

Nunmehr kann die Winkelmessung beginnen. Es ist gut, sich anzugewöhnen, zuerst auf den linken Schenkel einzustellen. Man führt durch grobe Drehung der Alhidade und des Vertikalkreises das Fernrohr auf das Signal, welches in diesem Schenkel steht, hemmt die groben Drehungen durch die Bremsschrauben q und q' und stellt mit Hilfe der Mikrometerschrauben r und r' den Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes genau auf das Signal ein. Ist dieses eine Stange, so muss man dieselbe so weit als möglich unten anvisiren, um den Einfluss des schiefen Standes, den sie haben kann, auf das Resultat der Messung möglichst zu verringern. Nach dieser Einstellung wird auf beiden Nonien abgelesen und das Ergebniss aufgeschrieben. Hierauf löse man die Alhidade und den Vertikalkreis, führe das Fernrohr auf das zweite Signal, wiederhole für dieses das eben beschriebene Verfahren, und ziehe schliesslich von je zwei zusammengehörigen

[1] Sollte dieses Einspielen nicht stattfinden, so müsste nach §. 137 Nr. 4 der halbe Ausschlag durch die Fussschrauben des Dreifusses und die andere Hälfte durch die Mikrometerschraube r des Vertikalkreises weggeschafft werden.

Ablesungen die erste von der letzten ab. Wenn das Instrument ganz fehlerfrei gebaut und gehörig berichtigt ist, so werden die beiden Nonien für den gemessenen Winkel eine und dieselbe Grösse liefern. Da jedoch die Voraussetzung eines ganz fehlerfreien Baues nicht gemacht werden darf, so werden die Resultate der Messung in der Regel einen kleinen Unterschied zeigen, wesshalb das Mittel aus beiden zu nehmen ist.

Es erscheint vielleicht nicht überflüssig, hier einige Schemata für die Aufzeichnung der Ablesungen mitzutheilen, und die Bemerkung beizufügen, dass, wenn zwischen der ersten und zweiten Einstellung ein Nonius den Nullpunkt der Kreistheilung überschreitet, zu der zweiten Ablesung 360° addirt werden müssen, um aus der Differenz zwischen dieser und der ersten Ablesung den richtigen Winkel zu erhalten.

Standpunkt: Signal S.

Signal.	Nonius I.	Nonius II.	Differenz.
L	102° 40′ 20″	282° 40′ 20″	180° 0′ 0″
R	165° 13′ 50″	345° 13′ 50″	180° 0′ 0″
Winkel LSR =	62° 33′ 30″;	62° 33′ 30″;	0° 0′ 0″.

Standpunkt: Signal O.

Signal.	Nonius I.	Nonius II.	Differenz.
N	159° 47′ 30″	339° 47′ 40″	180° 0′ 10″
P	262° 28′ 50″	(82° 28′ 50″) 442° 28′ 50″	180° 0′ 0″
Winkel NOP =	102° 41′ 20″;	102° 41′ 10″;	0° 0′ 10″.

Mittel: 102° 41′ 15″.

Hat man den Höhenwinkel einer Linie zu bestimmen, welche durch die Drehaxe des Fernrohrs geht, so stelle man das Instrument horizontal, visire nach dem entfernten Punkt, welcher mit der Drehaxe die geneigte Linie bestimmt, und lese an den Nonien des Vertikalkreises ab. Ist das Instrument fehlerfrei, so werden beide Ablesungen gleich seyn. Hat aber der Vertikalkreis einen Excentricitätsfehler, so sind die beiden Ablesungen etwas verschieden. Man darf jedoch hier das Mittel aus diesen Ablesungen so lange nicht als den richtigen Winkel ansehen, als man sich nicht überzeugt hat, dass die Nullpunkte der beiden Nonien in einem Durchmesser ihres Theilkreises liegen. Darum ist es besser, nach der ersten Messung eine zweite in der Art zu machen, dass man das Fernrohr durchschlägt, die Alhidade um 180° dreht, das Fadenkreuz wieder genau einstellt und nun abermals auf beiden Nonien abliest. Ist genau gearbeitet worden, so muss jetzt das arithmetische Mittel aus den Ablesungen am ersten Nonius dem Mittel vom zweiten gleich seyn. Sollten auch diese mittleren Werthe noch etwas verschieden seyn, so wird das Mittel aus allen vier Ablesungen der Wahrheit am nächsten kommen.

§. 137. **Prüfung und Berichtigung.** Die Untersuchungen eines Theodolithen zerfallen in solche, welche ein für allemal vorgenommen werden,

und in solche, welche von Zeit zu Zeit zu wiederholen sind. Zu den ersteren gehört die Prüfung der Kreise und Nonien auf die Richtigkeit ihrer Theilung, die senkrechte Lage ihrer Ebenen gegen die Alhidadenaxen und das Zusammenfallen ihrer Mittelpunkte; zu den letzeren aber:

1) die Untersuchung, ob die Libelle richtig ist, oder, wenn zwei Libellen vorhanden, ob beide richtig sind;

2) ob die Visirlinie des Fernrohrs senkrecht steht zu dessen Drehaxe;

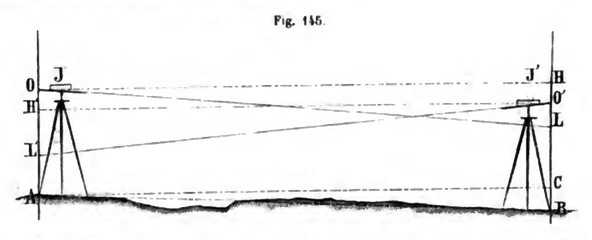
3) ob diese Drehaxe rechtwinkelig ist gegen die Alhidadenaxe; und

4) ob die Nonien des Vertikalkreises auf Null stehen, wenn die Visirlinie des Fernrohrs mit der Alhidadenaxe einen rechten Winkel bildet.

Wir werden zunächst diese vier Untersuchungen besprechen und erst in §. 138 auf die übrigen zurückkommen.

Zu 1. Je nachdem eine Röhrenlibelle auf dem Fernrohre steht oder mit dessen Drehaxe verbunden ist, hat man zu untersuchen, ob die Libellenaxe mit der optischen oder mit der Drehaxe des Fernrohrs parallel ist; denn nur bei dieser gegenseitigen Stellung lässt sich der Theodolith auf die im vorigen Paragraphen angegebene Weise horizontal stellen. In dem vorliegenden Falle ist die Libelle mit dem Fernrohre fest verbunden, und dieses selbst hat kein Lager, welches gestattet, der Fernrohraxe nach dem Umsetzen der Drehaxe genau die erste Lage zu ertheilen. Es lässt sich also zur Prüfung der Libelle die in Paragraph 39 Nr. 2 beschriebene einfache Verfahrungsweise hier nicht anwenden, wesshalb wir zur folgenden umständlicheren Methode greifen müssen.

Fig. 145.



Man bezeichne auf einem abschüssigen Boden zwei etwa 100 Schritte von einander entfernte Punkte A und B durch Grundpfähle. Ueber A stelle man den Theodolithen so auf, dass man den lothrechten Abstand des Oculars O von A leicht messen kann, und in B lasse man eine von ihrem Fusspunkt an fein getheilte Latte (L) lothrecht so halten, dass ihre Theilung gegen A gewendet ist. Man richte nun das Ocular des Fernrohrs so, dass man auf der Latte deutlich lesen kann und bringe durch eine feine Horizontaldrehung das Fadenkreuz in die Mittellinie der Latte. Hierauf stelle man die Libelle horizontal und lese auf der Latte ab. Wir nehmen an, die Visirlinie decke den Punkt L und es sey $BL = h$. Ohne an dem bei

A stehenden Instrumente das Geringste zu ändern, messe man mit der von B hierher gebrachten Latte die Instrumentenhöhe $AO = i$, und nun versetze man den Theodolithen nach B, die Latte aber werde auf A lothrecht gehalten. In B wird dasselbe Verfahren wiederholt, welches eben in A vollendet wurde; seine Ergebnisse seyen die Grössen $AL' = h'$ und $BO' = i'$.

Aus der Messung in A ergibt sich das Gefälle von A bis B oder wenn AC, OH und O'H' wagrechte Linien sind, der lothrechte Abstand $BC = BH - HC$, und aus jener in B die Steigung von B bis A oder wieder der Abstand $BC = BO' - O'C$. Es findet folglich die Gleichung statt:

$$BH - HC = BO' - O'C.$$

Nun ist aber, wenn y die Grösse $HL = H'L'$ bezeichnet, um welche die Visirlinie (OL, O'L') des Fernrohrs auf die Entfernung OH fehl zeigt, $BH = BL + HL = h + y$; $HC = AO = i$; $BO' = i'$ und $O'C = AH' = AL' + H'L' = h' + y$; daher auch, wenn man diese Werthe in obige Gleichung setzt und daraus y sucht:

$$y = \frac{i + i'}{2} - \frac{h + h'}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

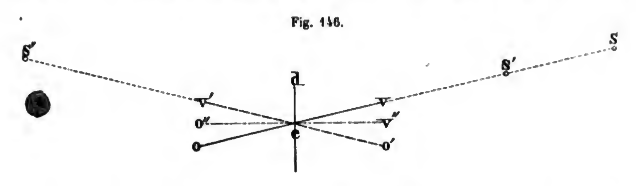
Wäre die Visirlinie (OL, O'L') des Fernrohrs mit der Libellenaxe parallel, so müsste sie bei horizontalem Stand der Libelle offenbar mit der durch die Mitte des Oculars (O, O') gelegt gedachten Horizontalen (OH, O'H') zusammenfallen und y null machen. Umgekehrt also schliessen wir: wenn die arithmetischen Mittel aus den Instrumenten- und Lattenhöhen einander nicht gleich sind, so ist auch die Libellenaxe der Visirlinie des Fernrohrs nicht parallel.

Aufgabe der Berichtigung ist es nun, die Libelle gegen das Fernrohr so zu stellen, dass diese Mittel einander gleich werden. Zu dem Ende berechne man aus den gemessenen Grössen i, i' h, h' die Abweichung y, füge dieselbe zu der bei L' abgelesenen Zahl und verbessere die Libelle auf dem in B noch unverrückt stehenden Instrumente so lange, bis bei einspielender Luftblase das Fadenkreuz auf die Zahl $h' + y$ zeigt. Die Berichtigung erfordert, dass man erst die Schraube bei a' ein wenig lüftet und dann die Schraube a, der, wie schon bemerkt, eine Spiralfeder entgegenwirkt, vor- oder rückwärts dreht. Damit eine Drehung um die unterhalb a' liegende krumme Auflagsfläche möglich wird, ist der Ansatz der Libellenfassung an der Stelle, wo a' durchgeht, etwas weiter gebohrt als die Schraubenspindel erfordert.

Zu 2. Die Visirlinie des Fernrohrs muss zu dessen Drehaxe desshalb senkrecht stehen, weil sie nur in diesem Falle eine Ebene beschreibt. Ob diese Stellung stattfindet, erfährt man dadurch, dass man den Theodolithen an einer beliebigen Stelle eines Feldes oder einer Wiese horizontal stellt und in Entfernungen von ungefähr 200 und 100 Fuss zwei Stäbe S und S' so aussteckt, dass sie in ihrer lothrechten Stellung von dem Fadenkreuze des Fernrohrs gedeckt werden; hierauf aber das Fernrohr durchschlägt und auf der entgegengesetzten Seite des Instruments abermals einen Stab

S'' in die neue Visirlinie stellt. Zeigt sich nach dieser Absteckung, dass die drei Stäbe in gerader Linie liegen, so ist die Visirlinie des Fernrohrs senkrecht zur Drehaxe; ausserdem aber nicht. Denn stellt in Fig. 146 die

Fig. 146.



Linie de die Drehaxe und ov die Visirlinie des Fernrohrs vor, so liegen die Stäbe S und S' in der Linie ov. Wäre diese senkrecht zu de, so müsste nach der Drehung des Fernrohrs um diese Axe die neue Visirlinie o'v' mit der alten ov zusammenfallen und folglich auch S'' in der Richtung vo oder in SS' liegen; wenn aber ov schief gegen de steht, so können die Richtungen ov, o'v' und folglich auch die durch sie bestimmten Geraden SS' und eS'' nicht zusammenfallen. Aus der gegenseitigen Stellung der Stäbe und des Instruments erkennt man leicht, auf welcher Seite die Drehaxe den spitzen oder stumpfen Winkel mit der Visirlinie bildet, und nach welcher Seite hin diese zu verstellen ist. Diese Verstellung geschieht aber durch die Schräubchen f, f, welche auf den Ring, der das Fadenkreuz trägt, in bekannter Weise wirken.

Zu 3. Wenn die Drehaxe des Fernrohrs nicht senkrecht zur Alhidadenaxe ist, so beschreibt die Visirlinie bei lothrechter Stellung der Alhidadenaxe keine Vertikalebene, und folglich projicirt sie auch den anvisirten Winkelschenkel nicht richtig auf den Horizontalkreis. Darum muss auf der Forderung der rechtwinkeligen Stellung beider Axen bestanden werden. Um zu sehen, ob sie erfüllt ist, verschaffe man sich eine lange lothrechte Linie durch einen Senkel oder eine Mauerkante und stelle in beträchtlicher Entfernung davon das Instrument horizontal. Hierauf richte man das Fadenkreuz auf eine beliebige Stelle des Lothes und sehe zu, ob dieses von dem Kreuzungspunkt beim Auf- und Niederkippen des Rohrs fortwährend gedeckt wird oder nicht. Findet diese Deckung statt, so ist die dritte Forderung erfüllt, geht aber das Fadenkreuz vom Lothe weg, so steht die Drehaxe auf der Alhidadenaxe nicht senkrecht. Der auf diese Weise aufgefundene Fehler lässt sich durch Hebung oder Senkung des zweiten Zapfenlagers u, das in Fig. 143 nicht sichtbar ist, wegschaffen. Die Wirkung der hiefür angebrachten Stellschräubchen kann man an einem gegebenen Instrumente sofort sich selber klar machen, wesshalb wir darüber Nichts weiter beifügen.

Wäre die Röhrenlibelle, statt mit dem Fernrohre verbunden zu seyn, auf der Drehaxe selber angebracht und dieser parallel gestellt, so liesse sich

die in Rede stehende Untersuchung einfacher machen. Man dürfte nämlich nur, nachdem man das Instrument dem Augenmasse nach hinreichend horizontal gestellt hat, die Libelle längs zweier Fussschrauben stellen, zum Einspielen bringen und hierauf mit der Alhidade in die entgegengesetzte Richtung drehen. Spielt auch hier die Luftblase ein, so ist die Drehaxe senkrecht zur Alhidadenaxe; weicht sie aber ab, so zeigt der Ausschlag den doppelten Fehler in dem rechtwinkeligen Stand beider Axen an. Denn stellt ae in Fig. 147 die Alhidadenaxe, bc die Drehaxe des Fernrohrs, und bea $= 90^0 - \delta$ oder cea $= 90^0 + \delta$ den Winkel vor, welchen beide Axen einschliessen: so wird, wenn vorerst bc horizontal ist und die Luftblase der Libelle in o einspielt, nach einer halben Drehung der Alhidade um ihre Axe ae die Drehaxe die Lage c'b' annehmen, wobei dann b'ea $= 90^0 - \delta$ und c'ea $= 90^0 + \delta$ ist, während die Luftblase nach o' geht und durch ihren Ausschlag den Neigungswinkel φ der Drehaxe gegen den Horizont misst. Da nun der Winkel cea $=$ cev $+$ vea $= 90^0 + \delta =$ ceb' $+$ b'ea $= \varphi + 90^0 - \delta$ ist, so folgt hieraus, was zu beweisen war, nämlich:

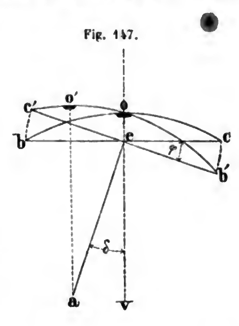


Fig. 147.

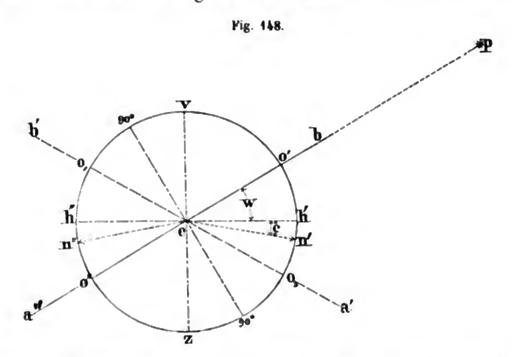
$$\varphi = 2\delta. \qquad \qquad (99)$$

Die eine Hälfte des angezeigten Fehlers ist an der Alhidadenaxe, d. h. an den Fussschrauben des Dreifusses, womit die Drehaxe parallel gestellt wurde, und die andere Hälfte an dem Zapfenlager der Drehaxe zu verbessern.

Zu 4. Die vierte Forderung ist nöthig, weil von ihrer Erfüllung die richtige Messung der Höhen- und Tiefenwinkel abhängt, wie man sich leicht selbst klar machen kann. Um an unserem Instrumente zu untersuchen, wie weit es dieser Forderung genügt, braucht man nur die Visirlinie des Fernrohrs senkrecht auf die Alhidadenaxe zu stellen und hierauf den Stand der Nonien abzulesen. Die senkrechte Stellung der Visirlinie erhält man aber dadurch, dass man das Fernrohr in die Richtung zweier Fussschrauben stellt, durch diese die vorher schon berichtigte Libelle zum Einspielen bringt, hierauf das Fernrohr sammt der Libelle um 180° dreht und den Ausschlag der Luftblase, welcher sich nach dieser Drehung zeigt, halb an den Fussschrauben und halb an der Mikrometerschraube r des Vertikalkreises verbessert. Die Begründung dieses Verfahrens ist dieselbe, welche wir eben für die Senkrechtstellung der Dreh- und Alhidadenaxe kennen gelernt haben. Hat man es dahin gebracht, dass die Libelle in zwei entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs einspielt, so ist dessen Visirlinie zur Alhidadenaxe senkrecht. Der kleine Bogen, um welchen ein Nullpunkt des Vertikalkreises von dem Nullpunkt des nächststehenden Nonius abweicht, heisst der Collimationsfehler dieses Nonius. Um diesen Collimationsfehler würde ein

gemessener Höhen- oder Tiefenwinkel zu gross oder zu klein werden, je nachdem der Fehler positiv oder negativ ist. Liesse sich dieser Fehler nicht wegschaffen, so müsste er seiner Grösse und Lage nach angemerkt und bei jeder Messung gehörig in Rechnung gebracht werden. Hier aber lässt er sich durch die Schräubchen c und c', in deren Spitzen der Nonius läuft, beseitigen. Indem man nämlich c zurück und c' um eben so viel vorwärts dreht, bewegt sich der Nonius von c' nach c, und umgekehrt. Man kann also, nachdem die winkelrechte Stellung der Visirlinie gegen die Alhidadenaxe vorhanden ist, die betreffenden Nullpunkte leicht so aneinander bringen, dass ihre Theilstriche in eine gerade Linie fallen.

Fig. 148.



Stünde die Röhrenlibelle nicht auf dem Fernrohr, sondern auf der Drehaxe desselben, so liesse sich der Collimationsfehler wie folgt finden. Man stelle das Instrument horizontal, richte das Fadenkreuz des Fernrohrs auf einen weit entfernten, gut beleuchteten Punkt P, und lese an dem zu untersuchenden Nonius n' ab. Diese Ablesung entspricht dem Bogen o'n' und ist, wenn h'h" horizontal gedacht wird, in dem vorliegenden Falle gleich dem gesuchten Höhenwinkel o'eh' (w) plus dem Collimationsfehler h'en' (c). Nennen wir sie a', so gilt die Gleichung:

$$a' = w + c. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (\alpha)$$

Gibt man hierauf der Alhidade eine halbe Drehung um ihre vertikale Axe (ve), so kommt das Fernrohr ab in die Lage a'b', der Nonius n' nach n", der Nullpunkt o' nach o_1 und o" nach o_2. Schlägt man nun das Fernrohr durch, so dass a' wieder nach a und b' nach b, folglich auch o_1 wieder nach o' und o_2 nach o" kommt, stellt hierauf genau auf den Punkt P ein und liest an dem in n" stehen gebliebenen Nonius ab, so gibt diese Ablesung a" den Bogen o"n", welcher um den Collimationsfehler c zu klein ist, so dass die zweite Gleichung:

$$a'' = w - c \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (\beta)$$

stattfindet. Zieht man dieselbe von der ersteren ab, so kommt

$$c = \frac{a' - a''}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Um diese Grösse würde der Nonius n' die Höhenwinkel zu gross und die Tiefenwinkel zu klein liefern. Wäre $a'' > a'$, so läge der Collimationsfehler

$$c = \frac{a'' - a'}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

auf der oberen Seite von eh', und es würde in diesem Falle jeder Höhenwinkel um ihn zu klein, jeder Tiefenwinkel aber zu gross gefunden. Was von dem einen Nonius gilt, gilt auch für den anderen. Hat man für jeden die Grösse und Lage des Collimationsfehlers bestimmt, so verschiebt man demgemäss die Nonien so lange, bis diese Fehler null werden.

Wollte man sich jedoch die Mühe des Aufsuchens und Wegschaffens des Collimationsfehlers nicht geben, so liesse sich sein Einfluss auf den gesuchten Höhen- oder Tiefenwinkel durch dasselbe Verfahren, welches so eben zu seiner Bestimmung angewendet wurde, beseitigen; denn wenn man die Gleichungen (α) und (β) addirt, so folgt daraus

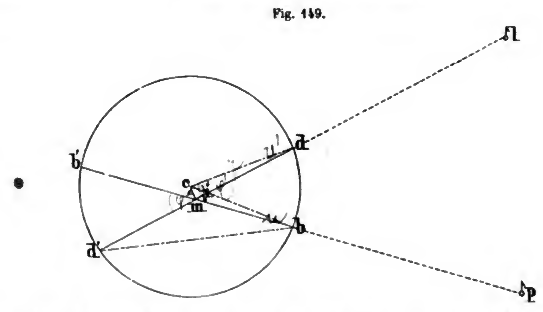
$$w = \frac{a' + a''}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

d. h. der gesuchte Höhenwinkel ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Ablesungen a' und a'', welche den Collimationsfehler noch in sich tragen. Dabei kann dieser Fehler positiv oder negativ seyn. Hat man gleichzeitig mit dem ersten auch den zweiten Nonius abgelesen und dafür a_1 und a_2 erhalten, so gibt das Mittel aus diesen Ablesungen noch einen zweiten Werth von w. Stimmt dieser nicht genau mit dem ersten, so nimmt man aus beiden wiederum das Mittel, welches dann gewiss der Wahrheit sehr nahe kommt.

Es verdient überhaupt bemerkt zu werden, dass es jederzeit besser ist, ein Messverfahren anzuwenden, wobei der Einfluss eines Fehlers am Instrumente vernichtet wird, als diesen Fehler selbst wegzuschaffen oder in Rechnung zu bringen. Diese Bemerkung kommt uns sehr zu statten bei den Untersuchungen, welche sich auf das Zusammenfallen der Alhidadenaxe mit dem Mittelpunkt des Horizontalkreises oder die Concentricität der Alhidade und auf die Vereinigung der Alhidadenaxe und der Visirlinie in eine Ebene oder die Concentricität des Fernrohrs beziehen. Obgleich aber durch geeignete Beobachtungsmethoden die nachtheiligen Wirkungen der Excentricität der Alhidade und des Fernrohrs beseitigt werden können, so ist es doch nicht überflüssig, vorher die Grösse dieser Wirkungen zu berechnen, weil nur dadurch die Einsicht gewonnen werden kann, dass die genannten Excentricitäten gefährliche Feinde der Winkelmessung sind.

§. 138. **Excentricitäts- und Theilungsfehler.** Stellt in Fig. 149 c den Mittelpunkt des Limbus und m den Mittelpunkt der Alhidade vor, so heisst die Linie cm die Excentricität der Alhidade. Misst man mit einem Theodolithen,

Fig. 149.



der diese Excentricität hat, einen Winkel lmp = φ, so erhält man für diesen Winkel aus den Ablesungen bei b und d den Bogen bd, welcher seinen Mittelpunkt in c hat und daher nicht das Mass des Winkels φ sondern des Winkels dcb = φ' ist. Der Unterschied $\varphi - \varphi'$ ist der Fehler f, welchen die Excentricität der Alhidade in dem gemessenen Winkel veranlasst und den wir zu bestimmen haben. Zu dem Ende bezeichne

e die Excentricität (cm) der Alhidade,
ω den Neigungswinkel (dcm) der Linien cm und cd,
r den Halbmesser (cd, cb) des Limbus,
d den Winkel cdm und
b den Winkel cbm.

Man findet leicht, dass $\varphi + b = \varphi' + d$ und folglich

$$f = \varphi - \varphi' = d - b$$

ist. Da cm selbst bei weniger guten Instrumenten nur eine sehr kleine Grösse ist und wohl nie mehr als $^1/_{10}$ Linie beträgt, so kann man mb = r setzen und mit Hilfe der Dreiecke cdm und cmb die Gleichungen bilden:

$$\sin d = \frac{e}{r} \sin \omega, \quad \text{und} \quad \sin b = \frac{e}{r} \sin (\omega - \varphi').$$

Wegen Kleinheit der Winkel d und b ist

$$d = 206265 \cdot \frac{e}{r} \sin \omega \text{ Sek.}, \; b = 206265 \cdot \frac{e}{r} \sin (\omega - \varphi') \text{ Sek. und daher}$$

der Excentricitätsfehler des gemessenen Winkels φ gleich

$$f = 206265 \cdot \frac{e}{r} (\sin \omega - \sin [\omega - \varphi']) \text{ Sek. oder}$$

$$f = 412530 \cdot \frac{e}{r} \sin \tfrac{1}{2} \varphi' \cos (\omega - \tfrac{1}{2} \varphi') \text{ Sek.} \quad \ldots \ldots \quad (103)$$

Dieser Fehler wird null, wenn e oder $\cos (\omega - \frac{1}{2} \varphi') = o$ ist. Dem letzteren Falle entsprechen diejenigen Werthe von φ', welche sich aus den Gleichungen: $\omega - \frac{1}{2} \varphi' = 90^0$ und $\omega - \frac{1}{2} \varphi' = 270^0$ ergeben und die beide gleich $\varphi' = 2\omega - 180^0$ sind. Für ein bestimmtes Instrument mit der

Excentricität e und für einen abgelesenen Winkel φ' wird der Excentricitätsfehler f am grössten, wenn cos $(\omega - \frac{1}{2}\varphi') = \pm 1$ ist, d. h. wenn $\omega - \frac{1}{2}\varphi' = 0$ oder $= 180^0$, oder $\varphi' = 2\omega$ ist.

Ist z. B. der Winkel $\omega = 30^0$, der abgelesene Winkel $\varphi' = 60^0$, die Excentricität der Alhidade e = 0,05 Linien und der Limbushalbmesser r = 5" = 50 Linien, so wird

$$f = 412530 \,.\, 0{,}001 \,.\, 0{,}5 \text{ Sek.} = 206'',26 = 3'26''.$$

Dieser bedeutende Fehler, welcher aus einer Excentricität der Alhidade von $^1/_{20}$ Linie entspringt, fällt aus der Messung des Winkels φ hinweg, so bald man nicht bloss an dem einen Nonius bei b und d, sondern auch an dem anderen bei b' und d' abliest und aus den Bögen bd und b'd', die jene Ablesungen liefern, das Mittel nimmt, welches dem gesuchten Winkel φ genau gleich ist. Denn zieht man in Fig. 149 die Linie bd', so ist $\varphi =$ Winkel b d'd + Winkel b'bd' $= \frac{1}{2}$ (b d) $+ \frac{1}{2}$ (b'd') $= \frac{1}{2}$ (b d + b'd'), w. z. b. w.

Der Einfluss einer Excentricität des Fernrohrs wird nach der Formel (94), welche in §. 125 für die Excentricität der Visirlinie der Feldbussole aufgestellt wurde, berechnet oder nach dem Verfahren, welches daselbst auseinander gesetzt ist, vernichtet. Da es schwierig ist, die Grössen e und ω, welche zur Berechnung der Excentricitätsfehler nöthig sind, an einem Theodolithen auszumitteln, so unterlässt man bei Winkelmessungen mit diesem Instrumente diese Rechnung und benützt dafür die Mittel, welche die vorhergehende Betrachtung und der §. 125 an die Hand geben, um den Einfluss der Excentricität des Fernrohrs und der Alhidade zu beseitigen, d. h. man misst jeden Horizontalwinkel mit zwei entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs, liest bei jeder Lage des Rohrs die beiden Nonien ab und nimmt aus den vier Bögen, die man so erhält, das arithmetische Mittel für den gesuchten Winkel.

Was die Untersuchung der Kreistheilungen betrifft, so ist diese, wenn sie mit Strenge geführt werden soll, eben so schwierig als umständlich; für einfache Theodolithen mag jedoch das folgende minder genaue Verfahren genügen. Sind n — 1 Theile des Limbus n Theilen des Nonius gleich, so muss, wenn man den Nullpunkt des Nonius auf einen Theilstrich des Limbus genau einstellt, auch der (n + 1) te Theilstrich des Nonius mit einem Strich des Limbus genau zusammentreffen. Führt man nun den Nonius in dem ganzen Kreise so herum, dass der Nullpunkt des ersteren von Strich zu Strich des letzteren weiter gerückt wird, und zeigt sich hierbei, dass auch der (n + 1) te Theilstrich des Nonius gleichzeitig einen Theilstrich des Limbus deckt, so kann man sich mit der Theilung des Horizontalkreises vollständig begnügen. Zeigte sich aber an einer Stelle eine Abweichung, so müsste diese Stelle bemerkt und bei späteren Messungen in der Art berücksichtigt werden, dass der daselbst stattfindende Fehler entweder in gar keine oder in beide Ablesungen kommt, damit er sich bei der Berechnung

des Winkels aufhebt. Wollte man dieses nicht, so müsste die Grösse des Fehlers bestimmt und wenn bei Messungen diese Stelle einseitig benützt wird, gehörig in Rechnung gebracht werden. Man darf aber den sich kundgebenden Fehler nicht sofort als von der Theilung allein herrührend ansehen, sondern muss ihn als die Gesammtwirkung der Theilungs- und Excentricitätsfehler betrachten. Eine genaue Ausscheidung der einzelnen Antheile ist fast unmöglich, nützt aber eigentlich auch Nichts, da doch nur die Summe aller Einflüsse bekannt zu seyn braucht.

Ob der Nonius in gleiche Theile getheilt ist, kann man, nachdem die vorhergehende Untersuchung den Beweis geliefert hat, dass der erste und $(n + 1)$ te Theilstrich genau um $n - 1$ Theile des Limbus von einander abstehen, in folgender Weise mit einer für die meisten Messungen hinreichenden Schärfe erforschen. Bekanntlich hat der Nonius vor dem ersten und $(n + 1)$ ten Theilstriche noch eine Uebertheilung. Man kann nun den äussersten Strich dieser Theilung vor dem Nullpunkte als den Nullpunkt des Nonius ansehen, diesen Strich auf einen des Limbus genau einstellen und untersuchen, ob der $(n + 1)$ te Strich, von jenem äussersten an gezählt, mit einem Theilstrich des Limbus zusammentrifft oder nicht. Eben so kann man mit dem zweiten, dritten, vierten und letzten Theilstrich der Uebertheilung vor dem Nullpunkt und dem jedem von ihnen entsprechenden $(n + 1)$ ten Strich der Theilung verfahren. Wendet man dieses Verfahren auch auf die Uebertheilung hinter dem eigentlichen $(n + 1)$ ten Theilstrich an, so hat man nicht nur beide Uebertheilungen, sondern auch von dem Nonius die zwei Enden in einer Länge untersucht, welche der Summe der Uebertheilungen gleich kommt. Das noch übrig bleibende Mittelstück des Nonius lässt sich wohl nur dadurch prüfen, dass man nach und nach jeden Strich desselben genau einstellt und zusieht, ob die zu beiden Seiten gleichweit von ihm abliegenden Noniusstriche gleiche Differenzen mit den entsprechenden Limbustheilen bilden; eine Untersuchung, welche allerdings ein sehr geübtes Augenmass und eine gute Lupe erfordert. Genauere, aber (der Natur der Sache nach) auch weit umständlichere Methoden zur Untersuchung der Theilungen findet man in der ersten und siebenten Abtheilung der „Astronomischen Beobachtungen in Königsberg“ von F. W. Bessel.

Die Horizontalstellung des Limbus durch das in §. 136 beschriebene Verfahren beruht auf der Voraussetzung, dass der Limbus senkrecht steht zur Alhidadenaxe; denn durch jenes Verfahren wird eigentlich nur die Alhidadenaxe lothrecht gestellt. Die genannte Voraussetzung kann auch von dem Mechaniker vollständig erfüllt werden und trifft gewiss bei allen Theodolithen aus guten Werkstätten ein. Wenn man sich aber gleichwohl veranlasst fühlte, sein Instrument auch in dieser Hinsicht zu prüfen, so könnte es dadurch geschehen, dass man erst die Schraubenmutter (v) am untern Ende des Alhidadenzapfens löst, hierauf die bekannte Horizontalstellung vornimmt; dann die Alhidade mit Allem, was sie trägt, vorsichtig aushebt, und schliesslich eine vorher berichtigte feine Röhrenlibelle in

mehreren Richtungen auf den Horizontalkreis stellt. Zeigt hiebei die Luftblase keinen Ausschlag, so steht der Kreisrand zur Alhidadenaxe senkrecht; ausserdem fände in jeder Richtung eine dem Ausschlag entsprechende Abweichung von der winkelrechten Lage statt; der stärkste Ausschlag entspräche der grössten Abweichung. Nach dieser Prüfung mit der Libelle muss man sich auch überzeugen, dass die wiedereingesetzte Alhidadenaxe noch lothrecht steht, wenn man sicher seyn will, dass die schiefe Stellung des Horizontalkreises nicht erst durch das Ausheben der Alhidade bewirkt wurde. Uebrigens hat wie in der Lehre von den Messungen gezeigt wird, eine geringe Abweichung der Alhidadenaxe von der senkrechten Lage gegen den Limbus auf die Messung der Winkel fast gar keinen Einfluss, wenn nur die Alhidadenaxe lothrecht und die Drehaxe des Fernrohrs wagrecht ist.

Repetitionstheodolith von Ertel mit centrischem Fernrohr.

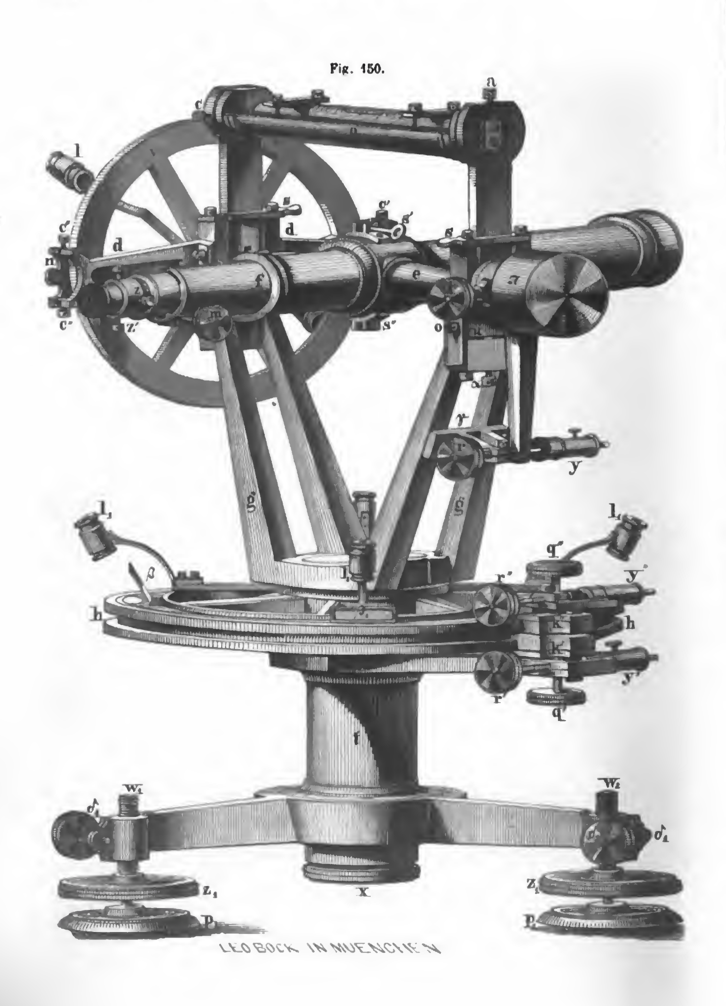
§. 139. **Einrichtung.** In dem mechanischen Institute von Ertel und Sohn in München werden gegenwärtig die meisten Wiederholungskreise mittlerer Grösse in der Form ausgeführt, welche Fig. 150 in der Ansicht und Fig. 151 im Durchschnitte nach der Alhidadenaxe darstellt. Gleiche Theile sind in beiden Figuren gleich bezeichnet.

Der Dreifuss wird mit seinen drei Stellschrauben (w_1, w_2, w_3) [1] die man mit den geränderten Köpfen (z_1, z_1) dreht, auf drei mit Spitzen in die Unterlage eingreifende Fussplatten (p_1, p_1) gestellt und mit dieser Unterlage nicht weiter verbunden, da das Gewicht des ganzen Instruments hinreicht, jede Verrückung bei vorsichtiger Behandlung während der Messung zu verhindern. Die Muttern (δ_1, δ_1) der Stellschrauben sind aufgeschlitzt und können zur Vermeidung des todten Gangs durch Klemmschrauben (δ_2, δ_2) angezogen werden. An den Körper des Dreifusses ist eine Büchse (t, t) von Rothguss angeschraubt, um die Axen des Horizontalkreises und der Alhidade aufzunehmen.

Der Horizontalkreis (h, h) kann verschiedene Grössen haben; an unserem Instrumente beträgt er 7 Zoll. Der Limbus befindet sich auf einem eingelegten ebenen Ring von Silber und ist unmittelbar in Sechstelgrade oder in 2160 gleiche Theile getheilt. Von dem Rand des Kreises laufen Speichen nach einem durchbohrten Mittelstücke (ϱ, ϱ), an das der hohle Zapfen (η, η) dieses Kreises mittels Schrauben senkrecht befestigt ist. Der Horizontalkreis kann somit vollständig im Kreise herumgedreht werden. Zur Hemmung der groben Drehung desselben dient die Klemme k′, welche mit dem an der Centralbüchse (t) feststehenden Arme λ verbunden ist und durch die Bremsschraube q′ geschlossen wird. Nachdem diese Schraube angezogen ist, hängt die feine Bewegung des Horizontalkreises nur mehr von der Mikrometerschraube r′ und einer ihr entgegenwirkenden Spirale ab, welche sich in dem Cylindergehäuse y′ (Fig. 150) befindet und daselbst um einen

[1] Die dritte Stellschraube (w_3) blieb der Deutlichkeit wegen aus der Zeichnung weg.

Fig. 150.

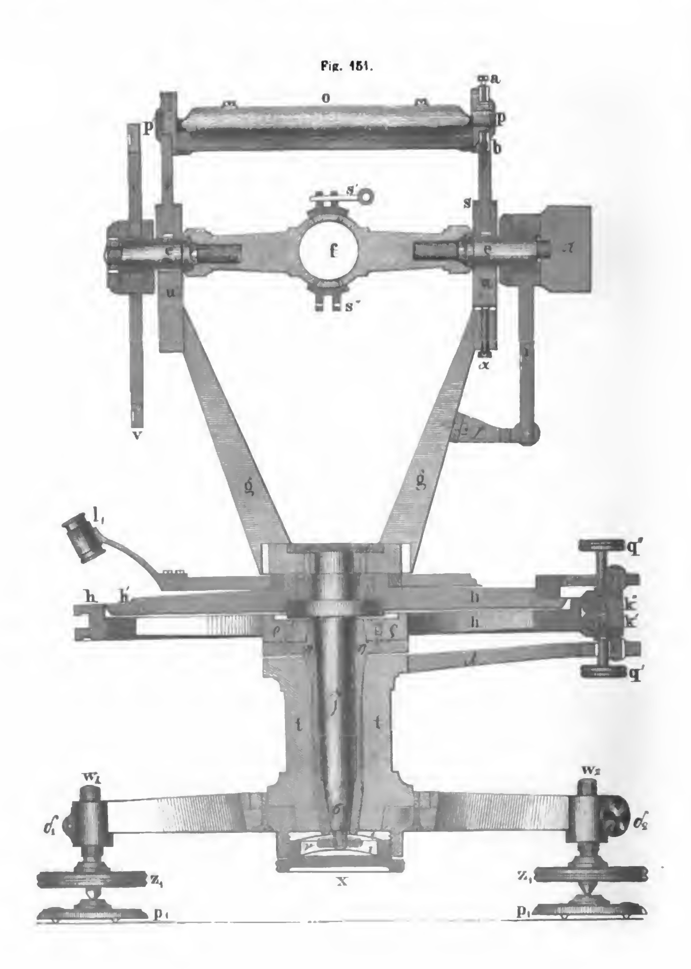


beweglichen Stift, der aus dem Gehäuse hervorragt, gewunden ist. Das Viereck i in Fig. 151 ist der Schnitt eines an der untern Klemmplatte feststehenden Ansatzes. Da die Mutter der Mikrometerschraube und das Federgehäuse unbeweglich feststehen, so muss sich der Ansatz i und mit ihm der Horizontalkreis in dem Ausschnitte des Armes λ bewegen, wie es jene Schraube und die Feder verlangen. Der grösste Bogen, um welchen der Kreis durch die feine Drehung bewegt werden kann, ist, wie man leicht findet, gleich dem Unterschied zwischen der Weite des genannten Ausschnittes und der Dicke des Ansatzes i auf der untern Klemmplatte.

Der Alhidadenkreis (h', h') liegt mit dem Horizontalkreise in einer Ebene und ist durch Schrauben mit einem massiven stählernen Zapfen (ζ) senkrecht verbunden. Die Mittellinie dieses Zapfens, die Alhidadenaxe, muss genau mit jener des hohlen Zapfens des Horizontalkreises zusammenfallen, und beide sollen mit hinreichender Schärfe auf der Ebene beider Kreise senkrecht stehen. Wenn beide Axen nicht eine einzige gerade Linie bilden, so heisst ihr Abstand von einander, in der Alhidadenebene gemessen, die Excentricität der Alhidade. Der massive Centralzapfen endigt, wie Fig. 151 zeigt, unterhalb des Dreifusses in eine Schraube σ, an der eine Mutter (ν) festsitzt. Der Zweck dieses Abschlusses ist, das unabsichtliche Ausheben des Alhidadenkreises zu verhindern. Damit sich der Zapfen dieses Kreises nicht zu fest in den Hohlzapfen des Limbus und dieser wiederum nicht mehr als nöthig in die Centralbüchse des Dreifusses einsenkt, so ruhen beide auf federnden Ringen (ι, ι), welche auf der hohlen Schraube x liegen, die an dem Dreifuss angebracht ist. In gleicher Weise wie der Horizontalkreis mit dem Dreifusse ist jener mit dem Alhidadenkreise durch eine Klemme (k'') und eine Mikrometerschraube (r'') verbunden. Zieht man die Bremsschraube q'' an, so drückt sich die Klemme fest an den Rand des Horizontalkreises und der Alhidade ist nur noch jene feine Bewegung möglich, welche ihr die Mikrometerschraube in Verbindung mit der Spirale und dem beweglichen Stifte in dem Cylindergehäuse (y'') gestatten. Diese Bewegung geht vor- oder rückwärts, je nachdem man die Schraube r'' dreht, und durch sie wird das Fadenkreuz des Fernrohrs im horizontalen Sinne genau eingestellt.

Die vier Nonien (n_1, n_1), welche die Alhidade trägt, sind wie der Limbus von Silber und stehen 90° von einander ab. Ihre Angabe beträgt 10 Sekunden, da 60 Noniustheile 59 Limbustheilen à 10 Minuten gleich sind, und ihre Bezifferung läuft wie die des Kreises von links nach rechts. Da 6 Theile des Nonius einer Angabe von 6mal 10 Sekunden oder einer Minute und 12 Theile zwei Minuten entsprechen, so ist wegen Mangels an Raum nur jeder zwölfte Theilstrich, von 0 an gerechnet, beziffert, die Zahl 2 bedeutet also 12 Theile oder 2 Minuten, die Zahl 4 entspricht 24 Theilen oder 4 Minuten, u. s. w. bis zur Zahl 10, welche dem 60sten Theilstriche, von 0 an gezählt, zugehört und also 10 Minuten bezeichnet. Die Vielfachen von 6, welche nacheinander 1, 2, 3 . . . 9 Minuten entsprechen,

Fig. 151.



sind durch einen Punkt oberhalb der betreffenden Theilstriche kenntlich gemacht. Auf diese Weise ist das Abzählen der Noniustheile sehr erleichtert, indem man immer nur noch von 1 bis 5 zu zählen hat. Für jeden Nonius ist eine Lupe (l_1) und ein Blendrähmchen (β_1) vorhanden.

Das Fernrohr (f) wird von zwei Doppelarmen (g, g) getragen, welche sich über dem Alhidadenkreise erheben und auf dessen Mittelstück festgeschraubt sind. Die Drehaxe (e, e) des Rohrs ist von Rothmetall und ihre Zapfen sind von Stahl, die Lager von Messing. Da diese Axe zur Alhidadenaxe genau senkrecht stehen muss, so kann das rechte Lager (u) durch vier Stellschräubchen (α, α) gehoben, gesenkt und wieder festgemacht werden. Die Arme g, g sind so hoch, dass man das Fernrohr mit der Ocularseite durchschlagen kann. Die Länge des Rohrs beträgt 14 Zoll und die Oeffnung des Objectivs 13 Linien; das astronomische Ocular gewährt eine 25malige Vergrösserung. Die Ocularröhre wird durch das Getriebe m in der Objectivröhre verschoben und das Fadenkreuz durch die vier Stellschräubchen z', z' und den Ring z nach §. 65 berichtigt.

Der Vertikalkreis (v) ist ausserhalb eines der Lager u auf der Drehaxe des Fernrohrs befestigt. Sein Mittelpunkt liegt in dieser Axe und seine Ebene steht senkrecht darauf. Damit er das Gleichgewicht in Bezug auf die Alhidadenaxe nicht stört, ist der Drehzapfen am zweiten Lager mit einem Gegengewichte π beschwert. Der Durchmesser des Vertikalkreises beträgt bei 7zölligen Wiederholungskreisen gewöhnlich $5\frac{1}{2}$ Zoll. Bei dieser Grösse wird der silberne Limbus in Sechstelgrade und jeder der beiden diametral gegenüberstehenden Nonien so getheilt, dass man bis auf 10 Sekunden ablesen kann. Zwei Lupen (l, l) erleichtern dieses Geschäft. Die Nonien bewegen sich in den Armen ihrer Träger (d, d) zwischen Schraubenspitzen (c', c"), damit man ihre Nullpunkte richtig stellen oder die Collimationsfehler wegschaffen kann. Die grobe Drehung des Vertikalkreises oder des Fernrohrs hängt von der Bremsschraube q ab, welche, wenn sie angezogen ist, die Drehaxe e mit dem Hebel i fest verbindet und dadurch bewirkt, dass die grobe Drehung aufhört. Nach Aufhebung dieser Drehung ist eine feine mit Hilfe der Mikrometerschraube r innerhalb der Grenzen möglich, welche die Arme des festgeschraubten Trägers der Mikrometerbewegung gestatten. Die besondere Einrichtung dieser Bewegung ist der auf Seite 205 erklärten ähnlich.

Die Röhrenlibelle (o), welche zur Horizontalstellung des Instruments dient, steht hier mittels langer Füsse (φ, φ) auf zwei genau cylindrisch abgedrehten Stellen (e, e) der Drehaxe des Fernrohrs und wird in dieser Stellung durch zwei oberhalb des Zapfenlagers angebrachte Schliessen (s, s) festgehalten. Die Verbindung der Röhre mit dem halbcylindrischen Lager o und dieses Lagers mit den Füssen ist nach §. 38 und Fig. 20 bewerkstelligt. Die zwei Stellschräubchen c, c dienen dazu, die Libellenaxe mit der Drehaxe in eine Ebene zu bringen, und die übrigen beiden Schräubchen a, b werden zur Parallelstellung beider Axen nach §. 38 und Fig. 18



gebraucht. Wenn die Libellenaxe in jeder Weise richtig gestellt ist, wird die vorher etwas gelüftete Fassung der Röhre durch zwei Plättchen p, p', welche sich an der Aussenseite der Füsse befinden, mit diesen wieder fest verbunden. Ausser der auf der Drehaxe befindlichen Röhrenlibelle o kann man auch eine zweite auf die cylindrischen Ringe f, f des Fernrohrs, mit dessen Axe parallel, aufsetzen, um die Visirlinie horizontal stellen und das Instrument zum Nivelliren benützen zu können. Eine Schliesse s' dient zum Festhalten dieser zweiten Libelle auf dem Fernrohre. Schlägt man das letztere durch, so kann man mit Hilfe der unteren Schliesse s'', welche alsdann oben ist, die Libelle auch nach oben versetzen. Dass die Libelle o beim Durchschlagen des Fernrohrs abgehoben werden muss, versteht sich von selbst.

§. 140. **Aufstellung und Gebrauch.** Die Aufstellung des wiederholenden Theodolithen ist von der des einfachen nicht wesentlich verschieden. Er wird entweder wie dieser auf ein Stativ oder unmittelbar auf eine feste ebene Unterlage von Stein oder Holz mit nahezu wagrechter Oberfläche gestellt, auf welcher der Scheitel des zu messenden Winkels nach §. 85 bezeichnet ist. Wir setzen hier einen Standpunkt der zweiten Art und ein völlig richtiges Instrument voraus. Nachdem man den Centralzapfen ζ oder die Schraube x in das Loth des Winkelscheitels gebracht hat, stelle man den Vertikalkreis auf Null ein und drehe die Alhidade so, dass das Fernrohr über die Fussschraube w_3, seine Drehaxe aber in die Richtung w_1 w_2 der beiden übrigen Schrauben des Dreifusses zu stehen kommt. Bringt man nun mit den Schrauben w_1 und w_2 die Libelle auf der Drehaxe und durch w_3 die Libelle auf dem Fernrohre zum Einspielen, so muss die Alhidadenaxe lothrecht und folglich der Kreis wagrecht stehen, wenn, wie hier angenommen, der Theodolith fehlerfrei gearbeitet und ganz und gar berichtigt ist. Wollte man die Libelle auf dem Fernrohre zur Horizontalstellung nicht benützen, oder wäre sie gar nicht vorhanden, so brauchte man auch nicht den Vertikalkreis auf Null zu stellen (weil dadurch doch bloss die Fernrohraxe eine senkrechte Richtung zur Alhidadenaxe erhält), sondern würde sofort die Drehaxe in der Richtung w_1 w_2 und die Libelle o zum Einspielen bringen und sich hierauf durch eine halbe Umdrehung der Alhidade, wobei also die Drehaxe wieder in der Richtung w_1 w_2 steht, überzeugen, ob wirklich die Dreh- und Libellenaxe mit der Alhidadenaxe einen rechten Winkel bilden, was der Fall ist, wenn nach jener halben Drehung die Luftblase wieder einspielt.[1] Steht nunmehr der Kreis in der Richtung w_1 w_2 wagrecht, so gibt man der Drehaxe eine zu dieser Richtung senkrechte Stellung, indem man sie durch eine Viertelsdrehung der Alhidade über die Fussschraube w_3 bringt. Mit dieser Schraube wird die Libellenaxe auch in dieser Richtung wagrecht gestellt, und nachdem dieses geschehen, überzeugt man sich abermals von der winkelrechten

[1] Sollte sich hiebei ein Ausschlag der Blase ergeben, so würde er auf eine schiefe Stellung der Dreh- und Libellenaxe gegen die Alhidadenaxe deuten und müsste nach §. 141 halb an einer der Fussschrauben w_1 oder w_2 und halb an der Drehaxe verbessert werden, vorausgesetzt, dass diese mit der Libellenaxe parallel ist.

Lage der Dreh- und Alhidadenaxe durch eine halbe Umdrehung der Alhidade, wie vorhin. Da durch die Horizontalstellung in der zweiten Richtung die wagrechte Lage der ersten etwas verändert worden seyn kann, so führt man die Alhidade nochmals um 90⁰ in ihre erste Stellung zurück und sieht zu, ob die Libelle einspielt oder nicht: im ersteren Falle steht der Kreis richtig, im letzteren wiederholt man das ganze Verfahren so lange, bis sich bei ganz langsamer Drehung der Alhidade die Luftblase der Libelle nicht mehr von ihrer Stelle bewegt.

Nunmehr kann, wenn die Beleuchtung der in den Winkelschenkeln stehenden Signale günstig ist, die Messung des Winkels durch Wiederholung beginnen. Man kann hiebei den Alhidadenkreis auf Null einstellen oder nicht. Will man, dass die erste Ablesung a am Nonius I null ist, so bringe man den Nullpunkt dieses Nonius nahe an den Nullpunkt der Theilung, klemme die Alhidade am Horizontalkreise mittels der Bremsschraube q'' fest und stelle durch die Mikrometerschraube r'' unter Benützung der Lupe die Nullpunkte genau auf einander. Auf den übrigen drei Nonien muss selbstverständlich abgelesen werden, da man nicht annehmen darf, dass ihre Nullpunkte beziehlich genau auf 90⁰, 180⁰, 270⁰ stehen. Alsdann lüfte man durch die Bremsschraube q' den Horizontalkreis und drehe diesen mit der Alhidade so weit, dass das Fernrohr nach dem Signal L im linken Schenkel steht. Nun ziehe man die Schraube q' wieder an und bringe das Fadenkreuz des Fernrohrs durch die Mikrometerschrauben r' und r zur genauen Deckung mit einem bestimmten Punkte des Signales L. Nachdem dieses geschehen, löse man die Alhidade von dem feststehenden Horizontalkreis, führe sie nach dem Signale R im rechten Schenkel und stelle das Fernrohr auf eine bestimmte Stelle dieses Signals genau ein. Will man die Grösse des zu messenden Winkels schon jetzt annähernd erfahren, um darnach am Schlusse der Messung die Anzahl (m) der Ueberschreitungen des Limbus-Nullpunkts durch die verschiedenen Nonien zu beurtheilen, so lese man einen der Nonien, am besten den ersten, ab und schreibe das Ergebniss dieser Ablesung auf. Die nächste Arbeit besteht in der Lüftung der Bremsschraube q', der Drehung des Horizontalkreises sammt Alhidade, bis das Fernrohr wieder in die Richtung des linken Schenkels kommt, der Klemmung des Horizontalkreises und der Einstellung des Fadenkreuzes mit Hilfe der Schrauben r' und r. Darauf folgt wieder die Lösung der Alhidade, ihre Drehung nach rechts und das Einstellen der Visirlinie auf das Signal R. Die beiden letzten Operationen werden so oft vorgenommen, als man den Winkel repetiren will. Am Ende der letzten (n ten) Wiederholung liest man alle vier Nonien ab und bemerkt die Ablesungen in derselben Weise wie die ersten. Da man den einfachen Winkel schon annähernd kennt, so lässt sich leicht bestimmen, wie gross die Zahl m für jeden Nonius ist, und es ergibt sich somit der gesuchte Winkel nach Gleichung (97) zunächst für jeden Nonius, und hierauf, wenn man aus diesen vier Ergebnissen das Mittel nimmt, für alle Nonien.

Da durch diese Messung der Einfluss der Excentricität des Fernrohrs, wenn sie vorhanden ist, nicht beseitigt wird, so wiederholt man dieselbe in der eben beschriebenen Weise, nachdem man vorher das Fernrohr durchgeschlagen oder, wie man sich ausdrückt, von der „ersten“ in die „zweite Lage“ gebracht hat. Dieser Umstand wird bei der Aufschreibung, welche in nachfolgender Weise geschehen kann, ebenfalls bemerkt.

Standpunkt: Signal S.

Messung mit dem Fernrohr in der ersten Lage.

Nonius.	Anfang.			Ende.			Einfacher Winkel.			Bemerkungen.
	Grad.	Min.	Sek.	Grad.	Min.	Sek.	Grad.	Min.	Sek.	
I.	0	0	0	265	58	45	62	35	45	Wiederholungen: 10.
II.	90	0	10	355	58	53	—	—	—	Beleuchtung: gut.
III.	180	0	0	85	58	47	—	—	—	Himmel: heiter. Luft: rein.
IV.	269	59	55	175	58	40	—	—	—	Wind: schwach.

Da der einfach gemessene Winkel 62° 35′ 45″ beträgt und 10 Wiederholungen gemacht wurden, so ist nach Gleichung (97) für die Nonien I und II die Zahl $m = 1$ und für die Nonien III und IV $m = 2$; daher für

Nonius der Winkel

I $$w = \frac{360^0 + 265^0\,58'\,45'' - 0^0\,0'\,0''}{10} = 62^0\,35'\,52'',5$$

II $$w = \frac{360^0 + 355^0\,58'\,53'' - 90^0\,0'\,10''}{10} = 62^0\,35'\,52'',3$$

III $$w = \frac{720^0 + 85^0\,58'\,47'' - 180^0\,0'\,0''}{10} = 62^0\,35'\,52'',7$$

IV $$w = \frac{720^0 + 175^0\,58'\,40'' - 269^0\,59'\,55''}{10} = 62^0\,35'\,52'',5$$

und für alle Nonien zusammen bei der ersten Lage des Fernrohrs der Winkel

$$w_1 = 62^0\,35'\,52'',5.$$

Ergäbe eine zehnmalige Wiederholung des Winkels bei der zweiten Lage des Rohrs

$$w_2 = 62^0\,35'\,58'',3,$$

so wäre der richtige, von jeder Excentricität befreite Winkel

$$w = \tfrac{1}{2}\,(w_1 + w_2) = 62^0\,35'\,55'',4.$$

Die Messung der Vertikalwinkel geschieht wie bei dem einfachen Theodolithen.

§. 141. **Prüfung und Berichtigung.** Am Repetitions-Theodolithen hat man, mit Ausnahme einer einzigen, dieselben Untersuchungen vorzunehmen, welche für den einfachen bereits in den §§. 137 und 138 besprochen wurden; wir brauchen daher hier nur Weniges zu bemerken.

1) Die Untersuchung der Libellen ist hier leichter als bei dem früher beschriebenen einfachen Theodolithen; denn sowohl die auf dem Fernrohre als die auf dessen Drehaxe stehende Libelle lässt sich umsetzen. Man wendet daher auf beide das in §. 39 erörterte Prüfungsverfahren an.

2) Ob die Visirlinie des Fernrohrs zu dessen Drehaxe senkrecht steht, erfährt man entweder auf die in §. 137 Nr. 2 angegebene oder auch auf die folgende Weise, welche vor jener den Vorzug hat, dass sie auf einem kleinen Raum vorgenommen werden kann, aber voraussetzt, dass man ausser dem Theodolithenfernrohr noch zwei andere mit Fadenkreuzen versehene Fernrohre hat. Stellt man in jedem dieser zwei Fernrohre das Fadenkreuz genau in die Bildebene des Objectivs, so tritt das von dem Fadenkreuz kommende Licht parallel mit der optischen Axe aus dem Objectiv, und es kann folglich das Fadenkreuz selbst durch ein zweites Fernrohr gesehen werden, dessen Objectiv diese Parallelstrahlen aufnimmt. Man stelle nun die beiden Fernrohre in einiger Entfernung von einander so auf, dass das Fadenkreuz des einen das Fadenkreuz des anderen genau deckt. In diesem Falle liegen die Visirlinien beider Rohre in einer geraden Linie. Hierauf bringe man den zu untersuchenden Theodolithen so zwischen beide Fernrohre, dass die Visirlinie seines Fernrohrs mit der des ersten Hilfsfernrohrs zusammenfällt, was der Fall ist, sobald dessen Fadenkreuz von dem Fadenkreuz des Theodolithenfernrohrs gedeckt wird. Diese Operation verursacht zwar einige Mühe, indem man den Theodolithen mehrere Male höher und tiefer stellen oder seitwärts verrücken muss, aber sie erfordert doch im Ganzen nicht mehr Zeit als das früher angegebene Verfahren. Wenn nun die Visirlinie des Fernrohrs zu dessen Drehaxe senkrecht steht, so muss das Fadenkreuz des Theodolithenfernrohrs, nach dem Durchschlagen des letzteren, auch das Fadenkreuz des zweiten Hilfsfernrohrs decken. Findet diese Deckung nicht statt, so ist, wie leicht zu beweisen, die Hälfte der angezeigten Abweichung an dem Fadenkreuz des Theodolithenfernrohrs durch die Stellschräubchen z, z und die übrige Hälfte an der Alhidade durch die Mikrometerschraube r'' zu verbessern. Wenn nach dieser ersten Verbesserung die Fadenkreuze des Hauptrohrs und des zweiten Hilfsfernrohrs sich decken, so führt man das zu untersuchende Fernrohr nochmals in die erste Lage zurück und überzeugt sich von dem jetzigen Stande der Fadenkreuze gegen einander. Eine sich kundgebende Abweichung berichtigt man wie vorhin. Nach einigen Versuchen wird das Theodolithenfernrohr in der ersten und zweiten Lage keine Abweichung mehr zeigen und also eine zur Drehaxe senkrecht stehende Visirlinie haben.

3) Da bei dem Ertel'schen Repetitions-Theodolithen eine Libelle auf der Drehaxe des Fernrohrs steht, so gilt für die Untersuchung der Lage der Drehaxe gegen die Alhidadenaxe das zweite der in Nr. 3 des §. 137 beschriebenen Verfahren. Der von der Libelle angezeigte Fehler wird zur Hälfte durch die Stellschräubchen α, α des einen Zapfenlagers und halb durch die Fussschrauben beseitigt, indem man nach Erforderniss jenes Lager

und den Alhidadenkreis ein wenig hebt oder senkt. Die Wirkungsweise der Schräubchen α, α ist so einfach, dass eine nähere Erklärung derselben überflüssig erscheint.

4) Was die Bestimmung und Beseitigung des Collimationsfehlers der Nonien am Vertikalkreise betrifft, so gilt hier Alles, was darüber in Nr. 4 des §. 137 mitgetheilt wurde. Dasselbe gilt für §. 138 hinsichtlich der Untersuchung der Theilungs- und Excentricitätsfehler.

5) Die besondere Prüfung, welche dem Repetitionstheodolithen im Vergleich mit dem einfachen zukommt, bezieht sich auf die gegenseitige Stellung der Axen der Alhidade und des Horizontalkreises. Diese Axen sollen bekanntlich zusammenfallen und auf den Ebenen der Kreise senkrecht stehen. Fallen sie nicht zusammen, so sind sie entweder parallel oder nicht: in beiden Fällen findet eine Excentricität der Alhidade statt, und in letzterem Falle kommt zu dieser Excentricität noch die schiefe Lage des Limbus gegen den Alhidadenkreis. Daraus entspringt zunächst ein kleiner Fehler im Ablesen und hierauf ein zweiter grösserer dadurch, dass bei der Drehung des Horizontalkreises mit der Alhidade die Axe der letzteren, welche anfänglich lothrecht stand, in eine schiefe Stellung kommt, welche sich nothwendig auch der Drehaxe des Fernrohrs mittheilt. Sobald aber diese Axe nicht mehr horizontal ist, beschreibt auch die Visirlinie des Fernrohrs keine Vertikalebene mehr und es wird folglich der zu messende Winkel nicht richtig projicirt. Dreht man bei einer Repetitionsmessung den Horizontalkreis nach und nach um 360°, so beschreibt offenbar die Alhidadenaxe, je nachdem sie die Limbusaxe schneidet oder nicht, eine Kegelfläche oder ein Hyperboloid um die Limbusaxe, und die Drehaxe des Fernrohrs neigt sich nach und nach gleich viel im entgegengesetzten Sinne gegen die zwei Hälften des Horizontalkreises. Setzt man daher die Repetition so lange fort, dass dieser Kreis ein, zwei oder drei Male ganz gedreht wird, so gleichen sich die aus der schiefen Lage der Drehaxe entstehenden Fehler untereinander fast ganz aus, während der Fehler im Ablesen, der aus dem schiefen Stande des Limbus hervorgeht, so unbedeutend ist, dass er vernachlässigt werden darf.

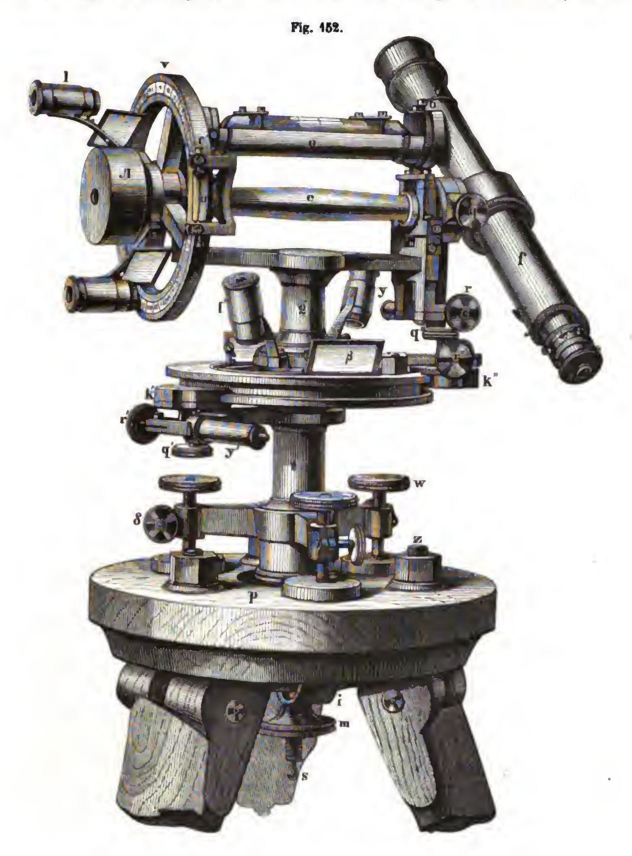
Wenn nun auch eine geringe Abweichung der Limbus- und Alhidadenaxe von der parallelen Lage wenig schadet — und nur eine geringe nehmen wir an — so ist es doch nicht überflüssig, zu untersuchen, ob der Theodolith eine solche Abweichung hat oder nicht. Zu dem Ende stelle man die Alhidadenaxe auf die im vorigen Paragraphen angegebene Weise genau lothrecht und drehe hierauf den Horizontalkreis sammt der Alhidade um 180°. Zeigt sich nach dieser Drehung ein Ausschlag an der Libelle, so entspricht dieser dem doppelten Neigungswinkel der Limbus- und Alhidadenaxe in der Projection auf eine Ebene, welche durch die Drehaxe des Limbus und die Libellenaxe geht. Wiederholt man dieses Verfahren in mehreren Richtungen, so erfährt man für jede derselben die Projection des Neigungswinkels der genannten beiden Axen. Beobachtet man hiebei die Horizontalwinkel, welche die verschiedenen Richtungen der Libellenaxe mit

einander bilden, so kann man hieraus und aus den bekannten Projectionen die gegenseitige Lage der Axen im Raume durch Rechnung ableiten.

Repetitionstheodolith von Ertel mit excentrischem Fernrohr.

§. 142. Der vorher beschriebene Repetitionstheodolith erfordert, um das in der Mitte angebrachte Fernrohr durchschlagen zu können, einen

Fig. 152.



ziemlich grossen Abstand der Drehaxe dieses Rohrs von dem Horizontalkreise, und damit eine beträchtliche Constructionshöhe. Diese lässt sich aber vermindern, wenn man das Fernrohr ausserhalb der Alhidadenaxe anbringt, wie es bei Ertel und Sohn dahier in neuerer Zeit bei den kleinen Wiederholungskreisen geschieht, die in grosser Zahl für ausländische Vermessungen anzufertigen sind.

Fig. 152 stellt einen solchen Theodolithen dar, und eine einfache Vergleichung desselben mit dem in Fig. 150 und 151 abgebildeten und in §. 139 beschriebenen Repetitionstheodolithen zeigt, dass der Unterschied beider lediglich in der verschiedenen Stellung des Fernrohrs und der dadurch bedingten Abänderung der Fernrohrträger liegt. Wir werden desshalb hier auch lediglich diesen Unterschied in's Auge fassen, und zwar nur in Bezug auf den Gebrauch des Instruments, da der so wenig veränderte Bau im Hinblicke auf die Paragraphen 139—141 keiner Erläuterung bedarf.

Handelt es sich um die Messung eines Horizontalwinkels und ist der Theodolith centrisch über den Scheitel und hierauf horizontal gestellt worden, so wird man mit der ersten Lage des Fernrohrs nacheinander die Signale im linken und rechten Winkelschenkel anvisiren und aus den Ablesungen a', a'' den Winkel w' erhalten, welcher um den Einfluss der Excentricität der Visirlinie (Gl. 93) von dem zu messenden Winkel w abweicht. Schlägt man nun das Fernrohr durch und stellt es in dieser zweiten Lage wieder zuerst auf das linke, dann auf das rechte Signal ein, so werden die beiden Ablesungen a_1, a_2 einen Winkel w'' liefern, welcher von dem wahren Winkel w wiederum um den Betrag des Einflusses der Excentricität der Visirlinie abweicht. Diese Abweichung ist der vorigen an Grösse gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt. Es wird folglich die Summe der beiden beobachteten Horizontalwinkel $w' + w'' = 2w$ und daher

$$w = \tfrac{1}{2}(w' + w''),$$

wie bereits in §. 125 nachgewiesen ist. Wollte man den Winkel w nur einseitig messen, so würde man einen Fehler begehen, der durch die Gleichung (94)

$$w - w' = 206265'' \,.\, e\left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right)$$

ausgedrückt ist, in welcher l, l' die Länge der Winkelschenkel und e den Abstand der Fernrohraxe von der Alhidadenaxe (die Excentricität der Visirlinie) vorstellt.

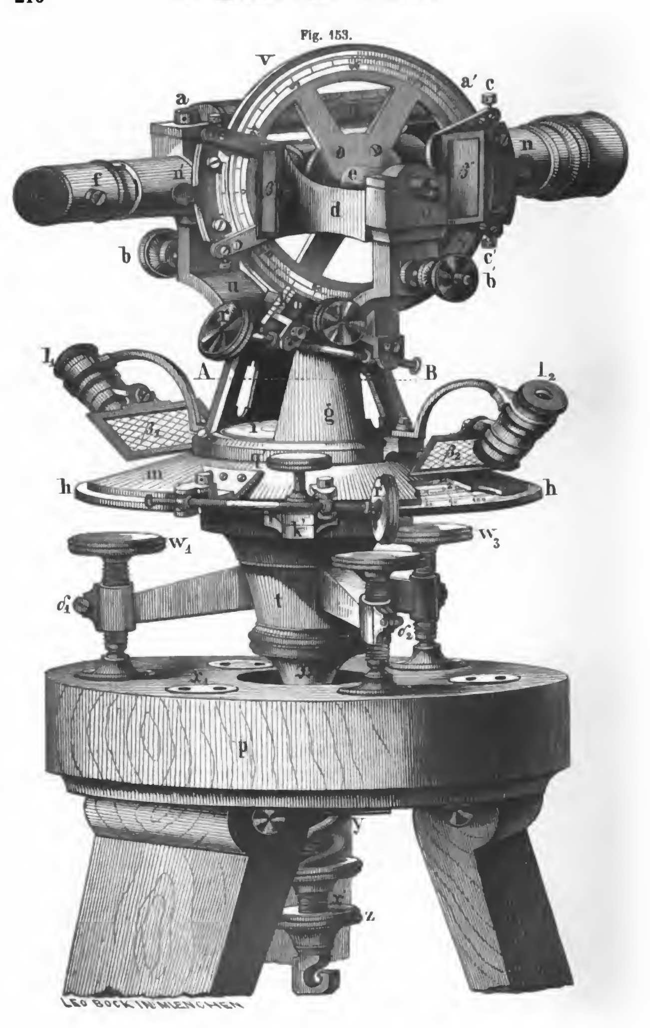
Es kann scheinen, als ob ein Theodolith mit excentrischem Fernrohr bei der Horizontalwinkelmessung mehr Arbeit veranlasst als einer mit centrischem Fernrohre; dieses ist aber desswegen nicht der Fall, weil man auch mit letzterem einen Winkel mit den beiden Lagen des Fernrohrs misst, um den Einfluss einer allenfallsigen Excentricität der Visirlinie auf das Messungsresultat zu beseitigen.

Grubentheodolith von Breithaupt.

§. 143. **Einrichtung.** Der Hängecompass, welcher auf Seite 178 abgebildet und beschrieben ist, gewährt wie die Feldbussole nur eine geringe Genauigkeit der damit aufgenommenen Winkel. Man sollte ihn daher nur da anwenden, wo entweder ein mit Stativ versehenes Winkelmessinstrument nicht wohl aufzustellen ist, oder wo es sich nur um geringfügige Markscheidungen handelt. Dagegen sind für grössere Arbeiten und wo es die Oertlichkeit nur irgend erlaubt, die Grubentheodolithen geeignet, welche in neuerer Zeit von verschiedenen Mechanikern, namentlich von F. W. Breithaupt in Cassel, angefertigt werden. Ein solcher Theodolith unterscheidet sich von einem andern nur dadurch, dass er in der Regel mit einer Bussole verbunden und in diesem Falle keiner seiner Bestandtheile aus Eisen oder Stahl ist. Man hat die Grubentheodolithen auch schon zum Repetiren der Winkel eingerichtet; es reicht aber ein guter einfacher Theodolith für alle Fälle, auch für die umfangreichsten bergmännischen Messungen, aus. Wir werden daher auch nur einen der letzteren Art näher betrachten. Fig. 153 stellt die Ansicht eines einfachen Grubentheodolithen von Breithaupt mit abgenommener Bussole und Fig. 154 den oberen Theil desselben mit aufgesetzter Bussole vor. Um das ganze Instrument sich richtig vorzustellen, braucht man nur die zweite Figur mit der Linie A B auf die erste gesetzt zu denken. Wir haben die Fig. 153 bereits in §. 135 bei der Beschreibung des einfachen Theodolithen benützt, sie ist aber nach dem für unseren Gebrauch bestimmten Grubentheodolithen der Münchener polytechnischen Schule angefertigt. Es versteht sich sonach von selbst, dass auch die zu Fig. 143 gehörige Fig. 144 den Durchschnitt des Grubentheodolithen vorstellt.

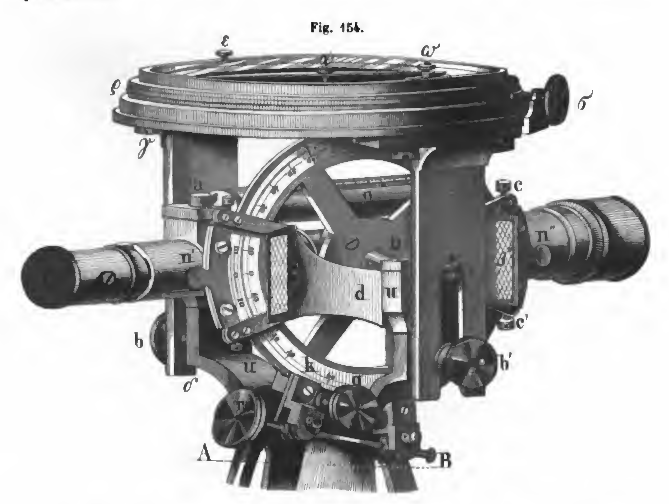
Der eben erwähnten Beschreibung des Breithaupt'schen Theodolithen, auf welche wir uns hier beziehen, sind nur wenige Bemerkungen beizufügen. Der Horizontalkreis des hier abgebildeten Grubentheodolithen hat $4\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser und ist unmittelbar in halbe Grade oder 720 gleiche Theile getheilt; 29 solcher Theile sind 30 Theilen des Nonius gleich, also beträgt dessen Angabe 1 Minute. Das Fernrohr ist bloss 10 Zoll lang und die Oeffnung seines Objectivs beträgt 10 Linien. Das astronomische Ocular gibt eine zwanzigmalige Vergrösserung. Die Drehaxe des Fernrohrs, alle Zapfen, Schrauben und Federn sind hier nicht von Stahl, sondern von Messing oder Rothguss, und die Theilungen der Kreise und Nonien befinden sich nicht auf eingelegten Silberstreifen, sondern sind bloss versilbert. Die Bussole, welche mit dem Theodolithen verbunden werden kann, besteht aus zwei Theilen: dem Compass und seinem Aufsatze. Der erstere ist in Fig. 136 abgebildet und in §. 128 beschrieben; der letztere aber ist weiter Nichts als eine cylindrische Schale (ϱ) von 4 Zoll Weite und $\frac{1}{2}$ Zoll Tiefe, in die sich der Compass einsetzen lässt und welche mittels zweier Füsse (δ, δ) auf die Zapfen der Drehaxe des Fernrohrs gesetzt und durch die Schrauben b, b' an den Armen u, u der Tragsäule g festgehalten werden kann. In

Fig. 153.


V
a
a′
c
f
n′
n
d
e
b
c′
b′
u
l_1
A
B
l_2
g
m
h
h
w_1
w_3
δ_1
t
δ_2
p
z
LEO BOCK IN MÜNCHEN

der Schale befindet sich ein Schräubchen, welches dazu dient, den Compass in ihr festzuhalten, sobald er die richtige Stellung hat, d. h. sobald seine zwölfte Stundenlinie oder der Durchmesser 0° — 180° mit der Fernrohraxe parallel ist.

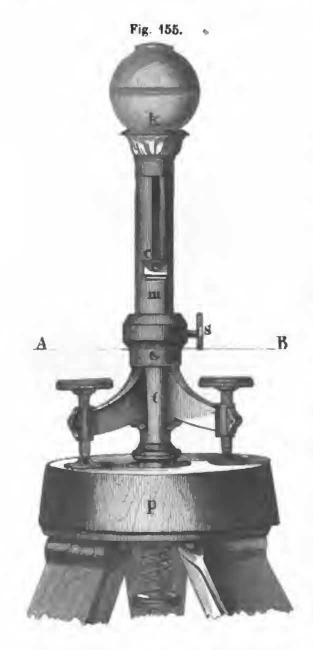
Fig. 154.



§. 144. **Gebrauch.** Die Aufstellung des Grubentheodolithen geschieht wie die des Feldtheodolithen, und was seinen Gebrauch betrifft, so setzt sich derselbe aus jenem des letztgenannten Instruments und der Bussole zusammen. Indem wir desshalb auf die §§. 123 und 136 verweisen, fügen wir den dort gegebenen Anleitungen noch folgende Bemerkungen bei.

1) Die Messung der Horizontal- und Vertikalwinkel in den finsteren Gruben erfordert andere Signale für die Visirrichtungen als jene sind, welche über der Erdoberfläche gebraucht werden. Es dienen dazu Lichter oder Lampen, welche man an den zu bezeichnenden Punkten lothrecht aufstellt. Manche Markscheider benützen zu dieser Aufstellung Stative, welche genau so wie die der Theodolithen gearbeitet sind und auf denen die bereits in §. 87 beschriebenen, hier wiederholt abgebildeten Signale (Fig. 155) ruhen. Hat das Signal an einer Stelle seine Dienste gethan und ist von seinem Standpunkte aus ein zweiter Winkel zu messen, welcher mit dem ersten einen Schenkel gemein hat, wie es bei Vielecken der Fall ist, so lässt man die Stative stehen und verwechselt bloss den Theodolithen mit dem Grubensignale, worauf die Messung des zweiten Winkels beginnen kann. In

Fig. 155.



gleicher Weise verfährt man mit den übrigen Winkeln eines ganzen Markscheidezugs.

2) Einfacher als das Stativ und der Dreifuss ist die Einrichtung des Untersatzes, welche (nach Fig. 157) bloss aus einem Metalldorn besteht, der mit einer Baumschraube in einem Balken oder Markscheidebock befestigt wird; und statt der Lampe mit Milchglas kann man auch eine nach Fig. 156 aus roth und weiss gefärbtem durchscheinendem Papier angefertigte Zielscheibe benützen, hinter der ein Wachs- oder Stearinlicht brennt, und welche auf dem Zapfen f des Untersatzes befestigt werden kann.

3) Es versteht sich wohl von selbst, dass man die mit dem Theodolithen verbundene Bussole zu keinen anderen Winkelmessungen benützt als zu jenen, durch welche man das Streichen einer Linie oder deren Neigungswinkel gegen die Magnetlinie erfährt. Um diese Streichwinkel mit der grössten möglichen Genauigkeit zu erhalten, misst man dieselben zweimal in der ersten und eben so oft in der zweiten Lage des Fernrohrs, indem man bei jeder Lage des Rohrs nach der ersten Ablesung am Nordende der Magnetnadel die Bussole abhebt und umsetzt. Man wird sich mit Hilfe der §§. 123 und 136 leicht selbst klar machen können, dass das Umsetzen der Bussole den fehlererzeugenden Einfluss einer excentrischen Nadel und das Durchschlagen des Fernrohrs die Einwirkung jenes Fehlers auf die Winkelmessung beseitigt, welche bei einseitiger Beobachtung aus der schiefen Stellung der zwölften Stundenlinie oder des Durchmessers 0^0 — 180^0 gegen die Visirlinie des Fernrohrs hervorginge. Ueberdiess wird durch diese Art der Messung die Wirkung aller übrigen Unvollkommenheiten des Instruments oder der Beobachtung vermindert.

§. 145. **Die Prüfung und Berichtigung** des Grubentheodolithen wird selbstverständlich auf freiem Felde vorgenommen und geschieht am Horizontal- und Vertikalkreis ganz nach der in §. 137 gegebenen Anleitung, während die Bussole für sich nach §. 124 und ihre Verbindung mit dem Theodolithen auf folgende Weise untersucht wird. Es kann sich nämlich, wenn der Compass richtig ist, nur noch darum handeln, zu erfahren, ob die zwölfte

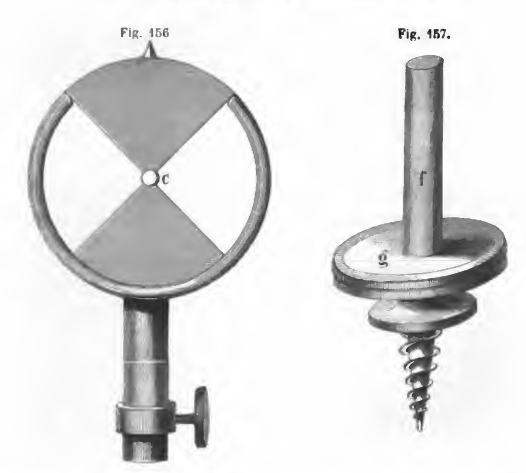


Fig. 156 Fig. 157.

Stundenlinie mit der Visirlinie des Fernrohrs in einer Ebene liegt, und wenn es nicht der Fall ist, beide in eine Ebene zu bringen.

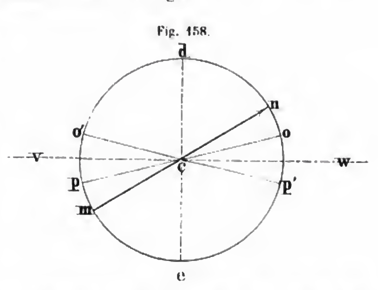


Fig. 158.

Angenommen, es sey op in Fig. 158 die zwölfte Stundenlinie, vw die Visirlinie des Fernrohrs, mn die Magnetnadel der Bussole und de die Drehaxe des Fernrohrs, welche zur Visirlinie senkrecht steht: so wird der Streichwinkel der Linie vw in der ersten Lage des Fernrohrs durch den Bogen on gemessen, während es durch den Bogen wn geschehen sollte. Schlägt man hierauf das Fernrohr durch und setzt die hiebei abgehobene Bussole in ihrer ursprünglichen Lage wieder auf, so wird, wenn das Fernrohr wieder in die Richtung vw eingestellt ist, der Punkt d in e, e in d, o in o', p in p', die Nadel aber nach mn stehen. Folglich liest man jetzt am Nordende der Nadel den Bogen $o'p'n = 180^0 + p'n$ als den Streichwinkel der Linie vw ab. Der Bogen p'n ist aber, wie man an der Figur sieht, gerade um so viel grösser als der richtige Bogen wn, als der vorhin abgelesene Bogen on kleiner ist: darum gibt das arithmetische Mittel aus den Bögen on und p'n den gesuchten Streichwinkel ncw. Man muss

desshalb zur Berichtigung der Bussole nach Oeffnung der Schraube σ den Compass in seiner Schale ρ so weit vor- oder rückwärts drehen, bis die Nadel den eben gefundenen Streichwinkel genau anzeigt, und alsdann die Schraube wieder schliessen.

Grubentheodolith von Junge.

§. 146. Unter dem Namen „Markscheidergoniometer" hat Prof. Junge in Freiberg in neuerer Zeit einen Grubentheodolithen (ohne Vertikalkreis) construirt, der den Hängecompass in dem Falle ersetzen soll, wenn die Magnetnadel wegen vorhandener Eisenmassen oder eisenhaltiger Gesteine ihre Dienste versagt. Die Abbildung und Beschreibung dieses Instruments enthält der Jahrgang 1861 der „Berg- und hüttenmännischen Zeitung," welcher wir das Folgende im Auszuge entnehmen.

Fig. 159.



Der neue Winkelmesser (Fig. 159) besteht zunächst aus einer Vorrichtung zum Visiren, welche von 2 Diroptern (i, k) und einem Fernrohre gebildet wird. Diese Vorrichtung ist durch ein gewöhnliches Scharnier mit den Trägern l, m verbunden und zum Durchschlagen eingerichtet. Die Diopter, welche an und für sich vor- und rückwärts zu visiren gestatten, werden nur für nahe gelegene Objekte (Signale) benützt. Die Träger l, m ruhen auf der Alhidade des Horizontalkreises n, welcher mit Hilfe der beiden diametral gestellten Nonien die Winkel bis auf 1 Minute abzulesen gestattet. Grobe und feine Drehung des Alhidadenkreises werden durch die Klemme und Mikrometerschraube bei a bewirkt. Die gleichnamige Vorrichtung a' wirkt auf den Horizontalkreis selbst und dient zur Messung der Winkel durch Repetition. (Wir halten diese Einrichtung an einem Instrumente von geringer Genauigkeit,

wie das vorliegende doch nur seyn kann und will, für überflüssig). Horizontal- und Alhidadenkreis nebst Fernrohr und Libelle (q) werden von einem Dreifusse (o, p) getragen, der in ein Gehäuse (uv) eingeschlossen ist, aus dem er nicht herausfallen kann und an dem sich die Schraubenmutter r befindet, welche dazu dient, das Instrument auf einer Schraube e zu befestigen, welche entweder in eine Spreize b eingelassen oder wie in Fig. 160 mit einem eisernen Träger c verbunden ist, der von der Grubenzimmerung oder dem Gestein gehalten wird. Der Goniometer lässt sich auch, wenn es die Localität verlangt, in umgekehrter Stellung gebrauchen; statt der Libelle q muss dann aber eine andere (q'), die auf der Rückseite des Horizontalkreises angebracht und in der Zeichnung nicht sichtbar ist, zur Horizontalstellung angewendet werden.

Fig. 160.

Gebrauch, Prüfung und Berichtigung dieses Instrumentes bedürfen für den, welcher sich mit den vorher beschriebenen Theodolithen genauer vertraut gemacht hat, keiner weiteren Erörterung mehr.

§. 147. Ueber die Vorzüge seines Goniometers stellt Prof. Junge auf Grund der von ihm gemachten Erfahrungen folgende Behauptungen auf, die wir vorläufig nicht näher prüfen können, da uns das neue Instrument noch abgeht, nämlich:

1) Alle mit dem Compass ausführbaren markscheiderischen Operationen lassen sich auch mit dem Goniometer machen.

2) Dieser ist an allen Orten brauchbar, wo mit dem Compass gearbeitet werden kann; namentlich auch in Schächten von jeder beliebigen Neigung, wenn sie nicht gar zu enge sind.

3) Im Durchschnitte arbeitet man mit dem Goniometer so schnell als mit dem Compass; auf langen Strecken gewährt jener, auf kurzen dieser eine Zeitersparniss.

4) Die Genauigkeit der Winkelmessung mit dem Goniometer ist grösser als die mit dem Compass, und es können bei dem ersten Instrumente grobe Fehler nicht leicht vorkommen.

5) Der Goniometer lässt sich eben so leicht und bequem handhaben als der Compass; seine Aufstellung ist aber sicherer, weil er durch Schrauben auf festen Gegenständen gehalten wird.

6) Das Markscheiden mit dem Goniometer erfordert weniger Zeit als das mit einem auf einem Gestelle befindlichen Theodolithen.

7) Das Centriren des Theodolithen ist, wenn nicht besondere Teller als Untersetzer gebraucht werden, sehr mühsam und ungenau.

8) Mit dem Theodolithen kann man nur auf weiten und bequemen Strecken, mit dem Goniometer aber auf allen überhaupt zugänglichen Orten markscheiden.

9) Das Markscheiden mit dem Theodolithen in Schächten ist mit den bis jetzt in Vorschlag gekommenen Hilfsapparaten kaum oder doch nur sehr beschränkt möglich.

10) Die Aufstellung des Theodolithen in Gruben ist unsicher und der Markscheider stets der Gefahr ausgesetzt, ihn umzuwerfen.

Die Spiegelinstrumente.

§. 148. So wie es in Bergwerken oft nicht möglich ist, ein Winkelmessinstrument mit Stativ anzuwenden, so lässt sich auch in mehreren Fällen auf der Erdoberfläche kein fester Standpunkt für die Aufstellung eines Theodolithen oder einer Bussole gewinnen. Dergleichen Fälle treten z. B. ein, wenn von einem Schiffe aus der Höhenwinkel eines Sterns, oder von dem schwankenden Boden eines natürlichen Signals aus der Winkel zweier Richtungen gemessen werden soll. Unter solchen Verhältnissen kommt es darauf an, dem Messinstrumente eine Einrichtung zu geben, welche die Bestimmung des Winkels durch einmaliges Zielen möglich macht, wobei die Hand des Beobachters das Stativ vertritt und wozu ein einziger ruhiger Augenblick hinreicht, die Messung zu vollenden. Diese Einrichtung gewähren zwei Spiegel oder Prismen, welche auf einer Ebene senkrecht stehen und sich ihre spiegelnden Flächen zuwenden. Zwei bereits betrachtete Instrumente dieser Art, welche zur Absteckung von rechten Winkeln und geraden Linien dienen, der Winkelspiegel und das Prismenkreuz, mögen eine vorläufige Vorstellung von dem Wesen der Spiegelwerkzeuge geben. Die Einführung derselben in die Messkunst beginnt mit der Erfindung des Spiegelsextanten, den wir daher zunächst betrachten müssen.

Der Spiegelsextant.

§. 149. **Geschichtliches.** Als den Erfinder des nach seinen Hauptbestandtheilen benannten Spiegelsextanten sieht man gewöhnlich den ehemaligen Vicepräsidenten der Royal Society in London, John Hadley, an, weil er der erste war, welcher einen Spiegeloctanten anfertigen liess und eine Theorie und Beschreibung desselben veröffentlichte. Während aber Dieses im Jahr 1731 geschah, fand man einige Jahre später unter den nachgelassenen Papieren des inzwischen gestorbenen Hadley eine Handschrift von Newton aus früherer Zeit, welche die Zeichnung und Beschreibung eines von dem Hadley'schen Octanten nur wenig verschiedenen Instruments, mit Angabe seiner wesentlichsten Eigenschaften, und seine Anwendung zur Messung von Höhenwinkeln auf dem Meere enthielt. Es ist also Newton als

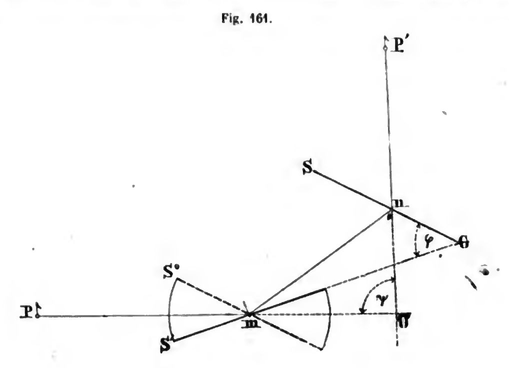
der eigentliche Erfinder des Spiegeloctanten und des darnach gebildeten Sextanten zu betrachten. Hadley aber als derjenige, welcher ihn zuerst ausgeführt hat. Damit ist übrigens noch sehr wohl die Annahme, welche Einige machen, vereinbar: dass dem geschickten Optiker Hadley zu der Zeit, als er seinen Octanten vorlegte, die Handschrift Newtons noch nicht bekannt war.

Wesentlich verbessert wurden die Sextanten durch den bekannten englischen Künstler Ramsden, welcher nicht bloss der Bewegung der Alhidade und des drehbaren Spiegels einen gleichmässigen und sicheren Gang verlieh, sondern, was die Hauptsache ist, den Limbus und Nonius durch seine neue Theilmaschine viel feiner und genauer theilte, als es früher möglich war. Der Spiegelsextant, anfangs ausschliesslich zu Messungen auf der See verwendet, wurde erst durch die Bemühungen des Mechanikers Brander in Augsburg und der Astronomen Zach und Brühl zu Messungen von Winkeln auf dem Lande tauglich gemacht. Es handelte sich dabei hauptsächlich darum, den Horizont, dessen man bei Messung von Höhenwinkeln bedarf und der dem Seefahrer durch den Meeresspiegel geboten ist, in geeigneter Weise zu ersetzen. Dieses geschah durch Einführung von besonderen Horizonten, wovon im §. 152 die Rede ist. Ausführliche theoretische Untersuchungen des Spiegelsextanten sind von Bohnenberger (Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung), von Encke (Berliner astron. Jahrbücher) und von Grunert (Beiträge zur Mathematik) vorhanden.

§. 150. **Theorie.** Einer der Sätze, worauf sich die Einrichtung des Spiegelsextanten gründet, ist bereits in §. 102 aufgeführt und bewiesen worden. Wir wissen demnach schon:

1) dass, wenn zwei ebene Spiegel (SG, S′G) auf einer Ebene senkrecht stehen und mit einander einen Winkel (φ) bilden, dieser Winkel halb so

Fig. 161.



gross ist als derjenige (ψ), welchen die auf einen Spiegel (S'G) zu jener Ebene parallel einfallenden Lichtstrahlen (Pm) mit den von dem zweiten Spiegel (SG) zurückgeworfenen Strahlen (P'n) einschliessen.

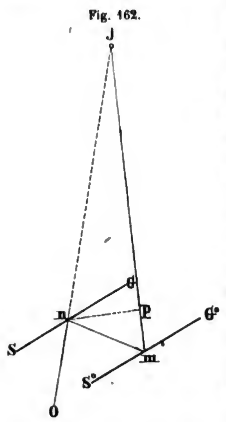
Man braucht also nur den Winkel φ zu kennen, um den Winkel ψ zu erfahren, den die Gegenstände P und P' mit dem Scheitel O bilden. Ist demnach der Winkel POP' auf dem Felde gegeben und lässt man auf den Spiegel S'G von dem Signale in P Licht fallen, so geht dieses von m nach n und von da in der Richtung nO zurück. In dieser Richtung liegt das Bild von P und man sieht es in O. Durch Drehung des Spiegels S' kann man es dahin bringen, dass $\varphi = \frac{1}{2}\,\psi$ wird, und wenn dieses der Fall ist, so liegt das Bild von P in dem Winkelschenkel OP', d. h. das Bild von P deckt das in P' stehende Signal.

Denkt man sich, dass der Spiegel S' vor seiner Drehung mit dem Spiegel S genau parallel gewesen sey, so ist klar, dass der Winkel S^0mS', um welchen er gedreht werden musste, um in die Lage S' zu kommen, bei welcher das Decken der Bilder stattfindet, dem Winkel φ der beiden Spiegel S und S' gleich ist. Hieraus folgt

2) dass der Winkel (ψ) des einfallenden und zweimal zurückgeworfenen Strahls doppelt so gross ist als der Drehwinkel (φ) des ersten Spiegels (S'), welcher am Anfang der Drehung dem zweiten Spiegel (S) parallel war.

Dieser Satz zeigt, wohin man den Nullpunkt der Theilung des Kreisbogens (B, Fig. 163) zu legen hat, nämlich in die Richtung mS^0, welche mit nS parallel ist. Es fragt sich nur, wie man mit Sicherheit die parallele Lage der beiden Spiegel erkennt. Denkt man sich aber die beiden Spiegel S und S^0 genau parallel gestellt und auf einen von ihnen (S^0) von einem ausserordentlich weit entfernten Gegenstande, etwa einem Stern, Licht fallend, so wird dieses in der Richtung Jm kommende Licht nach mn auf den Spiegel S und von dort in der Richtung nO zurückgeworfen. Das in O befindliche Auge erblickt also im Spiegel das Bild von J in der Richtung On, welche mit der des einfallenden Lichts (Jm) parallel ist, wie man sich leicht überzeugen kann. Nimmt man nun, wie es bei dem Spiegelsextanten der Fall ist, an, dass die Richtung On nur wenig von der Richtung Jm abweicht, so ist klar, dass wegen der angenommenen ausserordentlichen Entfernung des Punktes J beide Richtungen sich dort schneiden, d. h. dass der unendlich weit entfernte Gegenstand und sein Spiegelbild (J) sich decken, sobald die beiden Spiegel parallel sind. Kehrt man diesen Satz um, so lautet er so:

Fig. 162.

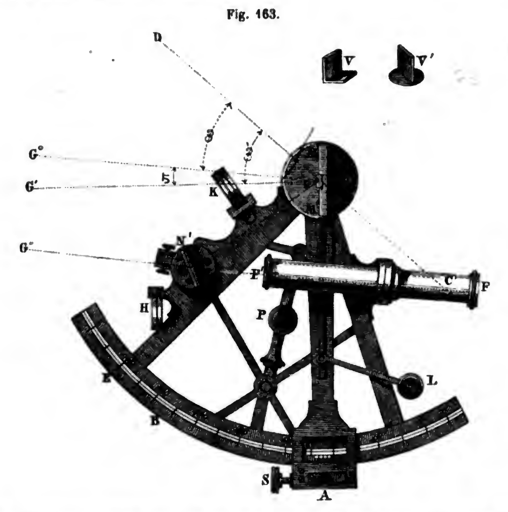


3) Wenn ein ausserordentlich weit entfernter hell-leuchtender Gegenstand (J) von zwei auf einer Ebene senkrecht stehenden ebenen Spiegeln (S, S^0) so abgebildet wird, dass das Bild ihn selbst deckt, so sind die beiden Spiegel zu einander parallel.

Nach dieser theoretischen Vorbereitung wird man die folgende Beschreibung des Baues der Spiegelsextanten leicht verstehen.

§. 151. **Einrichtung.** Die Fig. 163 stellt den Grundriss und Fig. 164 den Aufriss eines Spiegelsextanten dar.

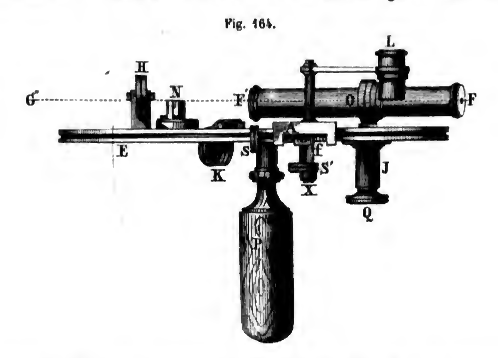
Fig. 163.



Der Körper desselben besteht aus einem Kreisbogen (B) von Messing, welcher etwas mehr als den sechsten Theil eines ganzen Kreises ausmacht und durch zwei Speichen und einige Querbänder mit dem Mittelstück (c) verbunden ist. In der Nähe des Schwerpunkts des Instruments kann ein Griff (P) eingeschraubt werden, um den Sextanten mit der Hand so zu halten, wie es die Beobachtung fordert. In dem Messingbogen ist ein Silberstreifen eingelegt, welcher den Limbus enthält. Dieser ist nach der Grösse seines Halbmessers mehr oder weniger fein getheilt. Bei 4 Zoll Halbmesser kann man den Grad in 6 Theile theilen. Jeder solche Theil stellt folglich nach §. 150 Nr. 2 10 Minuten des Drehwinkels und 20 Minuten des gemessenen Winkels vor. Um nicht erst den Drehwinkel mit 2 multipliciren zu müssen, zählt man auf dem Limbus sofort halbe Grade für ganze, so dass also da, wo 0^0, 5^0, 10^0, 15^0, 20^0 etc. zu stehen hätte, beziehlich 0^0,

10°, 20°, 30°, 40° etc. aufgeschrieben ist. Um eine zur Ebene des Limbus senkrecht stehende und durch dessen Mittelpunkt (C) gehende Axe dreht sich die Alhidade (CA), welche über den Körper des Sextanten hingleitet, wenn man sie bei A anfasst und schiebt. Diese Bewegung setzt aber voraus, dass man die Bremsschraube S′ der Klemme A vorher gelüftet habe. Ist diese Schraube angezogen, so kann die Alhidade nur noch fein gedreht werden, was mit der Mikrometerschraube S geschieht. Die Einrichtung dieser Schraube und des Halterwerks ist jener am Theodolithen ähnlich. In einem viereckigen Ausschnitte (40) der Alhidade befindet sich der in Silber ausgeführte Nonius, welcher in unserer Zeichnung durch die helle Stelle gegenüber der Zahl 40 angedeutet ist. Wenn der Grad des Drehwinkels auf dem Limbus in 6 Theile getheilt ist, so kann man die Länge von 59 solchen Theilen auf dem Nonius in 60 zerlegen und so den Drehwinkel bis zu 10, den gemessenen Winkel aber bis auf 20 Sekunden genau ablesen. Der

Fig. 164.



Nonius sowohl wie der Limbus haben eine Uebertheilung, deren Bedeutung für den Nonius schon früher (§. 72) auseinander gesetzt wurde, und deren Zweck für den Limbus bei der Bestimmung des Collimationsfehlers von selbst sich ergibt. Zur Erleichterung des Ablesens dient eine Lupe (L), welche von einem Stiele getragen wird, der sich um eine auf der Alhidade stehende Axe so drehen kann, wie es der zum Lesen erforderliche Stand der Lupe über dem Nonius bedingt. Die Alhidade trägt auf der Platte C, womit sie auf dem Körper des Sextanten liegt, einen vollkommen ebenen und parallelen Glasspiegel (MM′), welchen wir den grossen Spiegel nennen wollen. Seine Fassung ist mittels dreier Schräubchen auf der Alhidade angeschraubt und so eingerichtet, dass er senkrecht auf die Limbusebene gestellt werden kann. Die einfachste Vorrichtung für diesen Zweck, welche jedoch häufig, wie auch an dem abgebildeten Sextanten, fehlt, ist eine dünne Walze, welche parallel mit der Spiegelfläche zwischen

der Fassung (M) und der Alhidadenplatte (C), welche beide etwas ausgehöhlt sind, liegt und um die der Spiegel durch zwei Schräubchen etwas gedreht werden kann. Der kleine Spiegel (NN') ist mit seiner Fassung (R) auf eine der Speichen des Sextantenkörpers festgeschraubt. Mit Hilfe zweier Stellschräubchen und einer dünnen Walze kann er, wie der grosse drehbare Spiegel, zur Limbusebene senkrecht gestellt werden; und durch zwei andere Schräubchen, welche bei N' angezeigt sind, lässt er sich behufs der Berichtigung ein wenig seitwärts drehen. Ausserdem steht er immer fest. Das Fernrohr (FF'), welches an der zweiten Speiche so befestigt ist, dass es mit der Schraube Q parallel zur Ebene des Sextanten etwas gehoben und gesenkt werden kann, ist achromatisch und besitzt ein astronomisches Ocular mit einem aus zwei Fädenpaaren bestehenden Fadenkreuze, das somit um die optische Axe ein kleines Quadrat freilässt, in welchem die Bilder zur Deckung gelangen. Die untere Hälfte des Objectivs empfängt nach Fig. 164 Licht aus dem kleinen Spiegel, während die obere die Strahlen aufnimmt, welche von dem direct anvisirten Gegenstand (G") kommen. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass das halbe Objectiv eben so gut wie das ganze ein richtiges Bild gibt; nur ist es weniger hell, weil es von einer kleineren Lichtmenge erzeugt wird. Die Einschlaggläser (K, H) dienen dazu, den Glanz des Lichts zu mildern, wenn stark leuchtende Gegenstände anvisirt werden. Sie sind verschieden gefärbt und müssen parallel seyn, damit sie die Richtung der von dem grossen zum kleinen Spiegel oder von dem Gegenstande G" direct in das Fernrohr gehenden Strahlen nicht verändern. In unseren Figuren sind alle Gläser zurückgeschlagen. Es versteht sich von selbst, dass man von den drei Gläsern bei K oder von den zweien bei H nur eines oder zwei oder alle benützen kann. Ueberdiess lässt sich auch vor das Ocular des Fernrohrs bei F ein Sonnenglas anschrauben, wenn es nöthig ist.

Der Spiegelsextant bedarf keines Gestelles; gleichwohl kann er mit einem verbunden werden. Man wendet bei Messungen auf dem festen Lande ein Gestelle mit Vortheil dann an, wenn der Sextant sehr gross und folglich so schwer ist, dass bei längerem Beobachten der Arm, welcher ihn trägt, ermüdet. Dieses Gestelle muss eine horizontale und zwei vertikale Drehungen des Instruments gestatten, damit das Fernrohr sowohl nach jeder Richtung des Horizonts als auch, wenn der Körper des Sextanten von der wagrechten Lage in die lothrechte gebracht ist, in die zur Messung der Vertikalwinkel erforderlichen Richtungen gebracht werden kann. Es sind also drei Axen nöthig, wovon die eine lothrecht, die andere wagrecht und die dritte senkrecht auf der Sextantenebene steht, während jede Axe mit jeder anderen einen Winkel von 90° bildet. Eine dieser Axen wird auf dem Rücken des Sextantenkörpers parallel mit der Fernrohraxe und eine zweite auf der Kopfplatte des Gestelles festgeschraubt. Die erste Axe gestattet, die Sextantenebene in die Ebene des zu messenden Winkels zu bringen, und die zweite lothrecht stehende dient zur Horizontaldrehung des

Instruments. Die dritte Axe ist mit den beiden ersten senkrecht verbunden und dient hauptsächlich zur Bewegung des Sextanten in der Vertikalstellung, welche ihm die erste Axe verleiht.

§. 152. **Gebrauch.** Soll mit einem vollständig berichtigten Spiegelsextanten, wie wir ihn jetzt voraussetzen, ein Winkel (GCD) gemessen werden, der durch drei Punkte bezeichnet ist, die in einer beliebigen Ebene liegen, so halte man das Instrument so, dass der Mittelpunkt des Kreises in den Scheitel und die Visirlinie des Fernrohrs in den linken Schenkel des zu messenden Winkels zu liegen kommt. Alsdann öffne man die Bremsschraube S' an der vorher bis auf Null zurückgestellten Alhidade und führe diese mit der linken Hand langsam so weit vorwärts, bis man im Fernrohr neben dem Bild des direct angeschauten Gegenstands G, der in der Richtung FG'' liegt, auch das Bild des doppelt gespiegelten rechtseitigen Gegenstandes D erblickt. Nun ziehe man die Schraube S' an und bringe die beiden Bilder durch die Mikrometerschraube S zur vollständigen Deckung. Die hierauf erfolgende Ablesung gibt den gesuchten schiefen Winkel bis auf eine kleine Grösse π richtig, welche man die Schiefenparallaxe des Sextanten nennt und wie folgt finden kann.

Der zu messende Winkel ist $GCD = G'CD = \omega'$ und der einfallende Lichtstrahl DC macht, nachdem er das erste Mal in der Richtung CD und das zweite Mal nach RF' zurückgeworfen wurde, mit diesem Strahle den Winkel DC'R, welcher, wenn G^0C zu FG parallel gezogen wird, gleich $G^0CD = \omega$ ist. Der Sextant misst nur den Winkel DC'G des einfallenden und zweimal zurückgeworfenen Lichts; daher muss die Ablesung, welche den Winkel ω gibt, noch um den Winkel π vermehrt werden, damit der richtige Winkel ω' erhalten wird. Nun ist aber, wenn man von C auf FG eine Senkrechte $= a$ fällt, in dem rechtwinkeligen Dreiecke, dessen Hypotenuse $CG = l$ ist, der Winkel bei $G = \pi$ und daher $l \sin \pi = a$. Da a gegen l jederzeit sehr klein ist, so kann man

$$\pi = \frac{\sin \pi}{\sin 1''} = 206265 \cdot \frac{a}{l} \text{ Sekunden} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

setzen. Man sieht hieraus, dass die Schiefenparallaxe bei einem und demselben Instrumente nur von der Länge des linken Winkelschenkels abhängt und null wird, wenn dieser Schenkel ausserordentlich lang ist.

Der Winkel GCD, welcher so eben bestimmt wurde, kann in einer beliebigen, also auch in einer lothrechten Ebene liegen. Das Verfahren, ihn zu messen und zu verbessern, bleibt ganz genau dasselbe wie bisher, wenn man nur den unteren Schenkel als den linken betrachtet und daher das Fernrohr auf diesen richtet. Anders gestaltet sich aber das Verfahren zur Messung von Höhenwinkeln. Hier sind in der Regel nur zwei Punkte, welche einen einzigen Schenkel bestimmen, gegeben, während der dritte Punkt oder der zweite Schenkel erst so zu bestimmen ist, dass er mit dem gegebenen Schenkel in einer lothrechten Ebene liegt und den einfachen oder doppelten Höhenwinkel darstellt.

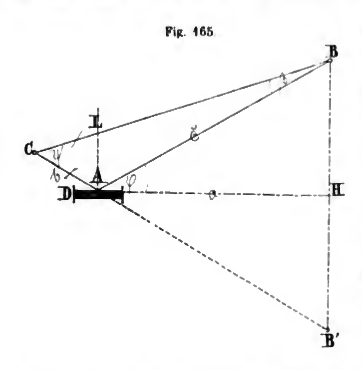
Dazu dienen die natürlichen und künstlichen Horizonte. Natürliche Horizonte bieten die Oberflächen von ruhig stehendem Wasser, Quecksilber oder Oel und auf dem Meere der grösste Gesichtskreis oder die Berührungsebene dar, welche vom Auge des Beobachters an den Wasserspiegel gelegt werden kann. Die ersteren natürlichen Horizonte werden indessen in anderer Weise benützt als der letztere. Während nämlich durch die Berührungsebene an den Meeresspiegel der wagrechte Schenkel des zu messenden Höhenwinkels unmittelbar gegeben ist, müssen die ruhig stehenden Oberflächen der genannten Flüssigkeiten (nach Fig. 165) den entfernten Endpunkt (B) des gegebenen Winkelschenkels (AB) wie in einem Spiegel abbilden und so einen zweiten Schenkel (AB′) erzeugen, welcher mit dem gegebenen einen Winkel (BAB′) einschliesst, der doppelt so gross ist als der gesuchte Höhenwinkel (BAH). Die natürlichen Horizonte aus Wasser, Quecksilber oder Oel werden, um sie gegen den Luftzug zu schützen, mit einem Glasdache bedeckt, dessen Gläser genau eben und parallel sind, um die Richtungen der Lichtstrahlen nicht zu verändern. Wasser wendet man selten an, weil bei längerem Gebrauch die Dünste desselben das Glasdach beschlagen; das Oel wird, wenn es als Horizont dienen soll, mit Kienruss vermengt; und das Quecksilber, welches in flachen eisernen Schalen steht, muss von Zeit zu Zeit mechanisch gereinigt werden.

Die künstlichen Horizonte bestehen in der Regel aus einer ebenen Glasplatte, welche auf der Rückseite geschwärzt oder mattgeschliffen ist und auf einer Vorrichtung liegt, welche gestattet, die spiegelnde Oberfläche des Glases mittels einer aufzusetzenden Röhrenlibelle wagrecht zu stellen. Da in Folge der matten oder schwarzen Rückseite des Glases die Spiegelung nur von der Vorderseite desselben ausgeht, so braucht nur diese sehr genau eben zu seyn; es ist aber nicht nöthig, dass sie mit der Rückenfläche parallel läuft. Statt des gewöhnlichen weissen Spiegelglases kann man auch roth, blau oder grün gefärbtes und hinten mattgeschliffenes Glas zu künstlichen Horizonten verwenden. Die Unterlage derselben wird ähnlich wie das Legebrett durch drei Stellschrauben bewegt, und die Horizontalstellung geschieht wie bei dem Messtische. Da der Rand der Glasplatten meist uneben ist, so benützt man ihn auch nicht zur Messung und bedeckt ihn desshalb entweder auf die Breite eines halben Zolles mit einem Ring von Pappdeckel oder schleift ihn auf diese Breite matt.

Um den Gebrauch des Sextanten zur Messung von Höhenwinkeln zu zeigen, wählen wir vorläufig eine geneigte kurze Linie AB (Fig. 165), damit die Strahlenbrechung der Luft keinen merkbaren Einfluss auf das Messungsresultat äussert. Später, bei der Messung der Vertikalwinkel, wird gezeigt werden, wie man auf dem festen Lande und auf dem Meere zu verfahren hat, wenn B sehr weit entfernt ist. Es sey A der künstliche oder natürliche Horizont und B′ das Bild von B, welches er hervorbringt. Ist AH wagrecht, so ist BB′ lothrecht, $BH = B'H$ und $BAH = \varphi$ der

gesuchte Höhenwinkel. Da man das Instrument nicht in A aufstellen kann, so muss man es vor A in C so halten, dass das Fernrohr auf das Bild B' gerichtet, der Körper des Sextanten lothrecht und der grosse Spiegel gegen B gewendet ist. Führt man die Alhidade von Null an langsam vorwärts und dreht man dabei mit der Hand den Sextanten um eine zum Fernrohr parallele Axe, so bringt man das doppelt gespiegelte Bild von B in das Gesichtsfeld des Fernrohrs. Sobald dieses der Fall ist, zieht man die Bremsschraube S' an und bewirkt eine vollständige Deckung dieses letzteren Bildes mit dem Bilde B', das der Horizont erzeugt hat. Die Ablesung, welche hierauf vorgenommen wird, liefert den Winkel $BCB' = \psi$. Um den gesuchten Höhenwinkel φ zu erhalten, bemerke man, dass für das Dreieck ABC der Aussenwinkel BAB' oder

Fig. 165



$$2\varphi = \psi + \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

und, wenn $AB = c$, $AC = b$ gesetzt wird:

$$\sin\beta = \frac{b}{c}\sin\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

ist. Die Berechnung des Winkels β, welcher die Höhenparallaxe des Sextanten heisst, erfordert ausser dem Abstande b, den man leicht messen kann, die Länge c der Linie AB. Diese ist aber eine Function von φ, indem $c\cos\varphi = AH = a$ ist. Die Grösse a findet man, wenn B ein irdischer Gegenstand ist, auch durch Messung. Man kann nun, da φ noch unbekannt ist, zur Berechnung von β vorläufig $\varphi = \frac{1}{2}\psi$ und daher

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\cos\frac{\psi}{2}\sin\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

setzen. Mit dem Werth von β, der sich hieraus ergibt, lässt sich der von φ nach Gleichung (105) verbessern und, wenn man es nöthig findet, mit diesem neuen Werth von φ der von β wiederholt nach Gleichung (107) berechnen.

In den meisten Fällen wird β nur ein sehr kleiner Winkel seyn, weil man den Sextanten möglichst nahe an den Horizont hält, während die Linie AB im Vergleich zu AC sehr lang ist. Ist aber β sehr klein, so geht die Gleichung (106) mit Rücksicht auf Gleichung (107) über in:

$$\beta = \frac{b\sin\psi}{c\sin 1''} = \frac{2b\sin\frac{1}{2}\psi\cos^2\frac{1}{2}\psi}{a\sin 1''}\ \text{Sekunden}; \quad . \quad . \quad (108)$$

und aus Gleichung (105) folgt der gesuchte Höhenwinkel

$$\varphi = \frac{1}{2}\psi + \frac{b \sin \frac{1}{2}\psi \cos^2 \frac{1}{2}\psi}{a \sin 1''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Wäre die Linie AB sehr lang, so müsste der Winkel $\frac{1}{2}\psi$ noch eine zweite Verbesserung wegen der Strahlenbrechung des Lichts durch die Luft erhalten; eine Verbesserung, die um so grösser wird, je kleiner φ ist und welche sogar einen halben Grad und mehr betragen kann.

Bei dem Gebrauch des Sextanten ist namentlich dann, wenn es sich um genaue Messungen handelt, darauf zu sehen, dass er, wie jedes feine Messinstrument, nicht zu lange ohne Unterbrechung der directen Einwirkung der Sonnenstrahlen ausgesetzt ist, weil dadurch nicht bloss die Theilungen des Limbus und Nonius, sondern auch in Folge der Ausdehnung der Fassungen die Spiegelebenen verändert werden können. Ferner soll man schon vor der Deckung der Bilder die Lupe so über den Nonius stellen, dass man sie beim Ablesen nicht mehr zu verrücken braucht, weil sonst leicht die Alhidade selbst eine geringe Verschiebung erleiden kann. Auch ist es gut, die Ablesung in der Lage des Sextanten zu machen, welche er bei der Beobachtung hatte; denn wenn man ihn behufs des Ablesens z. B. in die lothrechte Stellung bringt, so kann es leicht kommen, dass trotz der scharf angezogenen Bremsschraube bloss durch die Einwirkung des Gewichts der Alhidade der Nonius um 10 oder 20 Sekunden verrückt und folglich auch der Winkel um so viel falsch wird. Endlich muss man dafür sorgen, dass die beiden sich deckenden oder berührenden Bilder nahezu gleich hell werden, was durch Hebung oder Senkung des Fernrohrs geschehen kann, weil die Helligkeit der Bilder mit dem Theil der Objectivfläche sich ändert, der die Lichtstrahlen entweder aus dem kleinen Spiegel oder von dem direct gesehenen Gegenstand empfängt.

§. 153. **Prüfung und Berichtigung des Sextanten.** Vor dem Gebrauch des Spiegelsextanten hat man zu untersuchen:

1) ob der Limbus und Nonius richtig getheilt sind;
2) ob jedes der Spiegelgläser eben und parallel ist;
3) ob beide Spiegel auf der Sextantenebene senkrecht stehen;
4) ob die Fernrohraxe mit dieser Ebene parallel läuft;
5) ob ein Collimationsfehler stattfindet und wie gross er ist;
6) ob die Einschlaggläser eben und parallel sind.

Von diesen sechs Untersuchungen sind die beiden ersten und die letzte nur ein- für allemal, die übrigen aber von Zeit zu Zeit vorzunehmen; denn wenn die unter Nr. 1, 2, 6 angeführten Eigenschaften einmal vorhanden sind, so bleiben sie auch, während die in Nr. 3, 4, 5 erwähnten Stellungen und Lagen veränderlich sind.

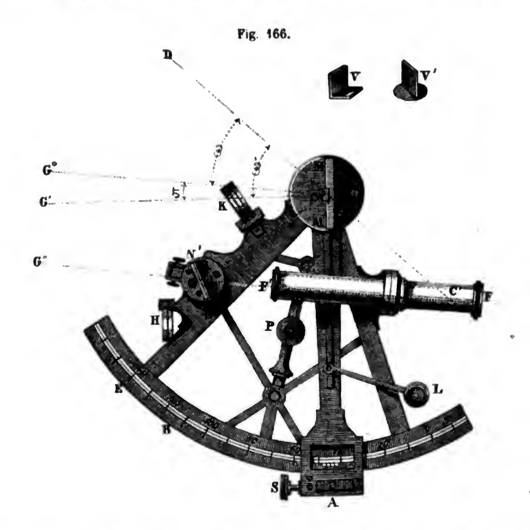
Zu 1. Die Theilungen des Limbus und des Nonius werden in derselben Weise wie die des einfachen Theodolithen untersucht; es darf also hier auf den Schluss des §. 138 verwiesen werden.

Zu 2. Die Mittel zur Untersuchung der Ebenheit und Paralleleität der

Spiegelgläser sind in §. 28 (S. 31) angezeigt; man wird sie in dem gegebenen Fall leicht anzuwenden wissen.

Zu 3. Der senkrechte Stand des grossen Spiegels kann auf verschiedene Weise untersucht werden. Erstens dadurch, dass man den Griff (P) und das Fernrohr nebst seinem Träger (O) abschraubt, den Sextanten nach dem Augenmasse wagrecht legt, bei E ein Diopter v aufsetzt und die Alhidade mit dem grossen Spiegel so weit zurück dreht, bis man bei v das Bild v^0 des Diopters im Spiegel erblickt, was dann der Fall ist, wenn der Spiegel senkrecht gegen den Halbmesser EC steht. Man sieht, dass hierbei die Alhidade über den Kreisbogen hinaus gedreht werden muss, was nur nach dem Abschrauben des Fernrohrträgers O geschehen kann. Nun stelle man ein zweites mit dem ersten genau abgeglichenes Diopter v′ vor der Platte C auf die Speiche N des Sextanten und in die Richtung $v v^0$. Das Bild von v′, welches der Spiegel macht, heisse v″. Liegt die Oberkante dieses Bilds mit der des ersten v^0 in der Absehlinie v v′, welche zur

Fig. 166.



Sextantenebene parallel ist, so steht der grosse Spiegel offenbar senkrecht auf dieser Ebene; fällt aber die Linie $v^0 v''$ mit v v′ nicht zusammen, so steht dieser Spiegel gegen die Sextantenebene nicht senkrecht. Diese Untersuchung kann man an einigen anderen Stellen wiederholen. Will man aber nicht so umständlich verfahren, so lässt sich der Stand des grossen

Spiegels zweitens dadurch prüfen, dass man den Sextanten, ohne Etwas von ihm abzunehmen, am Griffe so hält, dass das Auge bei D in den grossen Spiegel sieht, während die Alhidade ungefähr dieselbe Stellung wie in Fig. 166 hat. Zeigt sich hiebei, dass das Spiegelbild der Sextantenebene mit dieser keinen Winkel bildet, also in einer Ebene liegt, so ist das ein Beweis für den senkrechten Stand des grossen Spiegels. Ein hohler Winkel beider Ebenen würde, wie leicht einzusehen, einen spitzen Neigungswinkel dieses Spiegels gegen die Sextantenebene andeuten; ein erhabener Winkel jener Ebenen aber einen stumpfen Neigungswinkel des Spiegels. Die Berichtigung geschieht mittels der in §. 151 erwähnten Stellschräubchen. Wenn dergleichen Schräubchen nicht angebracht sind, so hat dafür die Fassung des Spiegels von vorne herein einen sehr festen und richtigen Stand von Seite des Mechanikers erhalten. Man findet in der That sehr oft keine Stellschrauben am grossen Spiegel, und sie sind auch in so ferne entbehrlich, als ein Fehler in der Stellung dieses Spiegels von einigen Minuten nur einen unmerklichen Einfluss auf die Winkelmessung hat.

Nachdem der grosse Spiegel ganz oder fast ganz senkrecht zur Limbusebene steht, kann die Stellung des kleinen leicht untersucht werden. Diese Untersuchung stützt sich auf den Satz, dass die beiden Spiegel parallel sind, wenn das Bild eines ausserordentlich weit entfernten Gegenstandes diesen selbst deckt (§. 150 Nr. 3). Man richtet daher das Fernrohr auf einen sehr fernen Gegenstand, am bessten auf einen Stern, und dreht mit der Alhidade den grossen Spiegel so lange, bis man entweder die eben erwähnte Deckung zu Stande gebracht oder sich überzeugt hat, dass sie nicht möglich ist. In letzterem Falle bedarf der kleine Spiegel einer Berichtigung durch die auf seiner Fassung angebrachten Stellschräubchen. Hat man es hierdurch so weit gebracht, dass die Deckung des Bilds und seines Gegenstandes eintritt, so ist der kleine Spiegel dem grossen parallel, und da dieser zur Instrumentenebene senkrecht steht, so hat auch jener die erforderliche Stellung.

Zu 4. Ein Verfahren zur Prüfung der Lage der Fernrohraxe oder der Absehlinie ist folgendes. Man lege den Sextanten auf einem Gestelle dem Augenmasse nach horizontal und stelle so nahe als möglich am Fernrohre zwei Diopter wie v und v' in Fig. 166 oder wie A und B in Fig. 4 so auf, dass ihre Visirlinie mit der Fernrohraxe nahezu parallel läuft. In einer Entfernung von etwa 100 Fuss vor dem Fernrohre lasse man eine eingetheilte Latte lothrecht halten und merke die Striche, welche von den Absehlinien der Diopter und des Fernrohrs gedeckt werden. Haben die Diopter ihre Visirlinie in derselben Höhe wie das Fernrohr, so soll von beiden derselbe Strich gedeckt werden; ausserdem dürfen die gedeckten Striche um den Höhenunterschied der Absehlinien von einander abstehen. Weichen aber die gedeckten Striche um mehr als den genannten Unterschied ab, so ist die Absehlinie des Fernrohrs — die Richtigkeit der Diopter vorausgesetzt — der Limbusebene nicht parallel.

Ohne Diopter kann man die Lage der Fernrohraxe wie folgt prüfen. Man verfahre, als ob man den Winkel zweier mehr als 90° auseinander liegender Sterne messen wollte; bringe aber die Ränder der beiden Bilder nicht in der Mitte des Fernrohrs, sondern an dem oberen oder unteren Rande des Gesichtsfeldes zur Berührung. Nun richte man, ohne die Alhidade zu verrücken, den entgegengesetzten Rand des Gesichtsfeldes auf den links stehenden Stern und sehe zu, ob auch jetzt noch die vorige Berührung der Bilder stattfindet; wenn ja, so ist die optische Axe des Fernrohrs der Limbusebene parallel, ausserdem aber nicht. Schneiden sich die Ränder, welche sich vorher berührten, so ist die Fernrohraxe am Objectivende gegen die Sextantenebene geneigt, stehen aber die Ränder von einander ab, so ist das Ocularende der Axe tiefer als das Objectivende. Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus den §§. 155 und 156, in denen von dem Einflusse und der Messung des Neigungswinkels der Fernrohraxe gegen die Sextantenebene die Rede ist.

Zu 5. Der Spiegelsextant hat einen Collimationsfehler, wenn bei paralleler Lage der beiden Spiegel der Nullpunkt des Nonius nicht mit dem des Kreisbogens zusammenfällt. Die Grösse dieses Fehlers ist durch den Bogen zwischen den Nullpunkten und seine Lage dadurch bestimmt, ob der Nullpunkt des Nonius in der Haupttheilung oder in der Uebertheilung des Limbus liegt; die erste Lage wollen wir die positive und die zweite die negative nennen. Man sieht leicht ein, dass, wenn der Collimationsfehler c positiv ist, jeder gemessene Winkel um diesen Fehler zu gross, und wenn c negativ ist, um eben so viel zu klein gefunden wird; und dass desshalb die Grösse c in dem ersteren Falle von der Ablesung abzuziehen, in dem letzteren aber hinzuzufügen ist. Versieht man jedoch die Grösse c mit ihrem Vorzeichen, so ist der Collimationsfehler von der Ablesung jederzeit in Abzug zu bringen.

Am besten bestimmt man den Collimationsfehler des Sextanten durch Beobachtungen der Sonne, indem man zunächst die vorher schon untersuchten farbigen Einschlaggläser vor die beiden Spiegel oder das Sonnenglas vor das Ocular des Fernrohrs bringt, die Nullpunkte nebeneinander stellt, das Fernrohr nach der Sonne richtet und den rechten Rand des nicht gespiegelten Sonnenbildes von dem linken Rande des doppelt gespiegelten Bildes berühren lässt, was durch Bewegung der Mikrometerschraube bewirkt wird. Nach dieser Beobachtung liest man den Stand des Nonius ab: es sey die Ablesung $= + a'$. Hierauf richtet man das Fernrohr wieder nach der Sonne und verstellt die Alhidade durch die Mikrometerschraube so lange, bis die beiden Sonnenbilder übereinander weggegangen sind, und sich mit den entgegengesetzten Rändern berühren. Dann liest man wieder den Stand des Nonius ab: diese zweite Ablesung sey $= + a''$. Man sieht leicht ein, dass sich die beiden Bilder bei einer Ablesung von $\frac{1}{2}(a' + a'')$ gedeckt hätten, also ist in diesem Falle der Collimationsfehler $c = + \frac{1}{2}(a' + a'')$. Wären beide a negativ gewesen, so würde $c = - \frac{1}{2}(a' + a'')$ seyn; und hätte

man a' positiv, a'' negativ gefunden, so wäre $c = \frac{1}{2}(a' - a'')$ und es hienge von der absoluten Grösse der beiden a ab, ob c positiv oder negativ würde. Für $a' > a''$ wäre c positiv, ausserdem aber negativ. Man kann hieraus die Regel ableiten: dass man aus den Ablesungen a' und a'' den Collimationsfehler seiner Grösse und Lage nach erhält, wenn man dieselben mit ihren Zeichen addirt und die algebraische Summe halbirt. Wir fügen dieser Regel ein Beispiel bei, um daran eine Bemerkung über die Ablesungen, welche sich auf negative Bögen beziehen, zu knüpfen. Bei der ersten Beobachtung liege der Nullpunkt des Nonius in der Haupttheilung des Limbus von dessen Nullpunkt um 23'5'' entfernt; also ist $a' = + 0^0 23' 5''$. Bei der zweiten Beobachtung aber befinde sich der Nullpunkt des Nonius in der Uebertheilung und stehe von dem ersten Grade dieser Theilung um 18'39'' ab. Diese Zahl liest man ab; der Buchstabe a'' bezeichnet aber einen negativen Bogen von $1^0 - 0^0 18' 39''$ oder $60' - 18' 39'' = 41' 21''$; also ist $a'' = - 0^0 41' 21''$. Daher wird in dem vorliegenden Falle

$$c = \tfrac{1}{2}(a' + a'') = - 0^0 9' 8''.$$

Wollte man aus den Ablesungen a' und a'' den scheinbaren Sonnendurchmesser ableiten, so hätte man nur den halben Unterschied dieser Ablesungen zu suchen; dieser ist aber gleich

$$d = \tfrac{1}{2}(a' - a'') = + 0^0 32' 13''.$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung versteht sich fast von selbst.

Den Collimationsfehler des Sextanten kann man in der Regel nicht wegschaffen und muss ihn desshalb, wie oben gezeigt, in Rechnung bringen. Wenn man jedoch an dem kleinen Spiegel (bei N') zwei mit der Sextantenebene parallel liegende Stellschräubchen anbringt, wodurch die Platte R, welche den Spiegel trägt, ein wenig gedreht werden kann, so lässt sich hierdurch der Collimationsfehler beseitigen; denn man braucht nur die Nullpunkte der Theilungen genau auf einander zu stellen und den kleinen Spiegel so lange zu verrücken, bis die vorhin beschriebenen Sonnenbeobachtungen zwei gleiche, aber entgegengesetze Ablesungen (+ a' und — a') liefern.

Zu 6. Da die Einschlaggläser die Richtung der sie durchdringenden Lichtstrahlen nicht verändern dürfen, so müssen sie eben und parallel seyn. Könnten diese Gläser nicht bloss mit ihrer Fassung um eine zur Sextantenebene parallele, sondern auch um eine auf dieser Ebene senkrecht stehende Axe um 180° gedreht werden, so liessen sie sich in so ferne leicht und genau untersuchen, als man nur den Collimationsfehler für die beiden entgegengesetzten Lagen jedes Glases zu bestimmen und zuzusehen hätte, ob dieser Fehler gegen den der Spiegel das einemal um eben so viel zu gross als das anderemal zu klein ist. Diese gleichen Abweichungen von dem Collimationsfehler der Spiegel zeigten dann den Einfluss der prismatischen Gestalt jedes einzelnen Glases an. Weil aber die zweite Drehung der Einschlaggläser meistens nicht möglich ist, so muss man dieselben wie folgt untersuchen.

Wenn der Collimationsfehler der Spiegel aus Mondbeobachtungen bestimmt ist — die Sonne kann man ohne die Gläser nicht dazu wählen — so bringe man zuerst ein grünes Glas von K zwischen die beiden Spiegel und bestimme den Collimationsfehler aufs Neue; ebenso verfahre man mit dem blauen Glase bei K. Hierauf untersuche man auch das grüne Glas bei H, indem man es vor das Fernrohr schlägt und den Collimationsfehler wie vorher bestimmt. Der Unterschied zwischen jedem neuen und dem ohne Einschlaggläser gefundenen Collimationsfehler gibt den Einfluss des eben untersuchten Glases. Die dunklen braunen Gläser kann man aber mit Hilfe des Monds nicht untersuchen, weil sie zu wenig Licht durchlassen; man muss hiezu die Sonne benützen. Ist das eine Glas vor das Fernrohr und das andere zwischen die beiden Spiegel gebracht, bestimmt man so den Collimationsfehler und vergleicht ihn mit dem, welchen die Beobachtung des Mondes geliefert hat, so hat man die Summe der Fehler beider braunen Gläser. Diese Summe zu kennen reicht aber hin, da bei späteren Beobachtungen der Sonne doch immer wieder beide Gläser zugleich in Anwendung kommen.

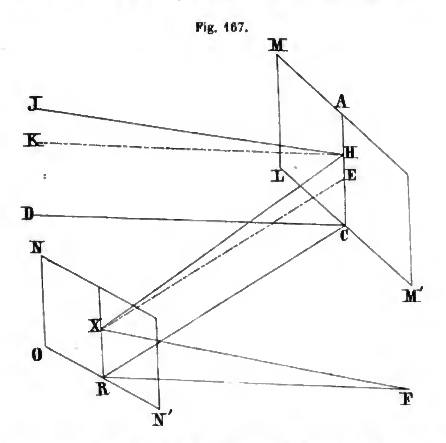
§. 154. **Fehler des Sextanten.** Die Berichtigung eines Instruments kann eben so wenig wie irgend eine mechanische Arbeit mit mathematischer Genauigkeit geschehen: es wird also selbst bei einem berichtigten Spiegelsextanten die Fernrohraxe der Limbusebene nur annähernd parallel seyn und jeder der beiden Spiegel nur sehr nahe einen rechten Winkel mit dieser Ebene bilden. Wie weit man in der Genauigkeit dieser Stellungen zu gehen hat, um brauchbare Messungsergebnisse zu erhalten, lässt sich auf theoretischem Wege bestimmen, indem man den Einfluss der Fehler des Sextanten auf die Winkelmessung berechnet. Dergleichen Rechnungen wurden zuerst von Bohnenberger, später von Encke und zuletzt von Grunert in den bereits in §. 149 angeführten Werken gemacht. Obwohl die Voraussetzungen und Betrachtungsweisen dieser drei Mathematiker verschieden sind, so liefern sie doch schliesslich gleiche Formeln zur Berechnung des Einflusses der Fehler, welche am Sextanten vorkommen. Diese Uebereinstimmung ist aber nur dadurch möglich, dass die Endresultate Näherungsausdrücke sind; wären sie es nicht, so müsste eine Abweichung stattfinden, weil Bohnenberger und Encke die nicht streng richtige Annahme machen, dass die von dem Collimationsfehler befreite Ablesung auf dem Sextanten sofort jenem Winkel ($GCD = \omega'$) entspreche, den die beiden gegebenen Schenkel (GC, CD) einschliessen, während Grunert die fehlerfreie Ablesung dem Winkel ($GC'D = \omega$) des einfallenden und zweimal gespiegelten Strahls (DC, GC) gleichsetzt. Wir werden uns bei der gesonderten Betrachtung jedes einzelnen Fehlers an die Darstellung von Bohnenberger halten, ohne seine eben erwähnte Voraussetzung über den Winkel, welcher der Ablesung entspricht, zu machen.

§. 155. **Neigung der Fernrohraxe.** Wir setzen jetzt voraus, dass der Sextant keinen anderen Fehler habe als den einer Neigung seiner Fern-

rohraxe, und untersuchen den Einfluss dieser Neigung auf einen zu messenden Winkel.

Es sey MM' in Fig. 167 der grosse und NN' der kleine Spiegel des Sextanten. Beide stehen auf der Limbusebene, welcher die Ebene DCRF eines einfallenden und zweimal gespiegelten Lichtstrahls (DC) parallel ist, senkrecht. Nach dem Gesetze der Zurückwerfung des Lichts ist der Winkel DCL = RCM' und CRO = FRN'. Legt man durch die Strahlen DC, CR, RF Ebenen senkrecht zur Limbusfläche, so schneiden diese die Spiegel nach den Linien AC und XR, welche ebenfalls auf dem Limbus senkrecht stehen. Die Fernrohraxe sollte mit der Linie RF parallel seyn; wir nehmen aber an, es sey FX diese Axe und ihr Neigungswinkel XFR = i. Ein Lichtstrahl, welcher nach zweimaliger Spiegelung in der Richtung XF in das Fernrohr gelangen soll, muss in umgekehrter Richtung den Weg FXHI zurücklegen, welchen man erhält, wenn man XE ‖ RC, EXH = i, HK ‖ CD und KHI = i macht. Der Winkel der beiden Linien IH und XF ist derjenige, welcher in dem Falle gemessen wird, dass die Fernrohraxe der

Fig. 167.



Sextantenebene nicht parallel läuft. Diesen Winkel will man aber nicht, sondern den, welcher seiner Projection auf die Sextantenebene entspricht. Folglich ist der abgelesene Winkel w (den wir uns schon um die Parallaxe und den Collimationsfehler verbessert denken) grösser als der gesuchte Winkel w', und es muss daher der Fehler w — w' = f von der Ablesung w abgezogen werden.

Man sieht leicht ein, dass die Berechnung des Winkels w' aus dem abgelesenen Winkel w und den gleichen Neigungen (i) seiner Schenkel IH

und XF gegen die Sextantenebene auf die Lösung der Aufgabe hinausläuft: einen schiefen Winkel auf den Horizont zurückzuführen. Hier ist die Sextantenebene der Horizont und die Ebenen DCA und FRX sind die Vertikalebenen, welche man zu dem Ende durch die Schenkel des gegebenen Winkels legt. Die genannte Aufgabe führt bekanntlich zur Auflösung eines sphärischen Dreiecks, in welchem drei Seiten gegeben sind und ein Winkel gesucht wird. Die gegebenen Seiten sind erstens die den gleichen Neigungswinkeln der Strahlen IH und XF entsprechenden gleichen Complemente ($90^0 - i$) und zweitens der abgelesene Winkel w. Zur Lösung der vorliegenden Aufgabe dient die bekannte Grundformel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

in welcher $A = w'$, $a = w$ und $b = c = 90^0 - i$ zu setzen ist. Hiernach erhält man zunächst

$$\cos w - \sin^2 i = \cos^2 i \cos w' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

und nach einigen einfachen Umformungen:

$$\sin \tfrac{1}{2} w = \cos i \sin \tfrac{1}{2} w'; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

woraus sich w' und folglich auch $f' = w - w'$ berechnen lässt. Will man jedoch unmittelbar $w - w'$ finden, so nehme man aus Gleichung (110):

$$\cos w - \cos w' = 2 \sin^2 i \sin^2 \tfrac{1}{2} w' = 2 \sin \tfrac{1}{2} (w - w') \sin \tfrac{1}{2} (w + w')$$

und bedenke, dass, da w und w' nur wenig von einander abweichen, jedenfalls annähernd

$$\sin \tfrac{1}{2} (w + w') = \sin w \quad \text{und} \quad \sin^2 \tfrac{1}{2} w' = \sin^2 \tfrac{1}{2} w$$

gesetzt werden darf. Unter dieser Voraussetzung wird

$$\sin \tfrac{1}{2} (w - w') = \tfrac{1}{2} \sin^2 i \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w$$

und da i und $w - w'$ als sehr kleine Winkel ihren Sinussen proportional sind:

$$f' = w - w' = i^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w \,.\, \sin 1''. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Dieser Ausdruck liefert die Verbesserung (f') in der Einheit, welche für i gewählt wird; er darf jedoch nicht mehr gebraucht werden, wenn w nahezu 180^0 beträgt. In diesem Falle hat man die Gleichung (111) anzuwenden, um $w - w'$ zu finden. Ist die Neigung des Fernrohrs z. B. 15 Minuten = 900 Sekunden, und der abgelesene Winkel $w = 60^0$, so wird $f' = 2{,}2$ Sekunden und somit der gesuchte Winkel $w' = w - f = 59^0 57'', 8$. Für $i = 15$ Minuten und $w = 140^0$ würde $f' = 10{,}8$ Sekunden werden u. s. w. Die folgende von uns berechnete Tafel gibt einen Ueberblick der Fehler f', welche sich für verschiedene Neigungen (i) des Fernrohrs bei verschiedenen Winkeln (w) ergeben.

Verbesserungen der gemessenen Winkel wegen der Neigung des Fernrohrs, in Sekunden ausgedrückt.

Beobachteter Winkel (w).	Neigung (i) der Fernrohraxe gegen die Sextantenebene.							
	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′
10°	0,04	0,15	0,34	0,61	0.96	1.37	1,87	2,44
20°	0,09	0,30	0,69	1,23	1.93	2,77	3.78	4,92
30°	0,13	0,46	1,05	1,86	2,93	4,22	5,73	7,48
40°	0,17	0,65	1,42	2,52	3,98	5,71	7,78	10,16
50°	0,22	0,80	1,82	3,23	5,09	7,31	9.97	13,05
60°	0,28	0,99	2,25	4,00	6,31	9,05	12,24	16.12
70°	0,33	1,18	2,77	4,86	7,65	10.98	15,04	19.55
80°	0,40	1,43	3,27	5,82	9,17	13,15	17,93	23,49
90°	0,46	1,71	3,92	6,93	10,93	15,68	21,38	27,99
100°	0,56	2,04	4,64	8,27	13,02	18,69	25,49	33,28
120°	0,82	2,95	6,76	12,02	18,93	26,83	37,04	48.37

§. 156. **Mass des Neigungswinkels (w).** Es ist klar, dass, wenn die Fernrohraxe und die beiden Horizontalfäden des Fadenkreuzes der Sextantenebene parallel sind, die Berührung der Bilder, welche an dem einen Faden zu Stande gebracht wurde, bei entgegengesetzter Neigung des Sextanten, auch am zweiten Faden sich wieder zeigen muss, weil in beiden Fällen der Neigungswinkel der Visirebene, welche durch den Faden und den optischen Mittelpunkt des Objectivs bestimmt ist, der Grösse nach gleich bleibt und nur eine entgegengesetzte Lage hat. Wäre aber die Fernrohraxe der Sextantenebene nicht parallel, sondern gegen sie unter dem Winkel i geneigt, so würde, wenn die Visirebene mit der Axe den Winkel e macht, bei der Berührung an dem einen Faden der Neigungswinkel der Visirebene gegen die Sextantenebene $k = i + e$ und für den zweiten Faden $k' = i - e$ seyn, wobei

$$\operatorname{tg} e = \frac{a}{f},$$

a = dem halben Abstand der Horizontalfäden von einander und f = der Brennweite des Objectivs ist. Da aber e in jedem Falle nur ein kleiner Winkel ist, so kann man, wie leicht einzusehen, setzen:

$$e = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{a}{f} \text{ Sekunden.}$$

Nach Gleichung (112) ist die Verbesserung für den ersten Fall, wo der Winkel w_1 abgelesen worden ist,

$$f_1 = (i + e)^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w_1 \sin 1''$$

und für den zweiten Fall, wo die Ablesung w_2 war:

$$f_2 = (i - e)^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w_2 \sin 1''.$$

Hieraus findet man, da $f_1 - f_2 = w_1 - w_2$ und (wegen des geringen Unterschieds zwischen w_1 und w_2) tg $\frac{1}{2} w_2 =$ tg $\frac{1}{2} w_1$ gesetzt werden darf, zunächst

$$w_1 - w_2 = 4\, i\, e\, \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}\, w_1 \sin 1'',$$

und hieraus den gesuchten Neigungswinkel der Fernrohraxe

$$i = \frac{w_1 - w_2}{4\, e\, \mathrm{tg}\, \frac{1}{2}\, w_1 \sin 1''} = \frac{f\,(w_1 - w_2)}{4\, a\, \mathrm{tg}\, \frac{1}{2}\, w_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

Ist z. B. die Brennweite des Sextantenfernrohrs 6 Zoll = 60 Linien und der halbe Abstand der Fäden a = 1 Linie, so wird e = 3438 Sek. = 57′ 38″. Beträgt die verbesserte Ablesung bei der Berührung am unteren Faden 130° 36′ und bei der Berührung am oberen Faden 130° 35′, so ist $w_1 - w_2 = 1$ Minute und $\frac{1}{2} w_1 = 65^0 18'$; folglich der Winkel

$$i = \frac{60}{4\, .\, \mathrm{tg}\, 65^0 18'} = 15 \,\mathrm{cotg}\, 65^0 18' = 6{,}9 \text{ Min.}$$

Der Abstand 2 a der Parallelfäden des Fadenkreuzes, welcher bei der Bestimmung von i als bekannt vorausgesetzt wird, ergibt sich am sichersten durch folgendes Verfahren, dessen Richtigkeit leicht einzusehen ist. Man stelle die Parallelfäden durch Drehung der Ocularröhre senkrecht zur Ebene des Sextanten, diesen selbst aber dem Augenmasse nach horizontal. In der Entfernung von einigen hundert Fussen visire man einen gut beleuchteten und scharf begrenzten Punkt so an, dass er von dem einen Faden gedeckt wird. Nun drehe man die Alhidade so, dass das doppelt gespiegelte Bild dieses Punktes ebenfalls auf den ersten Faden fällt. Nachdem der Stand des Nonius abgelesen ist, wird die Alhidade, ohne die geringste Verrückung des Instruments, so weit gedreht, dass das eben genannte Bild auf den zweiten Faden kommt, während das directe auf dem ersten bleibt. Liest man den Stand des Nonius wieder ab, so gibt der Unterschied der beiden Ablesungen den Neigungswinkel 2 e und folglich, wenn die Brennweite f des Objectivs bekannt ist, der Ausdruck a = f . tg e den gesuchten Abstand der Fäden.

§. 157. **Neigung des grossen Spiegels.** Bildet der grosse Spiegel mit der Senkrechten zur Sextantenebene einen Winkel l, so kann man dem kleinen dieselbe Neigung geben, indem man beide Spiegel nach §. 153 parallel stellt. Berichtigt man hierauf das Fernrohr, so wird seine Axe in einer Ebene liegen, welche auf beiden Spiegeln senkrecht und folglich gegen die Sextantenebene unter dem Winkel l geneigt ist. Der Winkel w_0, welchen man bei einer bestimmten Messung abliest, gibt offenbar den doppelten Winkel ($\frac{1}{2} w_0$), welchen die Normalen der Spiegelebenen miteinander einschliessen, während man seine Projection ($\frac{1}{2} w_1$) sucht, um daraus w_1 zu erhalten. Zwischen dem Neigungswinkel (l) des grossen Spiegels, dem Winkel ($\frac{1}{2} w_0$) der Normalen beider Spiegel und dessen Projection ($\frac{1}{2} w_1$) auf die Sextantenebene findet somit dieselbe Beziehung statt, wie im vorigen Paragraphen zwischen den Winkeln i, w und w′; es ist desshalb auch nach

Gleichung (111) in dem vorliegenden Fall, wenn man $\frac{1}{2} w_0$ für w, $\frac{1}{2} w_1$ für w' und i für l setzt:

$$\sin \frac{1}{4} w_0 = \cos l \sin \frac{1}{4} w_1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

In Berücksichtigung des Umstandes aber, dass w_0 und w_1 nur wenig verschieden sind und l immer sehr klein ist, kann man auch die Formel (112) anwenden, welche hier den Fehler im gemessenen Winkel

$$f'' = w_0 - w_1 = 2 l^2 \operatorname{tg} \frac{1}{4} w_0 \sin 1'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

gibt. Da dieser Ausdruck von dem in Nr. 112 nur darin abweicht, dass die rechte Seite mit 2 multiplicirt ist und tg $\frac{1}{4} w_0$ statt tg $\frac{1}{2}$ w steht, so könnte man wohl auch die Tafel auf Seite 239, welche die Verbesserungen der gemessenen Winkel wegen der Neigung des Fernrohrs enthält, zur Bestimmung von f'' benützen; wir haben es jedoch vorgezogen, eine besondere zu rechnen und nachstehend mitzutheilen. Zu dieser Berechnung fanden wir uns um so mehr veranlasst, als beide Tabellen nur für kleinere Neigungen des Fernrohrs und des grossen Spiegels nahe genug übereinstimmen, für grössere Neigungen aber und grosse Winkel merklich von einander abweichen.

Verbesserungen der gemessenen Winkel wegen der Neigung des grossen Spiegels, in Sekunden ausgedrückt.

Beobachteter Winkel (w).	Neigung (l) des grossen Spiegels gegen die Normale der Sextantenebene.							
	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'
10°	0,04	0,15	0,34	0,60	0,96	1,37	1,87	2,44
20°	0,08	0,30	0,68	1,22	1,92	2,75	3,75	5,00
30°	0,12	0,45	1,02	1,83	2,88	4,13	5,63	7,36
40°	0,17	0,60	1,37	2,44	3,86	5,54	7,40	9,86
50°	0,21	0,76	1,72	3,08	4,84	6,95	9,52	12,39
60°	0,25	0,92	2,09	3,72	5,86	8,40	11,46	14,88
70°	0,29	1,06	2,41	4,30	6,77	9,72	13,35	17,32
80°	0,34	1,24	2,84	5,05	7,96	11,42	15,57	20,34
90°	0,39	1,42	3,23	5,75	8,90	12,99	17,72	23,46
100°	0,44	1,60	3,64	6,47	10,20	14,73	19,95	26,08
120°	0,55	1,98	4,50	8,02	12,64	18,13	24,72	32,30

§. 158. **Neigung des kleinen Spiegels.** Jetzt sey der grosse Spiegel senkrecht und die Fernrohraxe parallel zur Sextantenebene; der kleine Spiegel bilde aber mit der Normalen dieser Ebene einen kleinen Winkel k. Treffen auf den grossen Spiegel Lichtstrahlen, welche mit der Sextantenebene parallel laufen, so liegen die nach dem kleinen Spiegel zurückgeworfenen Strahlen in parallelen Ebenen, welche mit dem Lothe des kleinen Spiegels den Winkel k einschliessen. Die von dem kleinen Spiegel zurück-

geworfenen Strahlen befinden sich in Ebenen, welche durch die auf ihn fallenden Strahlen und die zugehörigen Lothe gehen. Schneidet man diese unter sich parallelen Ebenen durch andere Ebenen, welche in den Lothen liegen und auf der Sextantenebene senkrecht stehen, so sind die Projectionen der Einfalls- und Zurückwerfungswinkel zusammen $= 2$ k und folglich ist auch der Winkel, welchen der projicirte zurückgeworfene Strahl mit der Sextantenebene bildet, $= 2$ k. Das Fernrohr steht aber nicht senkrecht gegen den kleinen Spiegel, sondern ist gegen dessen Normale unter einem Winkel β (von etwa 15^0) geneigt. Darum müssen die zurückgeworfenen Strahlen in Ebenen liegen, welche gegen die Normale des kleinen Spiegels unter dem Winkel β geneigt sind. In diesen Ebenen bilden aber die reflectirten Strahlen mit der Sextantenebene einen Winkel k', der sich aus der leicht aufzufindenden Gleichung

$$\operatorname{tg} k' = \operatorname{tg} (2k) \cos \beta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (116)$$

ergibt. Bedenkt man jedoch, dass k' und 2k nur sehr kleine Winkel sind, so kann man näherungsweise

$$k' = 2k \cos \beta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (117)$$

setzen. Heisst der abgelesene und von dem Collimationsfehler und der Parallaxe bereits befreite Winkel v und der verbesserte Winkel v', so bilden die drei Winkel k', v, v' ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck, in welchem k' und v die Katheten sind und v' die Hypotenuse vorstellt. Löst man dieses Dreieck auf, so kommt:

$$\cos v' = \cos v \cos k' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (118)$$

Hieraus kann man v' und folglich auch den Fehler $f''' = v' - v$, welcher zu v addirt wird, leicht berechnen. Da cos k' constant ist, so ändert sich cos v' nur mit cos v; es ist folglich für einen Winkel $v = 90^0$ der Fehler $f''' = 0$, und für $v = 0$ wird $f''' = k'$. Dieses ist der grösste Werth, den f''' annehmen kann; es hat also der Fehler f''' nur eine Bedeutung bei Messung kleiner Winkel. Sind aber v und v' auch kleine Grössen, wie es k' ohnehin schon ist, so kann man das vorhin erwähnte rechtwinkelige sphärische Dreieck als ein ebenes betrachten und daher

$$v' = \sqrt{v^2 + k'^2} = v + \frac{k'^2}{2v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (119)$$

und weiter noch

$$f''' = v' - v = \frac{2k^2 \cos^2 \beta}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (120)$$

setzen. Hier ist k in derselben Einheit wie v auszudrücken; dann erhält man auch den Fehler f''' in dieser Einheit. So wird z. B. für $k = 5$ Minuten, $\beta = 15^0$ und $v = 2^0\,40' = 160$ Minuten der Fehler $f''' = 0{,}292$ Min. $= 17{,}5$ Sekunden.

Die nachstehende Tabelle gibt einen Ueberblick des Wachsens der Fehler mit der Zunahme von k und der Abnahme von v. Der Winkel β ist dabei $= 15^0$ angenommen.

Verbesserungen der gemessenen Winkel wegen der Neigung des kleinen Spiegels, in Sekunden ausgedrückt.

Beobachteter Winkel (w).	Neigung (k) des kleinen Spiegels gegen die Normale der Sextantenebene.							
	1'	2'	3'	4'	5'	10'	15'	20'
1/2°	3.72	14.93	33,60	59.91	93,30	373,2	839,7	1492,8
1°	1.86	7.46	16,79	29,86	46,62	186.6	419.9	746,4
2°	0.93	3,73	8.39	14 90	23.31	93.3	209,9	373,2
3°	0.62	2 48	5.58	9.94	15.54	62,2	139.9	248,8
4°	0,46	1,86	4,19	7.46	11,65	46,7	104,4	186,1
5°	0,39	1,48	3.35	5,97	9,32	37,3	83.9	149,3
6°	0,31	1,24	2.79	4,97	7,77	31,1	69.9	124,4
7°	0,26	1,06	2,39	4,26	6,66	26,6	59,8	106 4
8°	0.23	0,93	2,09	3,73	5,82	23,3	52,2	93.3
9°	0.20	0,83	1,86	3,31	5,18	20,8	46,6	83,2
10°	0,19	0,74	1,67	2,98	4,66	18,7	42.0	74.6

Der Spiegelkreis von Pistor und Martins.

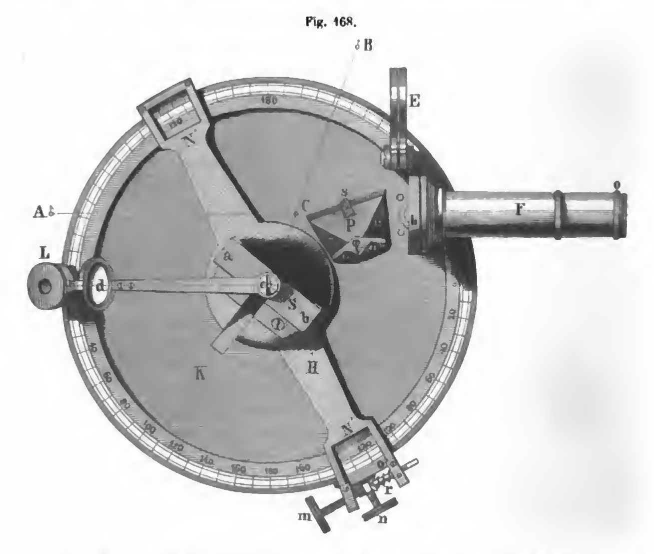
§. 159. Alle Spiegelsextanten leiden an mehreren Uebeln, von denen sie nicht befreit werden können. Hieher gehört zunächst die geringe Helligkeit der Bilder, welche mit der Grösse der Winkel wächst und eine Folge der optischen Natur der Glasspiegel ist; ferner die Beschränkung in der Grösse der zu messenden Winkel, indem dieselben kaum mehr als 120° betragen dürfen; und endlich die Unmöglichkeit, den Einfluss der Excentricität der Alhidade auf die Winkelmessung zu beseitigen. Die Erkenntniss dieser Uebelstände hat zur Erfindung der Spiegelkreise Veranlassung gegeben. Der erste, welcher solche Kreise vorschlug, war derselbe Professor Tobias Mayer in Göttingen, von dem auch die Repetition der Winkel ausging. Seine im Jahre 1770 gemachten Vorschläge wurden später von Borda ausgeführt und in mehreren Stücken verbessert, wesshalb auch die früheren Spiegelkreise unter dem verbundenen Namen beider bekannt sind. Diese Instrumente hatten zwar nur einen Nonius, waren aber dafür zum Repetiren eingerichtet, wodurch der Einfluss der Excentricitäts- und Theilungsfehler beseitigt werden sollte. Vor etwa 25 Jahren hat Steinheil in München den Spiegelkreis in einen mit grossen Vorzügen ausgestatteten Prismenkreis [1] verwandelt, und in neuerer Zeit werden von Pistor und Martins in Berlin Reflexionskreise angefertigt, welche sich mit Recht eines grossen Beifalls erfreuen. Diese Kreise wurden von den Erfindern in

[1] In den »astronomischen Nachrichten« von Schumacher, Bd. XI, hat Bessel eine vollständige Theorie des zwar nur in der Astronomie angewendeten aber auch zu geodätischen Messungen sehr geeigneten Prismenkreises mitgetheilt.

dem Berliner Gewerbeblatt von Neukrantz, Bd. XIV, in Hinsicht auf ihre Einrichtung, Anwendung und Vortheile kurz beschrieben, aber theoretisch nicht näher erörtert. Da diese Erörterung auch von Denen nicht gegeben wurde, welche jene Beschreibung in ihre Bücher aufgenommen haben, so finden wir uns um so mehr veranlasst, auf die Theorie des Pistor'schen Spiegelkreises näher einzugehen, als wir uns durch mehrjährigen Gebrauch von der Güte dieses Instruments überzeugt haben.

§. 160. **Beschreibung.** Die Fig. 168 stellt die Ober- und Fig. 169 eine Seitenansicht eines fünfzölligen Spiegelkreises aus der genannten Werkstätte dar; in beiden sind gleiche Theile mit gleichen Buchstaben bezeichnet.

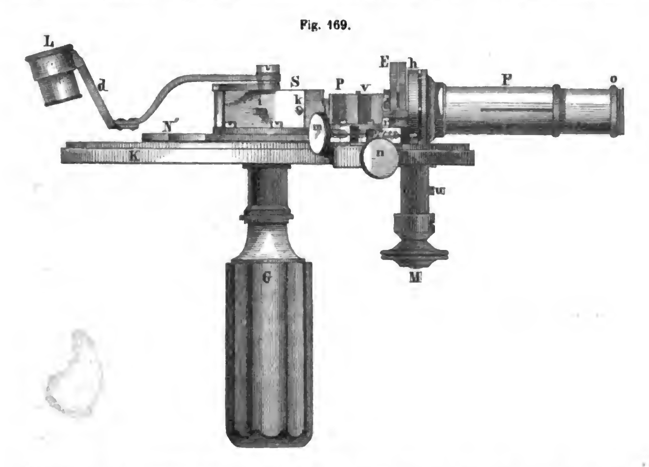
Fig. 168.



Der Körper (K) des Instruments ist eine messingene Kreisscheibe von 5 Par. Zoll Durchmesser, welche in ihrem Mittelpunkte von einem hölzernen Griffe (G), der an einen Metallcylinder angeschraubt ist, unterstützt wird. Da sich der Schwerpunkt des Instruments nahe am Mittelpunkte des Kreises befindet, so erreicht man bei dem Vollkreise gegen den Sextanten den Vortheil, dass man den Schwerpunkt unterstützen kann, ohne den Griff ausserhalb der Axe des grossen Spiegels anbringen zu müssen. Die Axe der Alhidade (H) geht durch den Mittelpunkt (c) des Kreises und steht senkrecht auf diesem. Der Spielraum für die Bewegung dieser Alhidade

umfasst bloss einen Viertelkreis zwischen den mit 0° und 180° bezeichneten Punkten. Das Prisma (P), das Fernrohr (F) und die Einschlaggläser (E) verhindern eine weitere Drehung. Da aber ein Drehwinkel von 90° einem Winkel der Lichtstrahlen von 180° entspricht, so ist diese Drehung bei Weitem ausreichend. Durch die Bremsschraube n wird die grobe Drehung der Alhidade gehemmt und durch die Mikrometerschraube m, welcher der Stift und die Spirale r entgegenwirken, die feine Drehung bewerkstelligt. Der Limbus, auf einem eingelegten silbernen Ringe, ist in 2160 gleiche Theile, also unmittelbar in Sechstelgrade getheilt. Jeder solcher Theil entspricht 20 Minuten des zu messenden Winkels. Die Bezifferung geht von zwei Nullpunkten (0,0) aus, welche an den Enden des mit der Fernrohraxe

Fig. 169.



parallelen Durchmessers (cd) liegen; es sind dabei wie bei dem Spiegelsextanten halbe Grade für ganze gezählt und desswegen die Enden des auf 00 senkrechten Durchmessers mit 180° bezeichnet. Die beiden Nonien (N′, N″) liegen an dem äusseren Rande des Limbus; in Fig. 168 sind nur ihre Nullpunkte (0,0) angedeutet, welche von einander um 180° abstehen. Sie sind so getheilt, dass sie 10 Sekunden vom Drehwinkel und folglich 20 Sekunden vom gemessenen Winkel angeben; es umfassen nämlich 60 Noniustheile und 59 Limbustheile gleiche Längen. Ueber die Nonien, welche Uebertheilungen besitzen, kann man beim Ablesen die Lupe L mit der Blende d stellen, indem man den Stiel dc um die Axe c dreht. Auf der Alhidade ist in der Richtung ab, welche mit dem Durchmesser (00) der Nonien einen Winkel von 20° bildet, ein Planspiegel (S) so befestigt,

dass mittels der Stellschräubchen i und k, welche sich auf der Rückseite der Fassung befinden, seine Stellung zur Kreisebene, welche genau senkrecht seyn soll, berichtigt werden kann. Dieser Spiegel macht alle Bewegungen der Alhidade mit und seine Drehung wird durch die Nonien von den Nullpunkten des Limbus aus gemessen. Wenn die Nonien auf diesen Nullpunkten stehen, so ist an einem fehlerfreien Instrumente die Spiegelebene (a b) der Hypotenusenebene des feststehenden Prisma's (P), welches hier den kleinen Spiegel des Sextanten vertritt, parallel. Dieses Glasprisma hat ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck zum Querschnitt und seine Axe steht senkrecht auf der Limbusebene. Es ist so in Messing gefasst, dass durch die Schräubchen bei v und s seine Stellung berichtigt werden kann. Die Hypotenusenebene ist geblendet, um fremdes Licht von dem Fernrohre abzuhalten und die Zurückstrahlung des vom Spiegel kommenden Lichts vollständiger zu machen. Dem Prisma gegenüber steht das Fernrohr (F), welches hier des Raumes wegen ein wenig verkürzt gezeichnet ist. Seine Einrichtung ist dieselbe wie beim Sextanten, und es lässt sich hier wie dort (mit der Schraube M) auf- und abschieben. In der Regel empfängt die eine Hälfte des Objectivs ihr Licht aus dem Prisma und die andere von dem direct gesehenen Gegenstand; ist aber dieser im Vergleich zu dem doppelt gespiegelten sehr hell, so kann man dem Fernrohr eine grössere Lichtmenge aus dem Prisma zuführen, wenn man die Schraube M vorwärts dreht, und umgekehrt kann man sie auch verkleinern; es lassen sich folglich die Helligkeiten der beiden Bilder im Allgemeinen ziemlich nähern und in vielen Fällen ganz gleich machen. Die Blendgläser (E) stehen hier, abweichend von dem Sextanten, zwischen dem Prisma und dem Fernrohr. Es sind nur zwei, ein braunes und ein grünes, angebracht, und beide lassen sich nicht allein um das Scharnier an ihrer Fassung drehen, sondern auch mit dieser so umwenden, dass das in der ersten Lage dem Fernrohr näher stehende Glas das entferntere wird und umgekehrt. (S. Fig. 175 und 176). An das Ende (o) der Ocularröhre lassen sich nach Bedürfniss die Fassungen eines Sonnenglases oder eines gleichseitigen rechtwinkeligen Prisma's anschrauben. Die Fig. 174 stellt dieses Prisma und die Ocularröhre im Durchschnitte dar; und denkt man sich den Theil pza weggenommen, so gibt cp einen Durchschnitt des an die Ocularröhre F geschraubten Sonnenglases.

§. 161. **Theorie.** Wir setzen voraus, dass der ebene und parallele Glasspiegel auf der Limbusebene senkrecht steht, dass die Fernrohraxe mit dieser Ebene parallel läuft, dass die drei Prismenebenen mit der Limbusebene rechte Winkel bilden; nehmen ferner der allgemeineren Betrachtung wegen den senkrechten Querschnitt des Prisma's nicht als ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges, sondern als ein schiefwinkeliges Dreieck mit den Winkeln h, m, q an, und beweisen zunächst folgenden Satz:

1) Wenn auf ein senkrechtes dreiseitiges Prisma Lichtstrahlen so fallen, dass sie mit der Grundfläche parallel sind, so lässt sich die Wirkungsweise dieses Prisma's immer auf die eines ebenen Spiegels zurückführen. Denn

stellt in Fig. 170 das Dreieck hmq den senkrechten Prismenquerschnitt vor, in welchem der einfallende Strahl ce liegt, so ist für's Erste aus den Grundgesetzen über die Zurückwerfung und Brechung des Lichts klar, dass die gebrochenen und zurückgeworfenen Strahlen ed, de', e'f nicht aus der Ebene dieses Querschnitts heraustreten, sondern darin bleiben. Folglich müssen sich auch der einfallende Strahl (ce) und der austretende (e'f), wenn man sie gehörig verlängert, in einem Punkte (i) jener Ebene schneiden. Denkt man sich nun den Winkel (cif), welchen diese Strahlen miteinander bilden, halbirt und auf die Theilungslinie (it) eine Senkrechte (kp) errichtet, so stellt dieselbe den Schnitt des ebenen Spiegels vor, welcher eben so wirkt wie das senkrechte dreiseitige Prisma. Die Linie kp ist, wie man sofort einsieht, der Seite hm des Prismenquerschnitts dann parallel, wenn dieser Querschnitt ein gleichschenkeliges Dreieck ist und die gleichen Winkel an der Seite hm liegen. Da in dem Spiegelkreise das Prisma hmq festliegt, so wird es nur dann durch die spiegelnde Ebene kp vertreten werden, wenn deren Richtung ebenfalls unveränderlich ist. Dieses ist aber der Fall. Denn da wegen der festen Stellung des Fernrohrs gegen das Prisma alle aus diesem kommenden und in das Fernrohr tretenden Strahlen die Richtung e'f nehmen müssen, und da diese Richtung durch die Brechungen bei e, e' und die Reflexion bei d nur möglich ist, wenn die von dem drehbaren Spiegel kommenden Strahlen die Richtung ce haben, welche mit der Hypotenusenebene des Prisma's einen constanten Winkel einschliesst: so bleibt auch der Winkel cif und folglich die auf seiner Halbirungslinie it senkrechte Richtung kp unveränderlich, was zu beweisen war. Nunmehr betrachten wir das Instrument in verschiedenen Lagen der Alhidade, oder, was dasselbe ist, des drehbaren Spiegels.

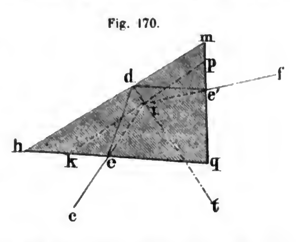
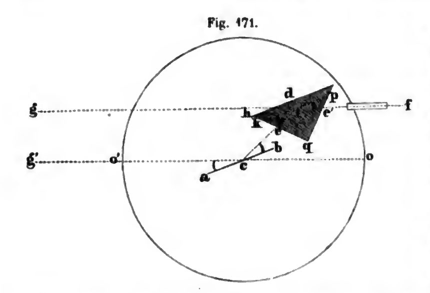


Fig. 170.

Erste Lage: Fig. 171. Der Spiegel ab ist der Linie kp im Prisma parallel und das Fernrohr f ist auf einen sehr weit entfernten Gegenstand (G) gerichtet. In diesem Falle gelangt das Licht vom Gegenstande G in der Richtung gf direct in's Fernrohr und nach g'c auf den Spiegel ab. Wegen der grossen Entfernung von G ist g'c parallel zu gf und daher Winkel acg' = kig. Aus optischen Gründen ist bce = acg' und pie' = kic. Da aber vermöge der Annahme bce = kic ist, so ist auch pie' = pif: d. h. der austretende Lichtstrahl e'f ist der Fernrohraxe parallel, oder mit anderen Worten: der direct gesehene sehr weit entfernte Gegenstand und sein doppelt gespiegeltes Bild decken sich, wenn die Spiegelebenen ab und pk einander parallel sind. Dieser Satz gilt selbstverständlich auch umgekehrt, und auf ihm beruht die Bestimmung der Nullpunkte o und o' der Kreistheilung. Bei einem fehlerfreien Instrumente steht also immer die

Fig. 171.

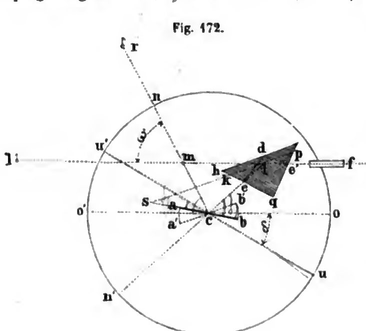


Alhidade auf Null, wenn die Spiegelebenen a b, k p parallel sind. Der Durchmesser o o' ist der Absehlinie des Fernrohrs parallel, während der Spiegel a b einen Winkel von 20⁰ mit ihm bildet. Einen gleichen Winkel a c g' bilden auch die Lichtstrahlen g' c, wenn der zu messende Winkel null ist; für jeden anderen Winkel fallen, wie der weitere Verlauf unserer Betrachtungen zeigt, die Lichtstrahlen weniger schief gegen den Spiegel. Da der Lichtverlust durch Zerstreuung um so grösser ist, je kleinere Winkel die einfallenden Strahlen mit den Ebenen der Spiegel bilden, so ist folglich das doppeltgespiegelte Bild in dieser ersten Lage des Spiegels am wenigsten hell.

Zweite Lage: Fig. 172. Der Spiegel a b bildet mit der Linie k p im Prisma einen Winkel b s p $= \delta$, wenn das doppelt gespiegelte Bild des rechts liegenden Gegenstands r und das Bild des direct gesehenen linken Gegenstands l, der mit r am Instrumente einen Winkel l m r $= \omega$ einschliesst, sich decken. Es fragt sich, wie sich δ zu ω verhält.

Man weiss, dass der Durchmesser o o' der Linie f l parallel ist, und dass dieser mit dem Spiegel festverbundene Durchmesser um denselben Winkel (o c u $= \delta$) gedreht wird wie der Spiegel a b, der ursprünglich mit der Linie p k parallel war. Wenn nun o o' || f l, so ist der Winkel $\omega =$ o' c m $=$ o' c u' $+$ u' c m $= \delta +$ u' c m. Es ist aber nach dem Gesetz der Spiegelung u' c m $+$ u' c a $=$ b c b' $+$ b' c i, und nach der Einrichtung des Instruments u' c a $=$ b' c i; folglich muss auch u' c m $=$ b c b' $=$ dem Drehungswinkel des Spiegels $= \delta$, und somit $\omega = 2\delta$ seyn. Der zweimal gespiegelte und gebrochene Strahl (l f) bildet demnach mit dem einfallenden (r c) einen Winkel (ω), der doppelt so gross ist als der Drehungswinkel (δ) des Spiegels. Dasselbe Gesetz findet beim Spiegelsextanten statt; man kann also mit dem Spiegelkreise in gleicher Weise

Fig. 172.



wie mit dem Sextanten Winkel messen. Wenn jedoch der Winkel (ω) der beiden Gegenstände (l, r) grösser wird als 130°, so können die von dem rechts liegenden Objecte (r) kommenden Lichtstrahlen theils wegen des vorstehenden Prisma's und des Fernrohrs, theils wegen des Kopfs des Beobachters nicht mehr auf den Spiegel gelangen, und es muss sich desshalb von hier an das Messungsverfahren ändern. In welcher Weise dieses zu geschehen hat, lehrt die folgende Lage der Alhidade.

Dritte Lage: Fig. 173. Das Fernrohr (f) ist auf den rechtsliegenden Gegenstand (r) gerichtet und der Spiegel ab wird aus seiner ursprünglichen Lage a'b' so weit verdreht, bis das auf ihn fallende Licht von dem linken Objecte (l) in dem Fernrohre ein Bild gibt, das mit dem des rechtseitigen Gegenstands zusammenfällt. Es handelt sich um das Verhältniss des Drehungswinkels ($a'ca = ocv = \delta$) und des Winkels der Objecte ($rml = \omega$).

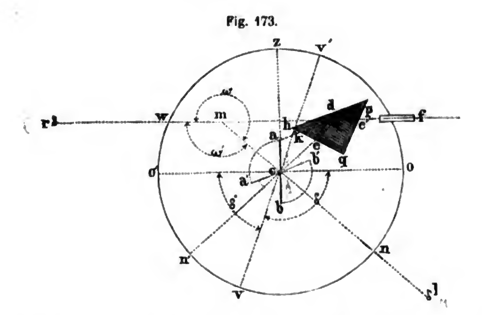
Da der Durchmesser o'o dem Schenkel rf parallel läuft, so ist der erhabene Winkel $o'cn = rml = \omega$. Nun ist nach der Figur $o'cn = o'cv' + v'cn = \delta + v'cn$, nach dem Spiegelungsgesetze $bcl = aci$ und nach der Einrichtung des Instruments $acv' = b'ci$. Folglich hat man zunächst $aci = v'cb'$ und hierauf weiter $v'cn = v'cb' + b'cn = aci + bcb' - bcl = bcl + bcb' - bcl = bcb' = \delta$. Es ist somit, wie bei der zweiten Lage:

$$\omega = 2\delta. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (121)$$

Da ferner $\omega' = 360^0 - \omega = 360^0 - 2\delta = 2(180^0 - \delta)$ und $\delta' = 180^0 - \delta$ ist, so hat man auch

$$\omega' = 2\delta'. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (122)$$

Fig. 173.



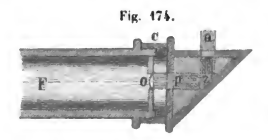
Hieraus entnimmt man, dass das schon für die zweite Lage der Alhidade aufgefundene Verhältniss der Winkel ω und δ für alle Lagen derselben gilt, und dass dieselbe Beziehung zwischen ω' und δ' stattfindet, wenn man δ' von dem zweiten Nullpunkt (o') in entgegengesetzter Richtung von δ zählt.

Da es, wie bei der zweiten Lage der Alhidade bemerkt wurde, nicht möglich ist, Winkel zwischen 130° und 180° auf dieselbe Art wie mit dem

Sextanten zu messen, so muss man diese Winkel (ω') mit Benützung der Gleichung (122) dadurch bestimmen, dass man vom Scheitel aus das Fernrohr auf den rechtseitigen Gegenstand (r) richtet, den linkseitigen Gegenstand (l) abspiegeln lässt und nach eingetretener Deckung der Bilder den Bogen (o′v) abliest, welcher zwischen dem zweiten Nullpunkt (o′) des Kreises und dem Anfangspunkt (v) des ersten Nonius enthalten ist. Der zweite Nonius (v′) gibt einen annähernd gleichen Bogen (ov′), welcher vom ersten Nullpunkt (o) ausgeht. Nimmt man aus den beiden Ablesungen (o′v, ov′) das Mittel, so ist hierdurch nach §. 138 der Einfluss der Excentricität der Alhidade beseitigt.

§. 162. **Gebrauch.** Es wurde bereits angeführt, wie man Winkel von 0° bis zu 180°, die in einer beliebigen Ebene liegen, durch zwei nur wenig von einander verschiedene Verfahren messen kann. Ist der zu messende Winkel so stumpf, dass er gar nicht oder nur wenig von 180° abweicht, so würde eine neue Schwierigkeit der Messung eintreten, indem jetzt zwar nicht mehr das Prisma und das Fernrohr, wohl aber noch der Kopf des Beobachters das Licht vom linkseitigen Gegenstand hinderte, auf den Spiegel zu gelangen, [1] wenn nicht vor dem Ocular (o) des Fernrohrs ein rechtwinkeliges Prisma (pz) so angeschraubt werden könnte, wie Fig. 174 zeigt.

Fig. 174.



Dieses Prisma reflectirt die aus dem Ocular tretenden Strahlen nach der Richtung za und macht es hierdurch möglich, dass der Beobachter seinen Kopf auf der Seite des Fernrohrs haben kann, welche den auf den Spiegel kommenden Strahlen gegenüberliegt.

Man begreift leicht, wie man mit Hilfe dieser Vorrichtung den Spiegelkreis gerade so benützen kann, wie das Prismenkreuz, nämlich zur Einstellung in eine gerade Linie (§. 110). Es ist nur nöthig, dass man die Alhidade auf Null stellt und, indem man das Fernrohr nach dem rechtseitigen, den Spiegel aber nach dem linken Gegenstande richtet, so lange vor- oder rückwärts geht, bis man durch das Ocularprisma die Deckung der Bilder von r und l wahrnimmt. Der Griff des Instruments steht alsdann in der gegebenen Geraden (rl). Diese Aufgabe kann selbstverständlich mit dem Spiegelsextanten nicht gelöst werden; dagegen lassen sich mit ihm wie mit dem Spiegelkreise rechte und andere Winkel abstecken, wenn man den Nonius auf die Zahl einstellt, welche der Grösse des abzusteckenden Winkels entspricht, vom Scheitel aus das Bild des einen gegebenen Objects auf die optische Axe des Fernrohrs bringt und den Stab, der das andere Object vorstellt, so lange fort verrücken lässt, bis sein Bild das erste deckt.

Wenn im vorigen Paragraph angeführt wurde, dass die Winkel zwischen

[1] Bei einem Winkel von 180° kommt das Licht in der Richtung oc (Fig. 173) auf den Spiegel ab, während dieser mit der Linie kp einen rechten Winkel bildet.

130° und 180° durch Anvisiren des rechten Schenkels gemessen werden müssen, so folgt daraus nicht, dass man nicht auch kleinere Winkel als 130° auf diese Weise messen kann: es lassen sich offenbar alle jene Winkel so bestimmen, deren linke Objecte noch ein Bild im Fernrohr geben, wenn dieses auf den rechtseitigen Gegenstand gerichtet ist. Dieses thun aber bei dem Pistor'schen Spiegelkreise alle Winkel zwischen 100° und 180°. Es ist somit klar, dass die Winkel zwischen 100° und 130° auf zwei Weisen gemessen werden können, indem man bei der einen Messung den linken und bei der andern den rechten Schenkel anvisirt.

Was die Messung der Vertikalwinkel betrifft, so gilt hier Alles, was darüber bei dem Spiegelsextanten angeführt wurde.

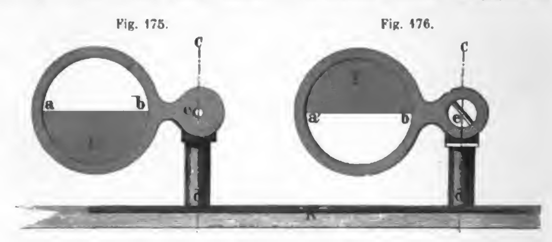
§. 163. **Prüfung und Berichtigung** des Spiegelkreises unterscheiden sich nur sehr wenig von jenen des Spiegelsextanten. Es ist nämlich vor dem Gebrauch des Spiegelkreises zu untersuchen:

1) ob der Limbus und die Nonien richtig getheilt sind,
2) ob der Spiegel ebene und parallele Seiten hat;
3) ob die Seitenflächen des Prisma's eben und der Prismenaxe parallel sind;
4) ob der Spiegel und das Prisma auf der Limbusebene senkrecht stehen;
5) ob die Fernrohraxe dieser Ebene parallel läuft;
6) ob ein Collimationsfehler vorhanden und wie gross er ist;
7) ob die Einschlaggläser eben und parallel sind.

Die erste Untersuchung wird nach §. 138 und die zweite nach §. 28 vorgenommen. Was die dritte betrifft, so genügt es zunächst, sich auf dieselbe Weise wie bei einem Spiegel zu überzeugen, ob die Prismenflächen eben sind, da man bei der vierten Untersuchung findet, ob die Ebenen des Prisma's mit dessen Axe parallel laufen. Nachdem man nämlich nach §. 153 Nr. 3 den senkrechten Stand des grossen Spiegels, wenn er nicht vorhanden gewesen seyn sollte, hergestellt hat, richtet man das Fernrohr auf ein sehr weit entferntes, gut beleuchtetes und scharf begrenztes Object, und versucht, durch Drehung der Alhidade dieses Object und sein doppelt gespiegeltes Bild zur Deckung zu bringen. Gelingt dieses vollständig, so sind alle Prismenebenen zur Limbusebene senkrecht und der Prismenaxe parallel; gelingt aber diese Deckung nicht, so stehen entweder alle oder eine oder zwei Prismenebenen nicht senkrecht auf der Ebene des Instruments. Man wird nun zunächst den Stand des Prisma's durch seine Stellschrauben mehrmals ändern und zusehen, ob hierdurch die mangelhafte Deckung, welche man vorhin beobachtet hat, verbessert oder gar beseitigt wird. Ist letzteres der Fall, so ist das Prisma richtig: kann man es aber in keiner Weise dahin bringen, dass das Object und sein Bild sich decken, so ist das Prisma pyramidenförmig und daher im Instrumente eben so unbrauchbar wie ein prismatischer Spiegel. Die fünfte und sechste Untersuchung weichen von der vierten und fünften des Spiegelsextanten in keiner Weise ab, wesshalb hier

auf die Nummern 4 und 5 des §. 153 verwiesen wird. Die Prüfung der Einschlaggläser kann zwar auch wie bei dem Spiegelsextanten (§. 153, Nr. 6) vorgenommen werden; allein in dem vorliegenden Falle, wo sich der Träger der Einschlaggläser um eine auf der Instrumentenebene senkrecht stehende Axe (d) so weit drehen lässt, dass die Gläser zwei einander entgegengesetzte

Fig. 175. Fig. 176.



Lagen erhalten, ist folgende Untersuchung einfacher. Man bestimme nämlich auf bekannte Weise den Collimationsfehler des Instruments, indem man das zu untersuchende Glas (E) vor das Prisma stellt, wie Fig. 175 zeigt. Hierauf drehe man dieses Glas um sein Scharnier und dessen senkrechten Träger (d) in die Stellung der Fig. 176. Während vorhin die untere Hälfte des Objectivs durch das Einschlagglas verdeckt war, ist jetzt die obere Hälfte gedeckt, und wenn vorhin die Glasflächen nach oben oder nach rechts zusammenliefen, schneiden sie sich jetzt nach unten oder nach links. In dieser neuen (zweiten) Lage des Glases bestimme man abermals den Collimationsfehler. Erhält man ihn eben so gross wie das erste Mal, so ist das Glas richtig; wird er aber grösser oder kleiner als bei der ersten Bestimmung und ist sonst sorgfältig gearbeitet worden, so rührt die Abweichung von der prismatischen Gestalt des Einschlagglases her, und es ist der Fehler, den dieses Glas bewirkt, gleich der halben Differenz der Collimationsfehler für die beiden Lagen des Glases. In gleicher Weise kann man auch das zweite Einschlagglas für sich und dann in Verbindung mit dem ersten untersuchen. Sind die aufgefundenen Fehler, welche von den Einschlaggläsern herrühren, so bedeutend, dass sie nicht vernachlässigt werden können, so müssen diese Gläser durch neue bessere ersetzt oder die Fehler bei jeder Messung in der rechten Weise in Rechnung gebracht werden.

Vierter Abschnitt.

Instrumente zum Längenmessen.

§. 164. Zur unmittelbaren Messung von Entfernungen zweier Punkte, welche nicht lothrecht über oder unter einander liegen, bedient sich der praktische Geometer je nach dem Grade der Genauigkeit, welchen seine Arbeit haben soll, oder nach der Beschaffenheit des Bodens, auf dem er misst, oder endlich nach der Zeit, die ihm für eine bestimmte Messung gegeben ist, verschiedener Vorrichtungen, welche sich in vier Gattungen eintheilen lassen, nämlich in Massstäbe, Messketten, Messbänder und Distanzmesser. Jede dieser Gattungen besteht aus mehreren Arten, wovon wir die wichtigsten beschreiben und näher betrachten werden.

1. Massstäbe.

§. 165. Der Ausdruck Massstab bezeichnet erstens eine Vorrichtung mit genauen Längenmassen, welche entweder zur Abgleichung anderer Massstäbe oder zur unmittelbaren Ausmessung von geraden Linien dient; zweitens das Verhältniss der Entfernung zweier Punkte auf einem Plane zu ihrem Abstande in dem natürlichen Grundrisse; und drittens die Verjüngung der Längenmasse, welche zum Zweck des Zeichnens auf einem passenden Stoffe abgetragen wird. Hier gebrauchen wir das Wort Massstab nur in der ersten Bedeutung; in den beiden letzeren wird es beim Plan- und Kartenzeichnen angewendet.

Die Massstäbe zur Abgleichung oder Ausmessung werden aus verschiedenen Stoffen angefertigt: aus Metall oder Glas, wenn sie die gesetzliche Längeneinheit eines Landes darstellen und zur Abgleichung anderer Massstäbe dienen (Urmassstäbe); bloss aus Metall, wenn sie zu den feinsten Längenmessungen bei Erforschung der Gestalt und Grösse der Erde oder eines Landes gebraucht werden (Messstangen); aus Holz, wenn es sich entweder um zwar minder feine aber doch immerhin noch sehr genaue Längenmessungen (Messlatten), oder um ganz gewöhnliche Messungen handelt (Messstäbe).

Das Spiegelglas ist für Normal- oder Urmassstäbe ein sehr geeignetes Material; zu Messstangen taugt es aber wegen seiner Zerbrechlichkeit nicht: hiezu sind nur Metalle, wie Eisen, Zink und Kupfer verwendbar, weil sie nicht bloss fester sind als Glas und Holz, sondern sich auch regelmässiger als das letztere ausdehnen und zusammenziehen. Der Verwendung des Holzes zu Messstangen steht übrigens weniger die Unregelmässigkeit in der an und für sich sehr geringen Ausdehnung,[1] als vielmehr die unter

[1] Nach Kater dehnt sich das Tannenholz für 1° C. nur um 0,000004 der Länge aus, welche es bei 0° hat.

dem Namen Schwinden bekannte Formveränderung entgegen, welche aus dem Einflusse der atmosphärischen Feuchtigkeit entspringt und trotz aller Vorsichtsmassregeln niemals ganz zu vermeiden ist. Damit soll aber keineswegs behauptet werden, dass man mit gut gearbeiteten Messlatten aus völlig trockenem Tannenholze nicht noch eine Genauigkeit der Längenmessung von 1 auf 10 000 erreichen könnte.

Urmassstäbe.

§. 166. Die Ur- oder Normalmassstäbe werden in den Staatsarchiven sorgfältig aufbewahrt und niemals zu unmittelbaren Messungen, sondern nur zur Abgleichung derjenigen Massstäbe gebraucht, welche in der praktischen Geometrie und bei wissenschaftlichen Untersuchungen zu genauen Längenmessungen dienen. Man unterscheidet zwei Formen derselben: nämlich solche, welche das Ur- oder Muttermass bei einer bestimmten Temperatur durch den Abstand ihrer ebenen oder abgerundeten Endflächen angeben (Massstäbe mit Endflächen, étalons à bouts) und solche, welche die einfache oder zusammengesetzte Längeneinheit bei einem bestimmten Wärmegrad durch die Entfernung zweier zur Axe des Massstabs senkrechter Striche darstellen (Massstäbe mit Endstrichen, étalons à traits). Die Urmassstäbe mit Endflächen verdienen stets den Vorzug vor denen mit Endstrichen, weil sie erfahrungsmässig nicht bloss eine leichtere und genauere Abgleichung mit anderen Massstäben gestatten, sondern auch bei einer geringen Biegung, die sie fast immer erleiden, wenn ihre Unterlage nicht eine vollkommene und ganz feste Ebene ist, ihre Länge weniger ändern als jene. Das Letztere ist leicht einzusehen. Denn da bei der Biegung eines wagrecht liegenden Stabes dessen obere Fasern zusammengedrückt, die unteren ausgedehnt, die mittleren aber weder verlängert noch verkürzt werden, so behält die Axe des Stabes ihre Länge bei, während der Bogen zwischen den auf der oberen Fläche des Stabes befindlichen Strichen kürzer wird. Bei der Abgleichung wird nun zwar nur die Sehne der Bögen zwischen den Endpunkten oder den Endstrichen benützt, eine einfache Ueberlegung zeigt aber, dass die Sehne zwischen den Mittelpunkten der Endflächen weniger von der Normallänge abweicht als die Sehne zwischen den Endstrichen auf der Oberfläche des Massstabes.

Einer der vorzüglichsten Urmassstäbe, welche es gibt, ist ohne Zweifel der preussische, welchen Bessel im Jahre 1837 herstellte. Der drei Fuss lange prismatische Stab besteht aus Gussstahl und hat einen quadratischen Querschnitt von dreiviertel Zoll Seite. Seine Enden sind durch abgestumpfte Kegel von Sapphir in der Art gebildet, dass die grösseren Grundflächen dieser in Gold gebetteten Kegel sich im Inneren des Stabes befinden und die kleineren abgerundeten nur wenig über die Enden des Stahlstabs vorstehen. Gegen Abnützung der Endflächen bei Vergleichungen schützt die Härte der Steine, und gegen die Erweiterung der Kegelbetten und die damit verbundene

Längenänderung, welche in Folge einer Rostbildung eintreten könnte, das Gold. Die Entfernung der beiden äussersten Endflächen der Sapphire, in der Axe des Stabes und bei $16^1/_4{}^0$ C gemessen, beträgt nach der Aufschrift des Massstabes 0,00063 Linien weniger als drei preussische oder rheinländische Fusse.

Von diesem Normalmassstabe kann man Copieen durch die kön. Normalaichungscommission in Berlin beziehen. Dieselben bestehen, wie das Urmass, aus weichem Gussstahl, haben aber keine Sapphir-, sondern Stahlenden, welche nach der Befestigung am Stabe senkrecht zur Axe abgeschliffen und fein polirt werden. Zum Schutze gegen Staub und Rost sind sie mit messingnen Kapseln bedeckt.

Die Arbeiten, welche Bessel bei Herstellung des preussischen Urmasses vornahm, hat derselbe in dem im Jahre 1839 von dem preussischen Ministerium der Finanzen und des Handels bekannt gemachten Werke: „Darstellung der Untersuchungen und Massregulirungen, welche in den Jahren 1835—1838 durch die Einführung des preussischen Längenmasses veranlasst worden sind", beschrieben. Wir verweisen hier um so mehr auf dieses lehrreiche Werk, als es ausser unserer Absicht liegt, hier Näheres über die Vergleichung von Normalmassen unter sich und mit anderen Massstäben mitzutheilen. Wer sich in dieser Hinsicht weiter unterrichten will, mag die Abhandlung von Steinheil in den Denkschriften der Münchener Akademie der Wissenschaften (1844, Bd. IV.) über die Copie des Meters der Archive in Paris und die von Abbildungen begleitete Beschreibung der Comparatoren des Wiener polytechnischen Instituts von Stampfer in den Jahrbüchern dieses Instituts (Bd. 18, S. 149—210) nachlesen.

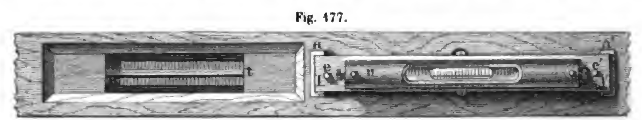
Messstangen.

§. 167. **Apparat nach Reichenbach.** Man hat früher die Messstangen senkrecht auf ihre Axen abgeschnitten und bei der Längenmessung mit den stumpfen Endflächen aneinandergestossen. Hierdurch wurde in der Regel der Erfolg der Mühe, welche man auf das Vergleichen dieser Stangen mit den Urmassen verwendet hatte, wieder vernichtet. Borda unterliess zuerst das Aneinanderstossen der Messstangen, indem er dieselben an einem Ende mit einem eingetheilten Schieber versah, der bis an das andere Ende der nächstliegenden Stange gerückt werden konnte. Die Berührung eines leichten Schiebers vermochte eine schwere Messstange nicht mehr zu verrücken; und da der Schieber mit einem Nonius versehen war, so konnte man den Abstand der Endflächen der Messstangen mit ziemlicher Genauigkeit messen, so lange diese ganz wagrecht lagen: bei schiefer Lage traten, wie leicht zu begreifen, wegen der nicht mehr parallel laufenden Endflächen Fehler ein, die eine weitere Verbesserung der Messstangen wünschen liessen. Diese Verbesserung ging von Reichenbach aus, indem er die Messstangen an ihren Enden mit Schneiden versah und den Messkeil einführte, der in §. 76

beschrieben wurde. Seit Reichenbach wendet man fast ausschliesslich Messstangen mit Schneiden und Keilen an; wenigstens sind die bedeutendsten Grad- und Landesmessungen mit solchen Stangen gemacht worden. Wir legen unserer Beschreibung den Basisapparat zu Grunde, welchen Schwerd nach dem Münchener, womit die grosse Speyerer und die Nürnberger Basis gemessen wurde, angefertigt und zur Messung der kleinen Speyerer Basis, wovon schon S. 101 die Rede war, benützt hat.

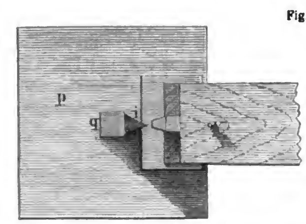
Dieser Apparat besteht aus 5 Messstangen von Eisen, jede von 4 Meter Länge und 1 Centimeter Dicke und Breite. Die beiden Enden jeder Stange sind von federhartem Stahl und keilförmig zugearbeitet; während die eine Kante lothrecht ist, liegt die andere wagrecht; beide stehen senkrecht zur Axe der Messstange. Jede solche Stange befindet sich in einem hölzernen Gehäuse, aus dem nur die Stahlkanten 2 Centimeter weit hervorragen. Die Bretter sind, um das Verziehen zu hindern, der Länge nach entzwei geschnitten und mit entgegengesetzten Fasern zusammengeleimt, und zur Verstärkung des Gehäuses gegen Biegung dient ein an der unteren Fläche angebrachter Riegel von 6 × 6 Quadratcentimeter Querschnitt. In der Mitte des Gehäuses ist jede Eisenstange festgeklemmt, nach den Enden hin kann sie sich aber frei ausdehnen. Neben dieser Klemmung liegt das Thermometer, womit die Temperatur der Messstange gemessen wird, auf einem dünnen Brettchen so, dass die Kugel das Eisen berührt und die Röhre der

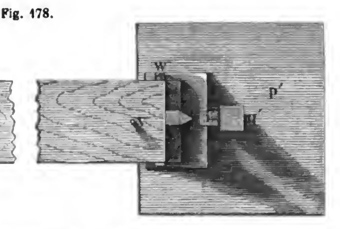
Fig. 177.



Axe des Massstabs parallel läuft. Ueber die Scala t in Fig. 177 (die eine Oberansicht des mittleren Theils einer Messstange mit ihrem Gehäuse vorstellt), ist der Deckel des Gehäuses durchbrochen und mit einer Glasscheibe versehen, welche vor und nach der Ablesung des Thermometers mit einem Brettchen zugedeckt wird. Mitten auf dem Gehäuse ruht eine Röhrenlibelle (n) auf zwei Messingplättchen (a, a'). Das Lineal (l l'), welches die Libelle trägt und diese Blättchen berührt, wird an einer seitlichen Bewegung durch zwei lothrechte Stifte (e, e') gehindert; es kann sich jedoch auf und ab bewegen, da diese Stifte nur lose hindurch gehen. Zur Messung des Neigungswinkels der Massstabaxe gegen den Horizont dient der Messkeil, welcher in folgender Weise angewendet wird. Man schiebt ihn auf der unteren Seite der Libelle so weit zwischen a und l oder a' und l', bis die Luftblase einspielt, und bemerkt die Ordinate, bis zu welcher er eingedrungen ist: aus der Länge derselben und der Länge des Lineals l l' ergibt sich die Tangente des gesuchten Neigungswinkels. Um die Messstangen genau in die zu messende gerade Linie einstellen zu können, befinden sich auf den Enden jedes Gehäuses zwei lothrechte Visirstifte (v, v) welche durch die Axe der Messstange gehen.

Fig. 178.



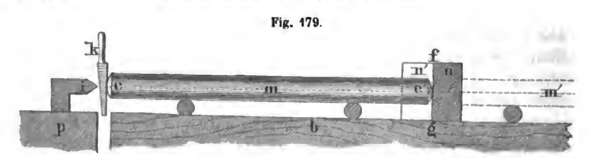


Der Comparator (Massvergleicher), welchen Prof. Schwerd zur Bestimmung der Längen der einzelnen Messstangen anwandte, hatte folgende Einrichtung. In zwei 4 Meter von einander entfernten und auf guten Fundamenten ruhenden Steinpfeilern (p, p') standen zwei mit Blei eingegossene lothrechte eiserne Prismen (q, q') von $0^m,15$ Höhe, welche an den einander zugewendeten Seiten Stahlkeile (i, i') trugen, wovon der eine mit einer wagrechten, der andere mit einer lothrechten Schneide versehen war. Diese Schneiden standen auf der geraden Linie, welche ihre Mitten verband, senkrecht und waren in dieser Richtung $4^m,004$ von einander entfernt. Bei der Vergleichung der Stangen wurde eine nach der anderen so auf den Comparator gebracht, dass je eine wagrechte Kante einer lothrechten gegenüberstand und ein kleiner Zwischenraum blieb, der durch den bekannten geometrischen Keil gemessen werden konnte. Es wurde durchaus vermieden, dass eine Schneide der abzugleichenden Messstange den Comparator selbst berührte, weil bei dieser Berührung, wenn sie auch ganz sorgfältig geschieht, die Eisenprismen q, q' stets etwas zurückgedrückt werden. Um beim Auflegen und Richten der Messstangen jede aus starker Reibung entspringende Verrückung der Steinpfeiler zu vermeiden, wurden die Gehäuse an einem Ende auf eine dünne Walze (w) gelegt, wodurch sie leicht zu verschieben waren. Eine kleine Verschiebung wurde immer vorgenommen, wenn man eine Stange mehrmals nacheinander messen wollte: hiebei musste nothwendig die Summe der Ordinaten dieselbe bleiben, wenn keine Temperaturveränderung stattfand. Der Unterschied in den Längen zweier Messstangen ist selbstverständlich dem Unterschiede der für diese Stangen gefundenen Ordinatensummen gleich.

Hat man zur Vergleichung keine schon genau bestimmte Messstange von gleicher Grösse und Einrichtung wie die übrigen, so lassen sich mit dem eben beschriebenen Comparator bloss die Unterschiede der einzelnen Messstangen, nicht aber ihre wahren Längen auffinden. Um diese zu erhalten, muss eine der Stangen mit einem Normalmasse verglichen werden. Da aber die Urmassstäbe anders eingerichtet und auch viel kürzer sind als die Messstangen (in der Regel wechselt ihre Länge zwischen 3 und 6 Fuss), so ist zur Vergleichung zweier so verschiedener Massstäbe ein Comparator erforderlich, welcher das Abschieben des Urmassstabes gestattet, der je

nach seiner Grösse zwei-, drei- oder viermal kleiner ist als die Messstange. Um zwischen den Endpunkten des Comparators eine passende Unterlage zu erhalten, befestigt man innerhalb der beiden Steinpfeiler p, p' (Fig. 179) einen starken vierkantigen Balken b aus trockenem Tannenholze in wagrechter Lage so, dass der aufgelegte Urmassstab in die Höhe der Schneiden i, i' kommt. Auf diesem Balken zieht man zwei Linien, die der Mittellinie i i' parallel und um die halbe Massstabbreite von ihr entfernt sind. Zwischen diesen Linien geschieht die Abschiebung des Urmassstabes mit Hilfe zweier genau geschliffener Messingplatten in folgender Weise.

Fig. 179.



Man bringt das Urmass (m) in die gegebene Richtung, steckt zwischen dem vorderen Ende e und der Schneide i den Keil ein, schiebt die Messingplatte n an das andere Ende e' des Urmasses, nimmt hierauf den Keil und den Massstab m weg, rückt ganz dicht die zweite Platte n' an die erste n, legt jetzt das Urmass m an die Platte n' an, und verfährt weiter wie vorhin, bis man an das andere Ende i' des Comparators gelangt, wo der Raum zwischen dem Ende e' des Normalmasses und der Schneide i' durch den Keil gemessen wird. Es versteht sich von selbst, dass man sowohl bei der Abgleichung der Messstangen unter sich als bei der Vergleichung einer derselben mit dem Urmasse fortwährend die Temperatur der in Untersuchung befindlichen Massstäbe beobachten und jede ungleiche Erwärmung derselben vermeiden muss.

Schwerd hat eine Messstange Nr. 1 mit dem eisernen Meter-Etalon von Lenoir, welcher sich auf dem k. topographischen Bureau in München befindet und der schon früher zur Abgleichung der Messstangen für die grossen Grundlinien zur bayerischen Landesvermessung benützt wurde, verglichen und gefunden, dass dieselbe bei einer Temperatur von 13° R. eine Länge von $4^m - 0^m,0002607$ hat. Da er die Längen der Messstangen Nr. 2 bis 5 bereits durch die Länge der ersten ausgedrückt hatte, so waren somit auch deren absolute Längen bekannt; es war nämlich bei 13° R.:

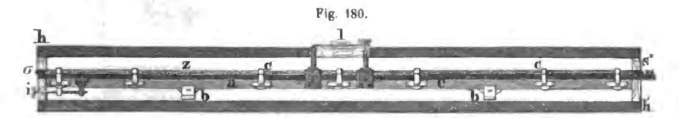
die Stange Nr. 1 = $4^m - 0^m,0002607 = 4^m - 0^m,0002607$
„ „ Nr. 2 = Nr. 1 $+ 0^m,0000582 = 4^m - 0^m,0002025$
„ „ Nr. 3 = Nr. 1 $- 0^m,0002782 = 4^m - 0^m,0005389$
„ „ Nr. 4 = Nr. 1 $- 0^m,0003616 = 4^m - 0^m,0006223$
„ „ Nr. 5 = Nr. 1 $- 0^m,0002708 = 4^m - 0^m,0005315$
und eine ganze Lage von 5 Stangen somit $= 20^m - 0^m,0021559$.

Den mittleren Fehler dieser Längenbestimmungen nimmt Schwerd nach seinen

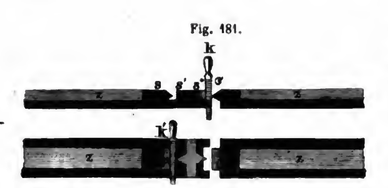
Untersuchungen hierüber zu 1,5 Milliontel jeder einzelnen Länge, d. h. für eine Messstange zu 0,006 Millimeter an. Die Ausdehnung des Eisens, aus welchem die Messstangen bestehen, wurde hiebei für 1⁰ R und 1^m Länge gleich 0^m,00001445 gefunden.

§. 168. Apparat von Bessel. Dieser Apparat wurde bei der Gradmessung in Ostpreussen angewendet und ist in dem darüber erschienenen Werke von Bessel beschrieben. Er besteht aus 4 Messstangen, wovon jede aus einer Eisenschiene und einem Zinkstreifen zusammengesetzt ist. Durch die Verbindung zweier Metalle mit verschiedenem Ausdehnungsvermögen ist es, wie wir bald sehen werden, möglich, die Temperatur und Ausdehnung der Messstangen genauer als durch ein Quecksilberthermometer zu messen, welches in der Regel nur die Temperatur der Luft im Gehäuse der Stangen anzeigt, während die Erfahrung lehrt, dass der Wärmegrad eines festen Körpers von dem seiner Atmosphäre sehr abweichen kann, namentlich wenn sich die Temperatur der letzteren schnell ändert. Von den folgenden Figuren 180 bis 187 ist die erste nicht bloss in kleinerem Massstabe als die übrigen gezeichnet, sondern auch nach der Länge etwas verkürzt, um auf dem gegebenen beschränkten Raum eine vollständige Uebersicht der Anordnung einer Messstange zu gewähren.

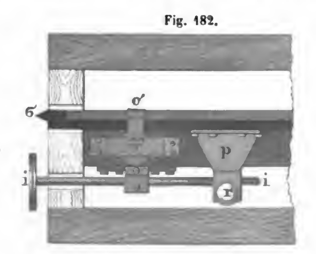
Fig. 180.

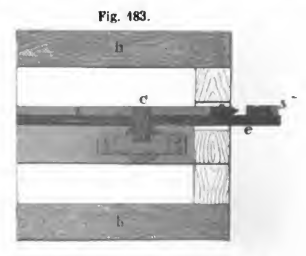


Jede der Messstangen des Bessel'schen Basisapparates besteht zunächst aus einer Eisenschiene (e) von 2 Toisen Länge, 12 Linien Breite und 3 Linien Dicke. Auf dieser Schiene liegt ihrer ganzen Länge nach ein eben so dicker aber nur 6 Linien breiter Zinkstreifen (z). Die einander zugewendeten Flächen berühren sich möglichst gut, da sie abgehobelt sind. An einem Ende — wir wollen es das linke nennen — ist der Zinkstreifen auf die Eisenschiene geschraubt und gelöthet; ausserdem aber haben beide keine feste Verbindung. Beide Enden des Zinkstreifens sind mit keilförmigen Stahlstücken (σs) bewaffnet, deren Kanten den Berührungsflächen der Metallstreifen parallel sind. Auf dem rechten Ende der Eisenschiene, welche etwas über das Zinkende vorsteht, ist, wie aus Fig. 181 (wovon der obere Theil einen Aufriss, der untere einen Grundriss zweier Stangenenden vorstellt) entnommen werden kann, ein Stahlstück ($s's''$) befestigt, welches zwei aufrechtstehende Schneiden hat, von denen die eine (s') dem bewaffneten Zinkende (s) und die andere (s'') der wagrechten Kante (σ) der nächsten Messstange sich zuwendet. Durch einen Keil k kann man, wie bei dem Reichenbach'schen Apparat, den Abstand $\sigma s''$ zweier Messstangen, und durch einen zweiten Keil k' die Entfernung ss' messen, welche in

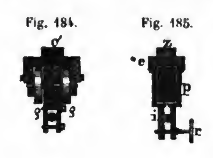

Fig. 181.

einer bestimmten Beziehung zur Temperatur der Messstange steht. Jede solche Stange ist von einem hölzernen Kasten (hh') umgeben und nach Fig. 180 in sieben Punkten (c, c) unterstützt. Brächte man diese Unterstützungspunkte in den Wänden des Kastens selbst an, so würde die Messstange den Einflüssen, welche Feuchtigkeit und Wärme auf das Holz ausüben, unmittelbar ausgesetzt seyn. Um dieses zu vermeiden, sind die Ruhepunkte an einer 6 Linien dicken und 14 Linien hohen Eisenschiene (a) angebracht, welche durch den ganzen Kasten


Fig. 182.

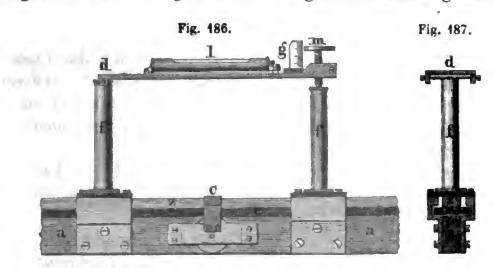

Fig. 183.

geht und mit ihrer hohen Kante auf zwei an den Wänden befestigten gabelförmigen Trägern (b,b) ruht. Die Unterstützungen (c,c) bestehen (nach den Figuren 182 und 183, welche die beiden Enden einer Messstange nebst Gehäuse vorstellen, und nach Fig. 184, welche ein Schnitt durch die Stelle c' der Fig. 182 ist) aus Rollen (ϱ,ϱ), von denen je zwei sich gegenüberstehen und eine gemeinschaftliche von der Schiene a getragene Axe haben. Die Durchmesser dieser Rollen sind nicht ganz gleich, sondern die der mittleren um so viel grösser als die aus dem Eigengewicht entspringende Biegung der Schiene a für den Fall fordert, dass die obersten Stellen der Rollen alle in einer Ebene liegen sollen. Auf dieser Ebene ruht die Eisenschiene e, und längs ihr lässt sich die ganze Messstange (e z) mit Hilfe einer Mikrometerschraube i (Fig. 182), welche unterhalb der Rolle c' in einer Kugel geht (Fig. 184) und in dem Ansatz p ihre Mutter hat (Fig. 185), sehr leicht etwas vor- und rückwärts bewegen. Zur Verhütung einer Seitenbewegung der Messstange dient ein an den Rollen angebrachter und die Metallstreifen fast berührender Bügel (c'). Die Röhrenlibelle (l), womit die Messstange wagrecht gestellt oder ihre Neigung


Fig. 184. Fig. 185.

gegen den Horizont gemessen werden kann, ist auf die aus Fig. 186 deutlich zu entnehmende Weise mit der Eisenschiene a verbunden. Durch eine Mikrometerschraube (m), deren Kopf in 50 Theile getheilt ist, kann sie um eine wagrechte Axe (d) gedreht und folglich horizontal gestellt werden.

Fig. 186. Fig. 187.



Liest man bei dieser Stellung den Stand des Schraubenkopfes m gegen die auf der Libellenunterlage befestigte Scala g ab, und weiss man, bei welchem Stande die Libellenaxe der Messstange parallel läuft, so ist der Unterschied der Ablesungen dem Neigungswinkel der Messstange proportional und es kommt, wenn man den Neigungswinkel selbst will, nur darauf an, durch Versuch zu bestimmen, welcher Höhen- oder Tiefenwinkel der Libellenaxe einem Scalatheil entspricht. Mit der Schraube m und der Scala g können an dem Bessel'schen Basisapparate Neigungswinkel der Messstangen bis zu 3 Graden gemessen werden. Was die Keile betrifft, welche zu diesem Apparate gehören, so sind dieselben aus Glas und war von ihnen bereits in §. 76 die Rede.

Die Aenderungen, welche die Wärme in der Länge einer Messstange bewirkt, werden an dem so eben beschriebenen Apparate durch den Abstand (s s') des freien Zinkendes (s) von der nach innen gewandten Schneide (s') des auf der Eisenschiene e befestigten Stahlstücks (s's'') gemessen, und der Abstand selbst wird durch den Glaskeil k' (Fig. 181) ermittelt. Da sich das Eisen bei gleicher Temperaturänderung weniger ausdehnt als das Zink, so ist klar, dass es eine Temperatur (T^0) geben muss, bei welcher der Abstand ss' null ist, d. h. die Schneiden s und s' sich berühren, und eben so ist klar, dass die Messstangen keiner höheren Temperatur als dieser ausgesetzt werden dürfen, wenn sich die Schneiden s und s' nicht in einander drücken und folglich beschädigen sollen. Je weiter die Temperatur unter T^0 herabsinkt, desto mehr entfernen sich die Schneiden s und s' von einander, desto grösser wird also der Abstand ss'. Heisst

L die Länge ($\sigma s''$) der Eisenschiene (e) der Messstange bei der Temperatur T^0;

L' die Länge (σs) des Zinkstreifens (z) der Messstange bei derselben Temperatur T^0;

k der Ausdehnungscoefficient des Eisens für einen Grad der Scala, nach welcher T gemessen wird;

k' der Ausdehnungscoefficient des Zinks für denselben Grad, wofür k gilt; und ist endlich

a der durch den Glaskeil (k') angezeigte Abstand (s s') der beiden Schneiden s und s' bei der Temperatur t^0:

so hat sich bei der Senkung der Temperatur von T auf t der Eisenstreifen um die Länge $kL\,(T-t)$ und der Zinkstreifen um $k'L'\,(T-t)$ verkürzt. Die Verkürzung des Zinkstreifens ist, weil $k' > k$, bedeutender als die des Eisenstreifens: es geht folglich der Abstand Null der Schneiden s und s' in a über, und es ist somit

$$a = k'L'(T-t) - kL(T-t) = (T-t)(k'L' - kL); \quad . \quad (123)$$

woraus man die Temperatur, welche die Messstange hat, nämlich

$$t = T - \frac{a}{k'L' - kL} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

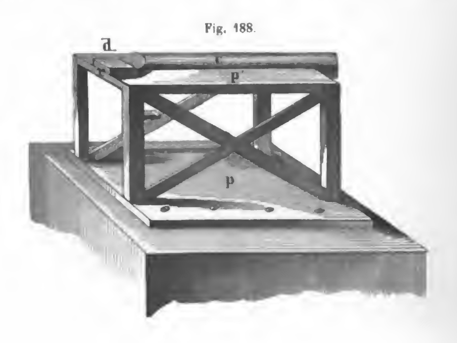
findet, während die Länge der Messstange bei dieser Temperatur

$$l = L - kL(T-t) = L\left(1 - \frac{ak}{k'L' - kL}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

ist. Man entnimmt hieraus, dass man die Länge l der Messstange bei irgend einer Temperatur t^0, welcher der Abstand a entspricht, ohne ein Quecksilberthermometer erhält, wenn nur die Coefficienten k und k', die Längen L und L', sowie die Ordinaten des Messkeils vorher genau bestimmt sind.

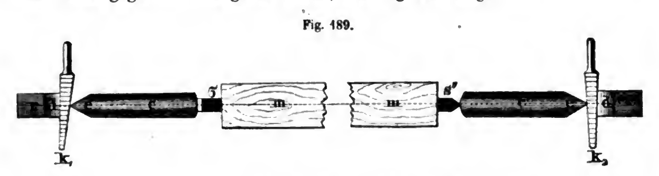
Der Comparator, dessen sich Bessel zur Abgleichung seiner Messstangen bediente, hatte folgende Einrichtung. Auf einer festen unbiegsamen Holzunterlage, welche einige Fuss länger war als die abzugleichenden Messstangen und die eine unveränderliche wagrechte Lage hatte, wurden in einer Entfernung, welche die Länge einer Stange etwas übertraf, zwei kleine Metallgestelle, wie Fig. 188 eines zeigt, mit ihren Grundplatten (p) in der Art festgeschraubt, dass die auf den oberen Platten (p') befindlichen Stahl-

Fig. 188.



stücke (r) nach aussen und die abgerundeten Endflächen der polirten Stahlcylinder (c), welche sich in einer hohlen Bahn auf den Platten p′, p′ verschieben lassen, nach innen standen. Die Axen dieser Cylinder oder ihrer Bahn mussten hiebei in die gerade Linie gebracht werden, welche auf den Schneiden d, d der Stahlstücke r, r senkrecht stand und durch ihre Mittelpunkte ging. Die lothrechten Schneiden der Cylinder c, c standen den wagrechten der Stahlstücke r, r gegenüber und es konnte ihr Abstand von einander durch Messkeile (k, k′) bestimmt werden. Zwischen die kugelförmigen Endflächen der Cylinder c, c wurde die Messstange (m) so gelegt, dass ihre Axe mit jener der Cylinder zusammenfiel und folglich die Mitten der Kanten σ und s″ die Mittelpunkte der Kugelflächen der Cylinder berührten, wenn man diese gegen die Stange so schob, wie Fig. 189 zeigt.

Fig. 189.



Nennt man A den unveränderlichen Abstand der Schneiden d, d′ von einander; e, e′ die Längen der Cylinder c, c′; u′, v′ die Dicken der eingeschobenen Keile an der Berührungsstelle, und l′ die Länge der Messstange m bei dieser Vergleichung: so ist offenbar

$$A = l' + e + e' + u' + v'.$$

Für eine zweite Messstange von der Länge l″ hat man, wenn u″, v″ die Keildicken vorstellen:

$$A = l'' + e + e' + u'' + v'',$$

und hieraus den Längenunterschied der beiden Stangen

$$l' - l'' = (u'' + v'') - (u' + v') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

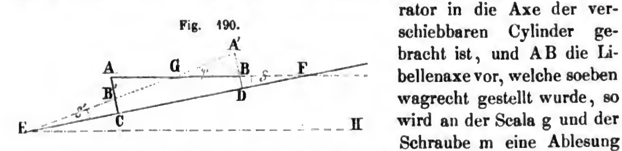
gleich der Differenz der Ordinatensummen wie bei dem Schwerd'schen Comparator. Es lassen sich also die Stangen leicht unter sich vergleichen, wenn die Keile genau bestimmt sind; aber ihre absolute Länge erfordert eine Vergleichung mit dem Normalmasse. Bessel hatte hiezu eine Toise, welche, da die Messstangen zwei Toisen lang waren, einmal abgeschoben werden musste. Dieses Abschieben kann in derselben Weise wie das des Meters, den Schwerd zur Abgleichung seiner Messstangen benützte (Seite 258), geschehen: die Figur 189 gibt davon einen Begriff, wenn man sich statt der Messstange m zweimal die Normaltoise gesetzt denkt. Bessel's Verfahren wich zwar in der Ausführung von dem Schwerd'schen etwas ab, dem Wesen nach aber war es von diesem nicht verschieden. Wir werden es daher nicht weiter beschreiben, sondern sofort die Resultate anführen, welche nach oft wiederholten und mit den vorausgegangenen Abgleichungen verbundenen Versuchen und Rechnungen daraus hervorgingen. Bezeichnen

nämlich a_1, a_2, a_3, a_4 die durch die Keile gemessenen und in Duodecimallinien ausgedrückten Abstände der Schneiden s und s' auf den Messstangen Nr. 1 bis Nr. 4, so ist die

Länge der Stange Nr. 1 = 1728,8152 — 0,54033 a_1 Linien;
" " " Nr. 2 = 1729,5153 — 0,55976 a_2 "
" " " Nr. 3 = 1729,0454 — 0,57575 a_3 "
" " " Nr. 4 = 1729,0909 — 0,58103 a_4 "

Schliesslich ist noch anzuführen, wie die Ablesung w an der Scala g gefunden wird, welche der parallelen Lage der Libellen- und Massstabaxe entspricht, und wie gross der Neigungswinkel p ist, um den die Libellenaxe bei einer ganzen Umdrehung der Schraube ihre Lage ändert. Stellt in Fig. 190 die Linie EF die Axe der Messstange, welche auf dem Comparator in die Axe der verschiebbaren Cylinder gebracht ist, und AB die Libellenaxe vor, welche soeben wagrecht gestellt wurde, so wird an der Scala g und der Schraube m eine Ablesung n' gemacht werden. Setzt man hierauf die Messstange mit der Libelle um, so behält die Axe der Stange ihre Lage EF bei, die Libellenaxe aber kommt in die Richtung A'B'. Wird nun die Libelle wieder zum Einspielen gebracht und der neue Stand n" der Schraube abgelesen, so ist die Differenz der Umdrehungen n" — n' dem Neigungswinkel φ, um welchen in dem letzten Falle die Libellenaxe gegen den Horizont geneigt war, proportional. Dieser Winkel ist aber doppelt so gross als ihr Neigungswinkel δ gegen die Massstabaxe; daher hat man die Ablesung, welche der parallelen Lage der Libellenaxe entspricht,

Fig. 190.



$$w = n'' - \tfrac{1}{2}(n'' - n') = \tfrac{1}{2}(n' + n'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Ablesungen an der Scala vor und nach dem Umsetzen der Stange und bei wagrechter Lage der Libellenaxe. Will man den kleinen Winkel p kennen, welcher einer ganzen Umdrehung der Schraube entspricht, so braucht man nur, nachdem die Ablesung w bestimmt ist, den Neigungswinkel FEH der Messstange EF gegen den Horizont zu messen und zu bedenken, dass dieser Winkel $^1/_2\,\varphi$ und

$$\varphi = p\,(n'' - n'), \text{ also } p = \frac{\varphi}{n'' - n'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

ist. Wäre zufällig EF wagrecht, folglich δ und φ null, so müsste man, um p zu finden, die Messstange um einen gewissen Winkel $\delta = {}^1/_2\,\varphi$ erheben, die Libelle zum Einspielen bringen und den Stand der Schraube ablesen. Heisst diese Ablesung w' und die bereits bekannte Ablesung für die Normallage der Libelle w, so ist offenbar

$$\delta = p\,(w - w') \text{ und } p = \frac{\delta}{w - w'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

Der Gebrauch der Messstangen zur Bestimmung der Länge der Grundlinie eines Dreiecknetzes (zur Basismessung) kann füglich erst in der zweiten Abtheilung näher beschrieben werden.

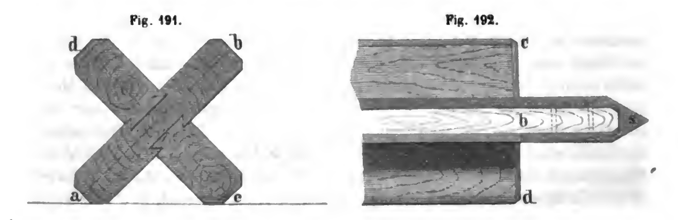
Messlatten.

§. 169. Die Forderungen, welche man an eine Messlatte stellt, sind weniger streng als die an eine Messstange gestellten: man begnügt sich mit einer Genauigkeit dieser Latten von 1 auf 10 000 und vernachlässigt daher alle Einflüsse, welche geringere Fehler als den eben angegebenen erzeugen: es bleibt desshalb die Ausdehnung der Latten unberücksichtigt und die Abgleichung derselben unter sich und mit dem Urmasse wird nicht bis auf den höchsten Grad der Genauigkeit getrieben. Dagegen muss den schädlichen Einflüssen der Feuchtigkeit durch eine gute Auswahl und Behandlung des zu den Latten verwendeten Holzes vorgebeugt werden. In der Regel schneidet man die Latten aus jahrelang getrockneten Brettern von Tannen, welche in gutem trockenem Boden gewachsen sind, in einer Länge von 10 bis 15 Fuss, einer Breite von 2 bis 3 Zoll und einer Dicke von 6 bis 12 Linien. Diese Holzstäbe werden in Oel getränkt, vierkantig zugehobelt und an den Enden mit Eisen oder Messing beschlagen und schliesslich zwei- oder dreimal mit Oelfarbe angestrichen. Die Beschläge sind senkrecht auf die Axe der Messlatte so genau als möglich abgefeilt. Der Comparator, welcher zur Abgleichung dient, ist ein wagrecht liegender starker Balken von Tannenholz, an dessen einem Ende ein senkrechter Stift steht, an den man sowohl die Messlatte als das Normalmass genau anlegen kann, und an dessen anderem Ende ein Messingplättchen in die Oberfläche so eingesetzt ist, dass seine Mitte ungefähr um die Länge einer Latte, welche ein Vielfaches des Urmasses ist, vom Stifte entfernt liegt. Auf der Mittellinie, welche vom Stift aus über dieses Plättchen gezogen wird, bemerkt man die zwei-, drei- oder vierfache Länge des mit Hilfe von zwei starken ebenen Platten in der Richtung dieser Linie (nach §. 167) abgeschobenen Normalmasses durch einen feinen Strich, den man quer über die Mittellinie macht. Hierauf legt man die Messlatten nach und nach auf den Comparator und bezeichnet ihre Längen ebenfalls durch feine Striche auf dem genannten Messingplättchen. Die Abstände dieser Striche von dem, welcher dem Normalmasse angehört, werden durch Stangenzirkel, die mit Mikrometerschrauben versehen sind, gemessen und als Reductionsgrössen jeder Lattenlänge beigefügt. Mit dieser Abgleichung darf man sich aber noch nicht begnügen, weil die Erfahrung lehrt, dass die Summe der Längen, welche man für die einzelnen Latten gefunden hat, nicht der Länge gleich ist, welche man erhält, wenn alle Latten genau aneinander gefügt sind, wie es bei ihrem Gebrauche geschieht. Dieser Unterschied rührt offenbar davon her, dass sich die Endflächen nicht so vollständig berühren, wie es seyn sollte, oder dass sie nicht ganz genau auf der Axe senkrecht stehen. Man muss desshalb den Comparator so weit

verlängern, dass man alle Messlatten in der Reihenfolge ihrer Nummern aneinanderfügen und ihre Gesammtlänge direct messen kann, was wie vorhin durch Abschieben des Normalmasses, Bezeichnen der Längen durch feine Striche auf einem Messingplättchen und Abmessen der Entfernungen dieser Striche durch Stangenzirkel geschieht. Die Länge, welche man auf diesem Wege erhält, wird bei Längenmessungen für jede ganze Lage des Lattenapparates in Rechnung gebracht, während die Länge der einzelnen Latte nur dann einzusetzen ist, wenn die ganze Lage nicht hergestellt werden konnte, wie es z. B. am Ende einer Linie der Fall ist.

Die Messlatten, welche der Verfasser dieses Buchs für die polytechnische Schule in München anfertigen liess, haben folgende Einrichtung. Jede Latte ist sehr nahe 3 Meter lang und hat den in Fig. 191 in halber Grösse gezeichneten Querschnitt. Der eine Theil ab ist eine ganze Latte, während der andere cd aus zwei Stücken zusammengesetzt ist; a ist etwas länger als c und an den Enden mit Stahlkanten (s), welche in der Ebene ab liegen, versehen, während cd stumpf abgeschnitten ist, wie Fig. 192 zeigt.

Fig. 191. Fig. 192.

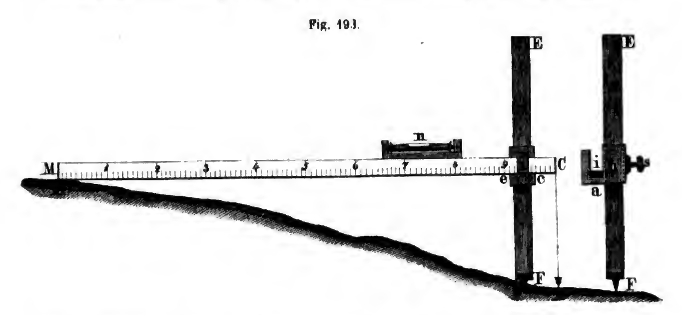


Diese Messlatten werden bei dem Gebrauch nicht wie die vorhergehenden aneinander gestossen, sondern wie die Messstangen einander nur sehr nahe gebracht, worauf man ihren Abstand durch den Messkeil bestimmt. Dabei versteht sich von selbst, dass, wenn die Stahlkanten der einen Latte in der Richtung ab liegen, die der anderen die Richtung cd haben müssen, damit man den Keil gehörig einschieben und ablesen kann. Hat man aber die Absicht, diesen Keil gar nicht anzuwenden, was wohl auch in den wenigsten Fällen nöthig ist, so lässt man die Stahlkanten weniger scharf machen, damit sie bei der Berührung keine Eindrücke erleiden. Der Comparator zur Abgleichung dieser Messlatten war eben so eingerichtet wie der, welcher auf Seite 258 beschrieben wurde. Indem wir es dem eigenen Urtheile des Lesers überlassen, Vergleichungen zwischen unseren und den vorhergehenden Messlatten anzustellen, fügen wir nur noch bei, dass mehrere mit trigonometrisch bestimmten Punkten des bayerischen Dreiecknetzes in Verbindung gebrachte Messungen eine Genauigkeit unserer Latten von mindestens 1:50000 verbürgen lassen.

Messstäbe.

§. 170. **Der Ruthenstab.** Wenn es sich nur um kleinere Aufnahmen handelt, welche nicht auf ein Dreiecknetz gegründet zu werden brauchen, oder wenn überhaupt Längenmessungen zu machen sind, welche keine grössere Genauigkeit als 1 auf 2000 fordern, so bedient man sich der Messstäbe, welche sich von den Messlatten dadurch unterscheiden, dass sie erstens nicht so genau abgeglichen sind wie diese, und dass sie zweitens zwischen ihren Endflächen eingetheilt sind, was bei den Messlatten nicht der Fall ist. Die Ruthenstäbe sind eine Ruthe lang, ungefähr $2^1/_2$ Zoll breit, $^3/_4$ Zoll dick, an den Enden beschlagen und ihrer ganzen Länge nach in Fusse und Zolle abgetheilt. Ihre Seitenflächen müssen genau eben und parallel, die Endflächen darauf senkrecht seyn. Will man einen Ruthenstab zu Längenmessungen auf sehr abschüssigem Boden gebrauchen, so muss er mit einer Vorrichtung verbunden werden, welche erstens den Stab wagrecht zu legen und zweitens seinen erhobenen Endpunkt lothrecht zu projiciren gestattet. Eine solche Vorrichtung stellt Fig. 193 dar, in welcher MC die Ruthe, BC

Fig. 193.



einen Senkel mit dünnem Faden, n eine Wasserwage[1] und E einen Stab bezeichnet, an dem sich eine Hülse h verschieben und mit einer Bremsschraube s feststellen lässt. Diese Hülse hat nach vorne einen Ausschnitt (a), in welchem die Ruthe auf einer horizontalen zur Axe des Stabs EF senkrechten Schneide i ruht. Verschiebt man die Hülse so weit, bis die Wasserwage einspielt, so liegt der Stab MC wagrecht und der Senkel bezeichnet den Punkt B, welcher von A gerade um eine Ruthe in wagrechter Richtung entfernt ist. Im weiteren Verfolge der Messung ist selbstverständlich der Punkt M des Messstabes an B zu legen und wie eben angedeutet zu verfahren. Den Stab E kann man auf seiner Rückseite in der Art eintheilen, dass ein mit der Hülse verbundener Zeiger die Höhen Fi

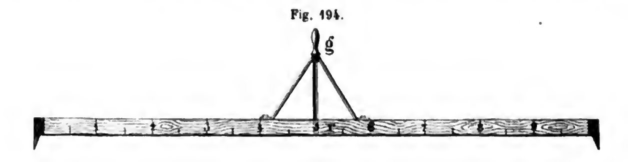
[1] Statt der Libelle kann man selbstverständlich auch eine Setzwage anwenden, um den Ruthenstab wagrecht zu legen.

angibt. Es ist klar, dass man mit dieser Einrichtung den Durchschnitt der Bodenoberfläche durch eine Vertikalebene d. i. ein Profil derselben aufnehmen kann, indem man für die wagrechte Abscisse A, die man auf MC abliest, sofort die lothrechte Ordinate Fi durch den Zeiger auf EF erhält, wenn dieser letztere Stab vertikal und so tief im Boden steht, dass der Punkt F die Oberfläche berührt. Um den Stab E lothrecht zu stellen genügt es, ihn, wenn die Ruthe wagrecht ist, so zu verrücken, dass eine in der Höhe von i an der einen Seitenwand des Ausschnittes a gezogene horizontale Linie ec durch die untere Kante des Ruthenstabes gedeckt wird; denn da ec senkrecht zu EF steht, so muss auch EF lothrecht seyn, sobald ec wagrecht ist. Will man sich überzeugen, ob die Linie ec zur Axe des Stabes E senkrecht steht, so braucht man nur diesem Stabe mit Hilfe des Senkels eine lothrechte Stellung zu geben und zuzusehen, ob eine an die Linie ec gelegte berichtigte Libelle oder Setzwage einspielt.

§. 171. **Der Lachterstab.** Die Markscheider nennen ihren Massstab für den gewöhnlichen Gebrauch einen Lachterstab, weil er die Länge einer Lachter hat. Sein Querschnitt ist ein Rechteck von etwa einem Zoll Breite und 8 bis 10 Linien Höhe. Er wird aus ganz trockenem hartem Holze gemacht und an den Enden mit Messing- oder Kupferplättchen beschlagen, deren Seitenflügel in das Holz versenkt sind. Die Eintheilung des Stabs geschieht meist nach dem Decimalsysteme: 1 Lachter in 10 Lachterzehntel, 1 Zehntel in 10 Zolle und 1 Zoll in 10 Primen; ausserdem ist die Eintheilung der Lachter in Achtel, des Achtels in 10 Zolle und des Zolles in 10 Primen gebräuchlich. Auf dem Lachterstab wird indess die Theilung nicht weiter als bis zu den Zollen fortgesetzt. Kleinere Unterabtheilungen enthalten die Achtels- oder Zehntelsstäbe, welche neben den Lachterstäben gebraucht werden. Ungefähr wie die Lachterstäbe sind die Messstäbe beschaffen, welche eine halbe Ruthe oder eine Klafter lang sind und welche man zum Abmessen der Ordinaten bei der Aufnahme oder der Absteckung krummer Linien gebraucht.

§. 172. **Der Feldzirkel.** Sind für flüchtige Aufnahmen Längen zu messen, so kann man sich der in Fig. 194 dargestellten Drehlatte oder des Feldzirkels bedienen. Dieses Werkzeug besteht aus einer Latte, an welcher sich in dem Abstande von einer Ruthe zwei senkrechte Spitzen von Eisen befinden, welche mit Hilfe des Griffes (g), der in der Mitte der Latte befestigt ist, auf dem Felde in derselben Weise gebraucht werden, wie beim Zeichnen der Zirkel zum Abmessen von Längen. Da die Spitzen

Fig. 194.



ihren Abstand ändern können, so muss derselbe von Zeit zu Zeit durch einen Ruthenstab geprüft und nöthigenfalls berichtigt werden. Die Genauigkeit dieses Instruments ist begreiflicherweise eine viel geringere als die der Ruthen- und Lachterstäbe; man darf sie auf höchstens 1 : 400 anschlagen.

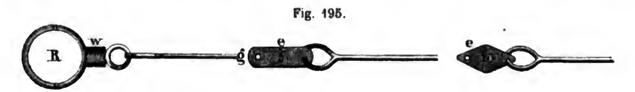
2. Messketten.

§. 173. Das genaue Auflegen der Messstäbe zum Zwecke der mechanischen Ausmittelung der Länge einer geraden Linie ist mühsam und erfordert immer einen beträchtlichen Zeitaufwand; in vielen technischen Fällen aber und in allen, wo es sich nur um Sicherung des Grundbesitzes handelt, steht dieser Aufwand von Zeit und Mühe mit den mässigen Anforderungen des praktischen Bedürfnisses nicht im Einklange: man bedient sich daher hier, wo die Genauigkeit der Längenmessung zwischen 1 auf 500 und 1 auf 1000 schwanken darf, der in ihrer Anwendung sehr einfachen und bequemen Messketten, welche im Grunde nichts Anderes als zusammenlegbare Massstäbe sind. Der praktische Geometer hat zu Feldmessungen eine Kette aus Eisen- oder Stahldraht, der Markscheider aber muss in der Grube, wenn er die Bussole bei sich hat, alle Werkzeuge vermeiden, welche dieses Metall an sich tragen: seine Kette besteht desshalb aus Messingdraht. Da sie auch eine andere Eintheilung und Einrichtung hat als die erstere, welche wir die Feldkette nennen wollen, so unterscheidet man sie von dieser durch die Bezeichnung Lachterkette. Ausser diesen eigentlichen Ketten werden in gewissen Fällen, wo sie gute Dienste thun und durch Metallketten gar nicht ersetzt werden können, auch Messschnüre und Messbänder angewendet; es wird desshalb nicht ungeeignet erscheinen, über dieselben in diesem Capitel einige Bemerkungen zu machen.

Die Feldkette.

§. 174. **Beschreibung.** Die Feldkette wird in dem grösseren Theile von Deutschland 5 Ruthen oder 50 Fuss, in Oesterreich 10 Klafter oder 60 Fuss, in Frankreich 10 oder 20 Meter und in England 22 Yards oder 66 Fuss lang gemacht. Sie besteht (nach Fig. 195) aus Gliedern von Eisen- oder Stahldraht, welche eine Linie dick und von Mitte zu Mitte der sie verbindenden kleinen Ringe (r) in Deutschland einen Fuss, in Frankreich

Fig. 195.

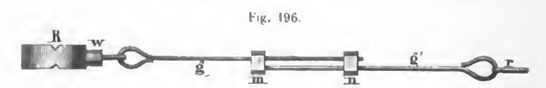


0,2 Meter und in England 0,66 Fuss lang sind. Jedes fünfte oder zehnte Glied ist durch ein besonders geformtes und mit einer Zahl versehenes

Eisenplättchen (e) kenntlich gemacht, um die Uebersicht der Längen, welche kürzer als eine Kette sind, zu erleichtern. An den Enden der Kette befinden sich anderthalb Zoll weite Ringe (R), durch welche zwei fünf Fuss lange, $1^1/_4$ Zoll dicke und mit spitzen Schuhen beschlagene Kettenstäbe aus Tannen- oder Eschenholz gesteckt werden, um die Kette in der abzumessenden Richtung auszuspannen. Die Schuhe haben einen Ansatz, welcher das Abrutschen der Ringe verhindert.

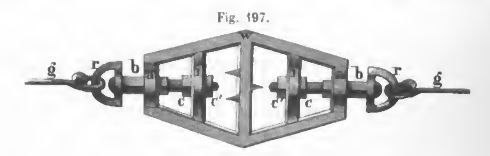
Da die Länge der Messkette sich sehr leicht ändert, indem entweder die Verbindungsringe oder die Oehren der Glieder sich ausdehnen, oder letztere sich biegen, so werden an den meisten Feldketten Vorrichtungen zur Herstellung ihrer wahren Länge angebracht. Fig. 196 stellt die Vorrichtung dar, welche man an den Messketten von Ertel findet. Das erste

Fig. 196.



oder letzte Glied besteht nämlich aus zwei Theilen (g, g'), von denen der eine (g') zwei feste Ansätze (m, n) enthält, der andere aber in ein Schraubengewinde ausläuft, dessen Mutter der zweite Ansatz (n) ist. Der erste Ansatz (m) ist durchbohrt und dient zur Führung der Schraube, welche sich um einen Wirbel (w) drehen kann. Durch dieses Glied kann man auf leichte Art die ganze Kettenlänge, aber nicht einzelne Abtheilungen derselben, berichtigen. Soll Dieses geschehen, so muss man von Ruthe zu Ruthe eine Vorrichtung anbringen, welche der in Fig. 197 gezeichneten und von Berlin im achten Bande des Archivs von Grunert beschriebenen gleich oder ähnlich ist. Ein Wirbel (w) wird nämlich mit den anstossenden Gliedern (g) durch einen Halbring (r) und einen vierkantigen Bolzen (b), der in dem scheibenförmigen Ende (a) des Wirbels verschiebbar ist, so

Fig. 197.



verbunden, dass er nach Lösung der Schraubenmuttern (c, c'), welche sich am Ende des Bolzens (b) befinden, durch einfache Umdrehung mit der Hand den anstossenden Gliedern genähert oder von ihnen entfernt werden kann. Hat man auf diese Weise jeder Ruthe ihre gehörige Länge gegeben, so stellt man die Schraubenmuttern c, c' an dem Ansatze i wieder fest und die Kette ist berichtigt. Wenn jede Abtheilung von 10 Fuss Länge verbessert werden soll, so hat eine Kette von 50 Fuss Länge 4 solche Wirbel nöthig;

da indessen die eben beschriebene Vorrichtung doch schon zusammmengesetzter ist, als sie die meisten Feldmesser wünschen werden, so dürfte es nach unserer Meinung auch genügen, wenn man sie nur einmal in der Mitte oder höchstens zweimal in Abständen von 15 Fuss von den Enden anwendet.

Zur Feldkette gehört noch eine entsprechende Anzahl kleiner Stäbchen, welche zum Bezeichnen der Stellen dienen, an denen bei der Abmessung einer Linie der vordere Kettenstab eingesteckt war und wohin der hintere Stab zu stellen ist. Man verfertigt sie am bessten aus Stahldraht von einer Linie Dicke und macht sie ungefähr einen Fuss lang; unten sind sie zugespitzt und oben haben sie ein Oehr, um sich an dem Hacken eines Ledergürtels aufhängen zu lassen, womit jeder der zwei Messgehilfen versehen ist. Diese Stahlstäbchen nennt man K e t t e n n ä g e l. Es gehören deren zu jeder Messkette 10 Stück und es ist folglich nach ihrer gänzlichen Verwendung durch den vorderen Kettenzieher eine Länge von 500 Fuss abgemessen, wenn die Kette 50 Fuss lang ist. Der hintere Kettenzieher muss die 10 Stäbchen nach und nach an seinen Gürtel aufgenommen haben, die er nun wohlgezählt an den Vordermann wieder abgibt.

§. 175. **Gebrauch.** Es sey die zu messende Linie durch 2 Signale A und B bezeichnet, und es geschehe die Messung von A nach B. Der Hintermann steckt seinen Kettenstab in A fest und richtet, indem er über diesen Stab weg nach B sieht, den Stab des Vordermanns ein. Hierauf spannt dieser die Kette in der Art an, dass er sie mittels des Kettenstabs ein wenig erhebt und über die Stelle, wo der Stab eben steckte, wegzieht. Dadurch bekommt der vordere Kettenstab einen neuen Standpunkt, der etwas vor dem ersten liegt. In das neue Loch wird der erste Kettennagel gesteckt, nachdem der Hintermann abgerufen wurde. Sobald dieser sich dem Kettennagel genähert hat, lässt er den Vordermann Halt machen, hängt den Nagel an und steckt den Kettenstab an dessen Stelle. Nun folgt wieder das Einrichten des Vordermanns, das Anspannen der Kette, das Einstecken eines Kettennagels, das Abrufen und Weitergehen wie vorhin. In der zweiten Hälfte der Linie AB richtet der Vordermann seinen Stab selbst ein, indem er ihn mit dem Signal A und dem hinteren Kettenstabe in eine Vertikalebene bringt; das übrige Verfahren aber bleibt sich gleich. Hat der Vordermann das Ende B der Linie AB erreicht und trifft sein Stab nicht zufällig auf dieses Ende, so geht er darüber hinaus und steckt den Kettenstab in der verlängerten Richtung fest, worauf der Messende die Länge vom Hinterstabe bis zum Signale B an der Kette abnimmt und zu den ganzen Kettenzügen addirt.

Ist die Breite eines Hohlwegs, eines Bachs oder sonst einer Vertiefung des Bodens, worüber die Kette noch reicht, zu bestimmen, so wirft man letztere, das eine Ende festhaltend, von einem Rand zum andern, spannt sie in der vorgeschriebenen Richtung an und zählt an den betreffenden Gliedern die Breite ab, wobei wie vorhin die Zolle geschätzt werden. Geht

die zu messende Linie AB über einen Fluss oder eine Schlucht von mehr als einer Kettenlänge Breite, so wird an dem einen Ufer die Kettenmessung unterbrochen und von dem anderen aus wieder fortgesetzt. Die ausgelassene Strecke wird durch zwei Pfähle bezeichnet, deren Entfernung später durch eine mittelbare Messung bestimmt wird. Auf abschüssigem Boden soll der tiefer stehende Messgehilfe die Kette so hoch erheben, dass sie nahezu wagrecht wird, wenn sie angespannt ist. Dabei muss er aber seinen Stab lothrecht halten, ihn also weder auf sich zuziehen, noch von sich abziehen lassen. Fällt die Bodenoberfläche so stark ab, dass das untere Kettenende nicht mehr genug erhoben werden kann, so muss statt der Kette ein Ruthenstab nach Fig. 193 zur Längenmessung angewendet werden. Ist die abzumessende Linie AB sehr lang, so ist es zweckmässig und sogar nöthig, sie durch Absteckstäbe in kleinere Theile zu theilen, weil sonst die Kettenstäbe nicht richtig einvisirt werden. An diesen Absteckstäben misst man vorbei, ohne ihren Abstand von einander oder von A und B zu bestimmen. Für die Prüfung der Messung ist es aber gut, wenn man nach den ersten 10 Kettenzügen den ersten Stab herausnimmt und an das Ende des zehnten Zugs, also in einer Entfernung von 500 Fuss von A aufstellt. Ebenso kann man mit dem zweiten und dritten Stab verfahren, wobei beziehlich der erste und zweite an die Stelle von A treten.

§. 176. **Genauigkeit.** Die Längenbestimmungen mit der Messkette können unrichtig werden:

1) wenn die Kette nicht gehörig untersucht und berichtigt ist;
2) wenn sie fehlerhaft gebraucht wird, und
3) wenn der Boden kein sicheres Einstecken der Kettenstäbe gestattet.

Zu 1. Die Messkette wird schon nach dem Gebrauche von zwei bis drei Tagen länger, wesshalb sie häufig zu untersuchen ist. Man wählt dazu einen ebenen festen Boden, spannt darauf die Kette vollständig aus und misst längs derselben von der Spitze des einen Kettenstabs aus mit einem Ruthenstabe 5 Ruthen genau ab. Ist die Kette mit der Berlin'schen Vorrichtung versehen, so kann man jede Ruthe verbessern, ausserdem nur die ganze Kette. Es kann kommen, dass bei häufigem Gebrauch der Kette die in §. 174 beschriebenen Wirbel unwirksam werden, wenn die Bolzen b, b an das Mittelstück des Wirbels anstossen: in solchen Fällen müssen die Oehren und Kettenringe, welche zu sehr ausgedehnt sind, durch einen Schmied oder Schlosser wieder kreisförmig gemacht werden.

Zu 2. Als einen fehlerhaften Gebrauch der Messkette sehen wir an:

a) das Messen auf abschüssigem Boden ohne Rücksicht auf dessen Neigung;
b) die Einsenkung der Kette, wenn sie in der Mitte mehr als ein Procent der Kettenlänge beträgt;
c) das Einstellen des vorderen Kettenstabs ausserhalb der Vertikalebene, welche die gerade Linie bezeichnet;
d) das Einstecken des hinteren Kettenstabs an einer anderen Stelle als der, welche der vordere Stab einnahm und der Kettennagel bezeichnete;

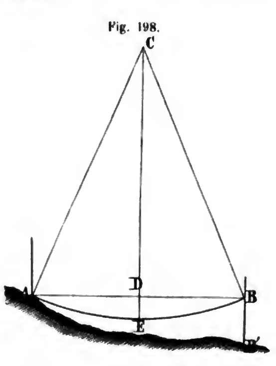
e) die schiefe Stellung des Kettenstabs, an welchem auf geneigtem Boden die Kette erhoben wird; endlich

f) das schlaffe Anspannen der auf dem Boden liegenden Kette und das Vorrücken des hinteren Stabs beim Anziehen derselben.

Der Einfluss der hier aufgeführten Fehlerquellen auf das Ergebniss einer Kettenmessung lässt sich durch Rechnung bestimmen, wenn man die Grösse der vorgekommenen Abweichungen kennt; es ist jedoch diese Bestimmung in fast allen Fällen so einfach, dass wir sie hier mit Ausnahme des zweiten Falles übergehen zu dürfen glauben.

Wenn aber eine Messkette von der Länge l bei erhobenem unterem Ende in der Mitte um die Grösse p eingesunken ist, so besteht der Fehler, welchen man in diesem Falle begeht, darin, dass man den Bogen für seine Sehne nimmt und folglich die Entfernung der Kettenstäbe um den Unterschied zwischen Sehne und Bogen zu gross erhält. Nennt man den Fehler f und die (wagrecht gedachte) Sehne AB der als Kreisbogen anzusehenden Kette s, so ist zunächst $f = l - s$ und es kommt nun darauf an, diesen Unterschied durch l und p auszudrücken. Zu dem Ende sey r der Krümmungshalbmesser des Bogens AEB und φ der Winkel ACB im Bogenmass, d. h. $r\varphi = l$. Da $s = 2r \sin \frac{1}{2}\varphi$ und nach der Sinusreihe genau genug

Fig. 198.



$$\sin \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{48}\varphi^3 = \frac{l}{2r} - \frac{l^3}{48r^3}$$

ist, so wird, wenn man substituirt, der Fehler

$$f = l - 2r \sin \frac{1}{2}\varphi = \frac{l^3}{24r^2}.$$

Nun ist aber $p = r - r\cos \frac{1}{2}\varphi = r(1 - \cos \frac{1}{2}\varphi)$ und ebenfalls genau genug

$$\cos \frac{1}{2}\varphi = 1 - \frac{1}{8}\varphi^2 = 1 - \frac{l^2}{8r^2};$$

daher auch $8rp = l^2$ und wenn man hieraus r sucht und in den letzten Ausdruck für f setzt:

$$f = \frac{8p^2}{3l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (130)$$

Der Fehler wächst sonach mit dem Quadrat der Einsenkung, während er mit der Kettenlänge abnimmt. Würde $p = 1',25$ betragen, so wäre für $l = 50'$ der Fehler $f = 1$ Duodecimalzoll und folglich $= 1/_{600}$ der Kettenlänge. Ist dagegen, wie wir unter (b) als noch zulässig angenommen haben, $p =$

0',5 = einem Procent der Kettenlänge von 50 Fuss, so wird $f = \frac{4}{3}$ Decimallinien oder = $\frac{1}{3750}$ der Kettenlänge, also noch viermal kleiner als die durch Kettenmessungen erreichbare Genauigkeit. Man braucht folglich die Kette nicht übermässig zu spannen, um den Einfluss der Senkung unmerklich zu machen.

Zu 3. Der Boden gestattet kein sicheres Einstecken der Kettenstäbe, wenn er zu hart oder felsig und wenn er zu weich ist; hierdurch entstehen aber oft sehr bedeutende Fehler, und darum ist auch die Ungenauigkeit der Kettenmessungen auf sumpfigem und felsigem Boden am grössten. Ueber die Genauigkeit dieser Messungen können nur Vergleichungen derselben mit Längenbestimmungen entscheiden, welche als fast fehlerfrei zu betrachten sind, nämlich mit Basismessungen und den daraus abgeleiteten Längen von Dreieckseiten. Solche Vergleichungen lehren aber, dass die Genauigkeit der Kettenmessung auf ebenem festem Boden gleich 1 : 1000, auf Fels- und Sumpfboden gleich 1 : 500, und auf gemischtem Terrain gleich 1 : 700 gesetzt werden darf; man wird also, wenn man sonst vorsichtig arbeitet, unter den hier angegebenen Verhältnissen auf 1000 Fuss Länge beziehungsweise einen, zwei oder anderthalb Fuss fehlen.

Die Lachterkette.

§. 177. Diese Kette unterscheidet sich von der Feldkette durch ihr Materiale und ihre Einrichtung. Sie hat in der Regel eine Länge von 5 Lachtern und folglich von 10 Metern da, wo die Lachter 2 Meter beträgt. Jede Lachter besteht aus 10 messingnen Gliedern (Lachterzehnteln) und es ist eine von der andern durch ein Messingplättchen getrennt, während die Glieder unter sich wie bei der Feldkette durch Ringe und Oehren verbunden sind. Die erste und letzte Lachter zählen bis in die Mitte der an den Kettenenden befindlichen und zum Ausziehen und Anspannen dienenden Handringe, welche hier unentbehrlich sind, da man in Bergwerken mit Kettenstäben nicht arbeiten kann. Vorrichtungen zur Berichtigung erhalten die Lachterketten in der Regel nicht; wo sie aber damit versehen sind, weichen sie von den in §. 174 beschriebenen Einrichtungen nicht wesentlich ab. Die Prüfung der Lachterkette geschieht wie bei der Feldkette, und hinsichtlich ihres Gebrauches ist Folgendes zu bemerken. Die gerade Linie, welche in Gruben durch die Lachterkette auszumessen ist, wird durch eine angespannte Schnur bezeichnet, welche man auf die erforderliche Länge von einer Rolle, worauf sie sich befindet, abwickelt und an den Endpunkten mit sogenannten Markscheideschrauben befestigt. Diese Schrauben, wovon Fig. 199 eine Ansicht gibt, werden aus Messing gemacht, sind etwa eine Linie dick, 2 bis 3 Zoll lang, haben oben einen Griff wie ein Schlüssel und unten ein Gewinde wie die Holzschrauben, um entweder

Fig. 199.



in das Zimmerwerk der Stollen und Schächte oder in besondere Holzstücke (Spreizen) eingeschraubt zu werden, die in dem Gestein befestigt sind. Bei wagrechten (söhligen) und schiefen (flachen) Linien setzt man die Schrauben höchstens 8 Lachter weit auseinander, weil sonst die Schnur eine für die Genauigkeit der Messung schädliche und nach Formel (130) zu beurtheilende Biegung annimmt; bei lothrechten (seigeren) Linien ist diese Vorsicht selbstverständlich unnöthig. Die Spannung der Schnur wird mit der Hand dadurch geprüft, dass man dieselbe mit ausgespanntem Daumen und Mittelfinger von unten, mit dem Zeigefinger aber von oben drückt und zusieht, ob eine Biegung stattfindet oder nicht; wenn nicht, ist die Spannung hinreichend, um die Lachterkette an die Schnur anzulegen und deren Länge zu messen. Die Zählstäbchen, deren man sich bei Messungen mit der Feldkette bedient, werden hier durch einfache messingne Zwingen ersetzt, welche die Gestalt von Cigarrenhaltern haben und wovon eine in Fig. 200 dargestellt ist. Indem man die Spange s anzieht, umfassen die Griffe g der Zwinge die Schnur (c). Ueber den so bezeichneten Punkt wird bei dem zweiten Kettenzuge die Mitte des hinteren Endrings gebracht und wie bei dem ersten Zug weiter verfahren. Hat der Markscheider eine Linie „über Tage," d. h. auf der Erdoberfläche zu messen, so bedient er sich einer Feldkette, welche nach Lachtern abgetheilt ist.

Fig. 200.



3. Messschnüre und Bänder.

§. 178. Bei den Geometern sind Schnüre und Bänder wegen ihrer grossen Dehnbarkeit beim Anspannen und ihrer Veränderlichkeit bei feuchtem Wetter fast ganz ausser Gebrauch gekommen; manche Markscheider ziehen indess eine Messschnur der Lachterkette vor, und in besonderen Fällen bedienen sich auch die Ingenieure oder Geometer mit Vortheil einer starken Messschnur: dann nämlich, wenn sie Aufnahmen und Wassermessungen an breiten und tiefen Flüssen und Strömen zu machen haben und sehr umständliche mittelbare Längenmessungen vermeiden wollen.

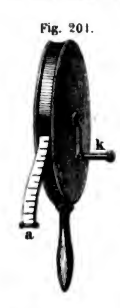
Die Messschnüre werden aus gut gehecheltem Hanf oder aus Bast drei Linien dick gemacht und zum Schutz gegen die Wirkungen der Nässe in Wachs oder Oel gesotten. Die grösseren Abtheilungen derselben (Ruthen, Klafter, Lachter) werden durch festgenähte farbige Streifen bezeichnet, die kleineren aber durch Ruthen- oder Lachterstäbe nachgemessen. Zum bequemeren Gebrauch wird die beliebig lang zu machende Schnur auf eine Spule gewunden, von der sie sich leicht abwickeln lässt. Bei Messungen auf grossen Flüssen ist es wegen des Einsinkens der auf grosse Entfernungen gespannten Schnur rathsam, an dieselbe stellenweise leichte Schwimmer von Holz, wie sie an Fischernetzen zu sehen sind, anzubinden.

Für Messbänder gibt Netto folgende zweckmässige Einrichtung an.

Ein zollbreites Zwirnband, das die dem Messbande zu gebende Länge von 100 oder 150 Fuss um 2 Fuss übertrifft, wird in kochendem Wasser gebrüht, dann sorgfältig getrocknet und mittels einer überwendlichen und einer Steppnaht so zusammen genäht, dass es nunmehr einen halben Zoll breit ist. Hierauf legt man das Band einen Monat lang in Leinölfirniss, trocknet es alsdann an einem luftigen Ort, gibt ihm die erforderliche Eintheilung, welche durch farbige Streifen kenntlich gemacht wird, und befestigt die Enden an zwei um ihre Axen drehbare Blechhülsen. Diese Hülsen werden von zwei Metallringen getragen, durch welche sich Kettenstäbe stecken lassen, wenn man nicht vorzieht, sie in der Hand zu halten. Bei ausgespanntem Bande sollen die Mitten dieser Ringe genau um 100 oder 150 Fuss von einander abstehen, worauf also bei der Befestigung der Bandenden an die Hülsen zu achten ist.

Wenn man nicht beabsichtigt, das Messband bei dem Gebrauche an Kettenstäbe zu befestigen (was allerdings weniger räthlich ist), so wickelt man dasselbe vortheilhafter mittels einer Kurbel (k) auf einer Trommel auf, wie Fig. 201 zeigt. Bei dem Gebrauche hält der eine Messende die Handhabe der Trommel, der andere den am vordern Ende des Bands angebrachten Griff (a). Die nämliche Art der Aufwickelung wird auch bei den aus sehr schwachem Messingblech angefertigten Messbändern angewendet, welche ihre Länge weniger verändern als die leinenen und daher etwas genauer sind als diese. Man kann annehmen, dass der Längenunterschied zwischen einem ganz trockenen und einem ganz nassen leinenen Messband auf 100 Fuss 2 Decimalzolle, also $1/_{500}$ der ganzen Länge beträgt. Rechnet man hiezu den Einfluss der übrigen Fehlerquellen, so wird die Genauigkeit dieser Art von Messbändern im Durchschnitte wohl nur auf $1/_{300}$ angeschlagen werden können; die Genauigkeit der Messingbänder mag jener der Messketten gleichkommen.

Fig. 201.



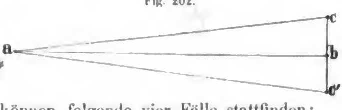
4. Distanzmesser.

§. 179. Distanzmesser heissen diejenigen Messinstrumente, welche die Entfernung zweier Punkte unmittelbar angeben, nachdem man mit ihnen von dem einen Punkte aus einen auf dem anderen befindlichen Gegenstand in bestimmter Weise beobachtet hat. Dieser Gegenstand ist entweder ein natürlicher, welcher dem entfernten Punkte ein für allemal angehört und also nicht erst aufgestellt zu werden braucht; oder er ist ein künstlicher, welcher eigens zu dem Zweck der Längenmessung angefertigt, durch einen Messgehilfen auf dem zweiten Endpunkt aufgestellt und die Distanzlatte genannt wird. Je nachdem nun ein Distanzmesser die Aufstellung einer solchen Latte fordert oder nicht, heisst er ein Distanzmesser mit oder ohne

Latte. Für viele und namentlich militärische Zwecke sind Distanzmesser ohne Latten sehr erwünscht: es ist aber noch kein ganz entsprechendes Instrument dieser Art vorhanden, so viele Vorschläge hiezu auch seit einigen Jahrhunderten gemacht und ausgeführt wurden. Unmöglich, wie manche Schriftsteller über praktische Geometrie glauben und andere nachbeten, ist die Herstellung brauchbarer Distanzmesser ohne Latte nicht, aber schwierig bleibt sie wegen der ausserordentlichen Genauigkeit, womit alle Theile derselben gearbeitet seyn müssen, immer. Der Verfasser dieses Buchs hat sich hievon überzeugt, indem er nach seiner Angabe einen auf das Princip des Spiegelsextanten gegründeten Distanzmesser ohne Latte anfertigen liess. Wir werden aber die Einrichtung dieses Instruments, da es erst noch einiger Verbesserungen bedarf, ehe es völlig brauchbar ist, hier nicht beschreiben, so wie wir uns überhaupt die nähere Würdigung der Distanzmesser ohne Latte für später und einen anderen Ort vorbehalten. Um so ausführlicher wird dagegen von den bereits im Gebrauche stehenden Distanzmessern mit Latte die Rede seyn, nachdem vorher noch gezeigt worden ist, worauf es im Allgemeinen bei der Einrichtung jeder Art von Distanzmessern [1] ankommt.

Eine Linie, deren Länge wir nicht mit Massstäben oder Messketten unmittelbar bestimmen können, erhalten wir mittelbar dadurch, dass wir sie mit zwei anderen Linien zu einem Dreiecke verbinden und in diesem drei Stücke, darunter eine Seite, messen. Das Dreieck ist für den vorliegenden Zweck am brauchbarsten, wenn es entweder rechtwinkelig oder gleichschenkelig ist und die gesuchte Linie in dem ersteren Falle die grössere Kathete, in dem letzteren aber die Höhe des gleichschenkeligen Dreiecks bildet, während die bekannte oder zu messende Seite beziehlich die kleinere Kathete oder die Grundlinie des gleichschenkeligen Dreiecks vorstellt. Ist nun (nach Fig. 202) in dem rechtwinkeligen Dreieck a b c die Kathete a b aus der Linie b c und dem Winkel bei a zu finden, so können folgende vier Fälle stattfinden:

Fig. 202.



1) Der Standpunkt des Instruments befindet sich in b und es ist

α) der Winkel bei a constant, dagegen die Linie b c mit a b veränderlich; oder es ist

[1] Der Verfasser hatte in seiner amtlichen Stellung Veranlassung, Erfindungen von Distanzmessern zu beurtheilen, welche lediglich darin bestanden, dass man den Begriff des Distanzmessers so veränderte und so erweiterte, dass er nicht mehr für ein Instrument, sondern nur für eine geometrische Operation passte. Es wurden nämlich ganz willkührlich die Apparate, welche zur Messung einer Grundlinie und der an ihr liegenden Winkel dienen, Distanzmesser geheissen, und auf Grund dieser unrichtigen Begriffsbestimmung die Neuheit und Wichtigkeit der vermeintlichen Erfindungen dargethan, die oft nur in einer Verbindung der Messkette, des Winkelspiegels und einer Art von Bussole bestanden. Diese Erfinder bedachten nicht, dass die Bestimmung der Entfernung eines Punktes durch Vorwärtsabschneiden von zwei Punkten aus bereits längst bekannt und mit Hilfe von Messlatten und Spiegelkreis nicht minder schnell, aber ungleich genauer auszuführen ist, als es durch ihre Apparate jemals geschehen kann. Wir machen diese Bemerkung hier nur, um nachdrücklich hervorzuheben, dass nur dasjenige Instrument ein Distanzmesser ist, welches die gesuchte Entfernung durch Beobachtung von einem einzigen Standpunkte aus gibt.

β) die Länge bc constant, der Winkel bei a aber mit der Grösse von ab veränderlich.

2) Der Standpunkt des Instruments befindet sich in a und es ist wieder

α) der Winkel bei a constant und die Linie bc mit der Entfernung ab veränderlich; oder es ist

β) die Länge bc constant und der Winkel bei a mit der Grösse von ab veränderlich.

Dieselben vier Fälle ergeben sich, wenn man statt des rechtwinkeligen Dreiecks abc das gleichschenkelige acc' und für bc die doppelte Länge cc' setzt, und es entsprechen die beiden ersteren Fälle den Distanzmessern ohne Latte, die beiden letzteren aber den Distanzmessern mit Latte, wobei bc oder cc' die Latte vorstellt. Es kommt also bei der Einrichtung eines Distanzmessers immer darauf an, entweder zu den unveränderlichen Grundlinien (bc, cc') die veränderlichen Winkel bei a, oder zu den constanten Winkeln bei a die veränderlichen Grundlinien (bc, cc') zu finden. Unter den Distanzmessern mit Latte sind die nach Reichenbach und Stampfer eingerichteten die bekanntesten und bessten, und da sie die beiden Fälle 2, α und 2, β darstellen, so genügt es, diese allein zu betrachten.

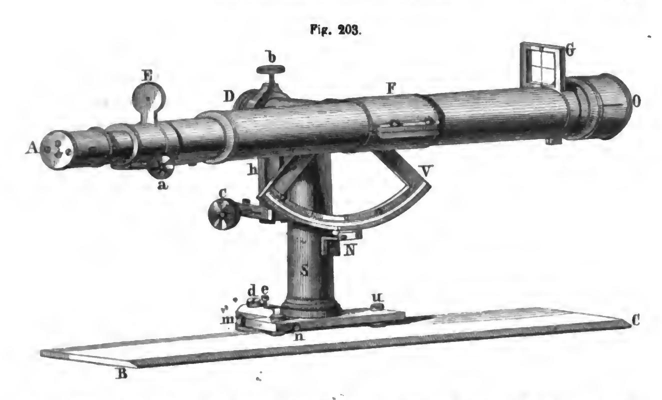
Der Reichenbach'sche Distanzmesser.

§. 180. **Einrichtung.** Dieser Distanzmesser, welcher dem Falle 2, α entspricht und in Fig. 203 abgebildet ist, hat, wie jedes Instrument dieser Art, zwei Hauptbestandtheile: ein Fernrohr und eine Distanzlatte.

Das Fernrohr (F) befindet sich hier an einem massiven Ständer (S), welcher auf einem Messinglineale (BC) senkrecht steht und eine Drehung des Rohrs um eine zur Ebene des Lineals parallele Axe (DF) gestattet. Aus dieser Zusammenstellung des Fernrohrs mit einem Lineale erkennt Jeder, der den §. 115 gelesen hat, dass der Reichenbach'sche Distanzmesser zugleich eine Kippregel ist und also vorzugsweise zu Messtischaufnahmen angewendet wird. Wir brauchen demnach die Befestigung des Ständers auf dem Lineale, die Verbindung des Fernrohrs mit dem Gradbogen (V) und dessen Theilung, die Einrichtungen zur groben und feinen Drehung des Rohrs und die verschiedenen Vorrichtungen zur Richtigstellung des Instruments, so weit es Kippregel ist, hier nicht mehr zu beschreiben, da es bereits in dem oben angeführten Paragraph geschehen ist; sondern können uns ausschliesslich mit der Einrichtung des Fernrohrs beschäftigen.

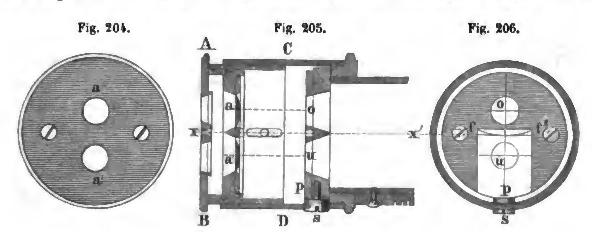
Das Objectiv desselben besteht aus einer achromatischen Doppellinse von 15 Linien Oeffnung und 18 Zoll Brennweite, und ist in der Objectivröhre nach Fig. 53 S. 83 centrisch befestigt. Statt eines einfachen Fadenkreuzes sind in der Ocularröhre zwei in einer Ebene liegende Fadenkreuze angebracht. Diese Fadenkreuze machen den eigentlich messenden Bestandtheil des Fernrohrs aus und bilden zusammen ein Fadenmikrometer. Die Fig. 205 stellt davon einen Längenschnitt nach der optischen Axe und Fig. 206 einen Querschnitt senkrecht

Fig. 203.



zu dieser Axe vor. Das eine Fadenkreuz (o) ist auf einen Metallring und das andere (u) auf ein in diesem Ring verschiebbares und durchlöchertes Messingplättchen (p) aufgeklebt. Die Verschiebung dieses Plättchens in der Richtung ou wird durch die Schraube s und die Stahlfeder, welche in der

Fig. 204. Fig. 205. Fig. 206.



Höhlung ff' des vorhin genannten Ringes liegt, bewirkt; ihr Zweck ist, dem Abstande der Kreuzpunkte o, u die ihm zukommende Grösse zu geben. Jedes der zwei Fadenkreuze hat ein eigenes Ocular: dem oberen Kreuzpunkte o entspricht das Ocular a und dem unteren Fadenkreuze u das Ocular a'. Die Axen (ao, a'u) dieser Oculare sind der Fernrohraxe parallel. Die Fassung (AB) der Oculare lässt sich, wie Fig. 205 zeigt, in der Richtung dieser Axen so weit verschieben als nöthig ist, um das deutliche Sehen der Kreuzfäden zu bewirken.

Die Distanzlatte (Fig. 207) wird aus sehr trockenem Tannenholze in einer Dicke von etwa einem Zoll, einer Breite von 3 bis 4 Zoll und einer Länge von 9 bis 15 Fuss angefertigt. Das untere Ende ist mit einem eisernen Schuh beschlagen, in einer Höhe von 4 bis 5 Fuss befinden sich

Fig. 207.

zwei Handgriffe (C) zum Halten, und etwas oberhalb dieser Griffe ist an der schmalen Seite der Latte ein Diopter (Δ) so angebracht, dass es beim Gebrauche senkrecht zur Lattenaxe, ausserdem aber parallel zu ihr gestellt werden kann. Der Zweck dieses Diopters ist, die Latte nahezu senkrecht gegen die optische Axe des Fernrohrs zu stellen. Indem nämlich der Arbeiter, welcher die Latte hält, diese in ihrer Richtung gegen das Loth so lange verändert, bis die Abschlinie des Diopters auf das Objectiv des Fernrohrs trifft, wird die bezeichnete Stellung in einem für die Praxis genügenden Grade der Genauigkeit erlangt.

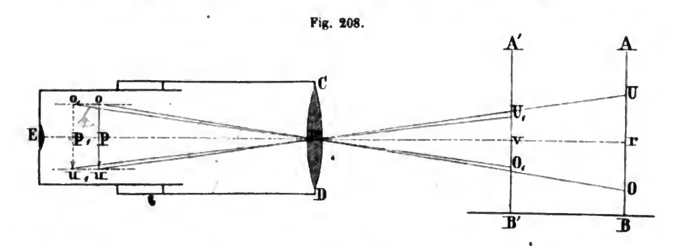
Für eine bequeme Messung ist es sehr wichtig, die Theilung der Latte möglichst übersichtlich und so einzurichten, dass man sofort die auf einen bestimmten Punkt des Instruments bezogenen und für die Richtung der optischen Axe des Fernrohrs giltigen Entfernungen der Latte unmittelbar ablesen kann. Die Bezeichnungsweise der Distanzlatten ist nach den Ansichten der Verfertiger und der Besteller verschieden; wir geben in Fig. 207 diejenige, welche in dem Ertel'schen Institute in München gebräuchlich ist und in der Praxis sich als gut bewährt hat. Die Entfernungen sind hier auf die Drehaxe des Fernrohrs bezogen und es ist die Bezifferung auf die Voraussetzung gegründet, dass das untere Fadenkreuz (u) des Fernrohrs jederzeit auf den am oberen Ende der Latte befindlichen Nullpunkt (A) eingestellt wird. Wenn alsdann das obere Fadenkreuz (o) einen der Striche deckt, welche den gross geschriebenen Ziffern 1, 2, 3, 4 ... gegenüberstehen und durch einen Punkt und Pfeil ausgezeichnet sind, so stellt der zwischen den Fadenkreuzen gesehene Lattenabschnitt die Entfernungen 100, 200, 300, 400 ... Fuss vor. Trifft das obere Fadenkreuz auf einen derjenigen Striche, an welche in etwas kleinerer Schrift gerade Zahlen wie z. B. 14, 16, 18, 22 ... gesetzt sind, so entsprechen die von den Fadenkreuzen gedeckten Lattenabschnitte beziehlich den Entfernungen 140, 160, 180, 220 ... Fuss. Die Abschnitte, welche den Entfernungen 50, 150, 250, 350 ... Fuss angehören, sind durch Striche kenntlich gemacht, welche die ganze Lattenbreite zur Länge haben und in zwei Punkte endigen. Hiernach wird man sich die übrigen Zeichen leicht selber deuten können; nur die Bemerkung sey noch erlaubt, dass die Theilstriche nach unten an Dicke zunehmen,

weil ihr Sehwinkel mit den Entfernungen kleiner wird, und dass man bei Entfernungen von mehr als 400 Fuss die Zwischenräume, welche je 5 Fuss vorstellen, durch Schätzung in einzelne Fuss abtheilen muss, was übrigens bei einiger Uebung mit hinreichender Genauigkeit geschehen kann. Die verkehrte Aufschrift der Ziffern bedarf wohl keiner besondern Erklärung mehr.

§. 181. **Wirkungsweise.** Wir denken uns jetzt das Fernrohr wagrecht und auf die Richtung seiner Axe die Latte lothrecht gestellt, wie dieses die Fig. 208 andeutet, in der AB die Latte, CD das Objectiv, ou das Fadenmikrometer und E das Ocular vorstellt.

Ist die Entfernung (mr) der Latte sehr gross, so wird sich ihr Bild in der Brennebene (p) des Objectivs erzeugen und es müssen folglich die beiden Fadenkreuze (o, u) in diese Ebene gebracht werden, was durch Verschiebung der Ocularröhre geschieht. Der Winkel, unter dem man die Latte von m aus sieht, ist in diesem Falle durch die drei Punkte o, m, u bestimmt; die Absehlinien om, um gehen auf die Punkte o, u der Latte und die Fadenkreuzpunkte decken die Bildpunkte o, u. Wird die Latte näher an das Instrument (nach v) gerückt, so erzeugt sich ihr Bild entfernter vom Objectiv als vorhin; wir nehmen an in der Ebene p_1. Soll dieses Bild durch das Ocular deutlich gesehen und von den Fadenkreuzen ohne Parallaxe gedeckt werden, so müssen diese zurückgezogen werden,

Fig. 208.



bis sie in die Bildebene p_1 kommen. Dann ist aber der Winkel, welcher den der Entfernung mv zugehörigen Lattenabschnitt $U_1 O_1$ bestimmt, kleiner als bei der ersten Lattenstellung, nämlich gleich $o_1 m u_1$. Rückt die Latte dem Instrument noch näher, so findet abermals eine Zunahme der Bildweite und eine Abnahme des vom optischen Mittelpunkte (m) ausgehenden Sehwinkels statt. Bezeichnet

- a die Entfernung der Latte vom optischen Mittelpunkt des Objectivs,
- a_1 die Entfernung des Lattenbildes von demselben Punkte,
- f die Brennweite des Objectivs,
- h die Grösse des durch die Absehlinien gedeckten Lattenabschnitts,
- b den Abstand der Fadenkreuzpunkte von einander,

so finden wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke, welche bei m ihre Scheitel-

winkel haben, und in Folge der dioptrischen Hauptformel folgende zwei Gleichungen statt:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{h}{b} \quad \text{und} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}.$$

Setzt man den Werth von a_1 aus der zweiten in die erste Gleichung, so wird aus dieser

$$a = \frac{f}{b} h + f \text{ und } a - f = \frac{f}{b} h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

Aus der letzten Gleichung ist zu entnehmen, dass nicht die vom Objectiv aus gezählten Entfernungen der Latte, sondern jene, welche von dem vorderen Brennpunkte des Objectivs an gezählt werden, den Lattenabschnitten genau proportional sind.

Da die Brennweite f des Objectivs und der Fadenabstand b an einem und demselben Fernrohre constante Grössen sind, so kann man das Verhältniss von $f : b = c$ setzen; und da ferner die Drehaxe des Fernrohrs sehr nahe um die halbe Brennweite des Objectivs von diesem absteht, so wird, wenn man auf beiden Seiten der Gleichungen (131) $\frac{1}{2}f$ addirt und die Lattenentfernung $a + \frac{1}{2} f = e$ setzt:

$$e = ch + 1{,}5f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

Sind die constanten Grössen c und f genau bekannt, so kann man nach dieser Gleichung die den Entfernungen e entsprechenden Lattenabschnitte h berechnen; kennt man aber c und f nicht mit hinreichender Genauigkeit, so können sie dadurch bestimmt werden, dass man mit Sorgfalt die zu zwei genau abgemessenen Entfernungen e' und e'' gehörigen Lattenabschnitte h' und h'' beobachtet und aus den beiden Gleichungen

$$e' = ch' + 1{,}5f$$
$$e'' = ch'' + 1{,}5f$$

die Werthe von c und f sucht. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass es gut ist, mehr als zwei Werthe von e und h zu messen, aus je zwei Gleichungen c und f zu bestimmen und aus den so erhaltenen Werthen von c so wie aus denen von f das Mittel zu nehmen, oder, wenn man Lust dazu hat, die bessten Werthe von c und f durch die Methode der kleinsten Quadrate zu suchen. Wir werden von nun an die Constanten c und $1{,}5f = d$ als gegebene Grössen ansehen und sofort mit Hilfe der Gleichung

$$e = ch + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

die Theilung der Latte näher bestimmen.

Heissen $h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots$ die zu $e_1, e_2, e_3, e_4 \ldots$ gehörigen Lattenabschnitte, so finden die Gleichungen statt:

$$e_1 = ch_1 + d,\ e_2 = ch_2 + d,\ e_3 = ch_3 + d,\ e_4 = ch_4 + d \text{ u. s. f.}$$

Zieht man immer die vorhergehende Gleichung von der folgenden ab, so erhält man die nachstehenden Gleichungen:

$$e_2 - e_1 = c(h_2 - h_1),\ e_3 - e_2 = c(h_3 - h_2),\ e_4 - e_3 = c(h_4 - h_3) \text{ u. s. f.}$$

Sind die Längenunterschiede $e_2 - e_1$, $e_3 - e_2$, $e_4 - e_3$ u. s. w. einander gleich, so müssen auch die Abschnittsdifferenzen $h_2 - h_1$, $h_3 - h_2$, $h_4 - h_3$

u. s. w. unter sich gleich seyn. Hieraus geht hervor, dass die Distanzlatte, auch wenn die Entfernungen auf die Drehaxe des Fernrohrs bezogen werden, von einer beliebig zu wählenden Stelle (h_1) an gleichmässig getheilt werden muss. Die Stelle h_1 entspricht der Entfernung e_1 und diese Entfernung kann so klein als man will angenommen werden. Setzen wir sie, da man mit dem Distanzmesser kleinere Längen nicht zu messen pflegt, gleich 50 Fuss, so ist die Latte von dem Punkte an, welcher von 0 um die aus der Gleichung $50' = ch_1 + d$ sich ergebende Grösse h_1 absteht, gleichförmig zu theilen.

Wir wollen diese Betrachtungen an einem besonderen Falle näher erläutern. Die Latten, welche zu den aus dem Ertel'schen Institute hervorgehenden Reichenbach'schen Distanzmessern gehören, haben für die Entfernung von 100 und 1000 Fuss Lattenabschnitte von 1,376 und 14,082 Fuss bayerisch. Mit diesen Daten findet man aus den beiden Gleichungen:

$$100 = 1{,}376\,c + d \quad \text{und} \quad 1000 = 14{,}082\,c + d$$

die Constanten $c = 70{,}833$ und $d = 2{,}55$ Fuss. Da aber $d = 1{,}5 f$ und $c = f : b$, so findet man weiter die Brennweite des Objectivs $f = 1',70$ und den Fadenabstand $b = 0',024 = 2{,}4$ bayer. Decimallinien. Für das in Rede stehende Instrument gilt also die Gleichung

$$e = 70{,}833\,h + 2{,}55,$$

aus der sich, wenn man die Werthe von e bei 50 Fuss beginnen und immer um diese Länge wachsen lässt, folgende Lattenabschnitte h durch Rechnung ergeben:

$$\begin{aligned} \text{Für } e_1 &= 50' \text{ wird } h_1 = 0',670; \\ „\quad e_2 &= 100' \quad „ \quad h_2 = 1',376; \\ „\quad e_3 &= 150' \quad „ \quad h_3 = 2',082; \\ „\quad e_4 &= 200' \quad „ \quad h_4 = 2',788; \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Während demnach

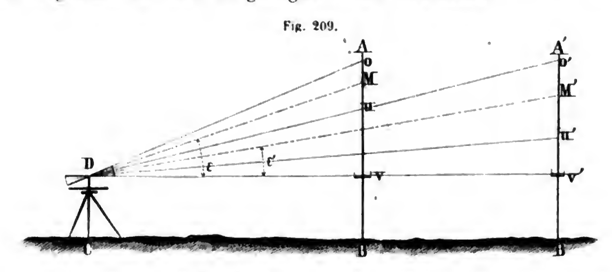
für die ersten 50 Fuss der Lattenabschnitt $h_1 = 0',670$ ist, wird
„ „ zweiten 50 „ „ „ $h_2 - h_1 = 0',706$,
„ „ dritten 50 „ „ „ $h_3 - h_2 = 0',706$,
„ „ vierten 50 „ „ „ $h_4 - h_3 = 0',706$ u. s. w.

Nachdem man also auf die Latte eine Länge von 0',67 vom Nullpunkt aufgetragen hat, entspricht von dort an jedes Intervall von 0,706 Fuss einer Entfernung von 50 Fuss. Trägt man diese Länge 19 Mal ab, so erhält die Latte für 1000 Fuss Entfernung eine Länge von $0{,}67 + 19 \times 0{,}706 = 14{,}084$ Fuss. Theilt man die Strecke von 0',706 in zehn gleiche Theile, so entspricht ein Latteninterval von 7,06 Decimallinien einem Längenunterschied von 5 Fuss und ein Intervall von 1,412 Linien einem Längenunterschiede von 1 Fuss. Die hier berechneten Werthe von f, b, $h_1, h_2, h_3 \ldots$ bis h_{20} gehen mit den wirklichen Abmessungen am Fernrohre und an der Latte überall bis auf weniger als ein Tausendel, also so genau zusammen, als man nur wünschen kann. Die Theilung einer Distanzlatte ist demnach sehr einfach und setzt weder jene weitläufigen Berechnungen noch die mühsamen

Versuche voraus, welche man hie und da in Zeitschriften und Lehrbüchern angegeben findet.

§. 182. **Reduction der schiefen Längen.** Im vorigen Paragraph wurde vorausgesetzt, dass die Fernrohraxe wagrecht und die Latte lothrecht, also die eine senkrecht zur anderen gerichtet sey. Diese Forderung ist aber nur selten zu erfüllen; denn selbst auf einem wagrechten Terrain muss das Fernrohr so weit erhoben werden als nöthig ist, um das untere Fadenkreuz auf den Nullpunkt der Latte einzustellen. Da man nun durch den Distanzmesser, wenn er zu Messtischaufnahmen dient, die horizontale Entfernung der Lattenfusspunkte von dem durch die Drehaxe des Fernrohrs gehenden Loth erfahren will, so ist zu entwickeln, in welcher Weise man bei erhobenem oder gesenktem Fernrohr aus der abgelesenen schiefen Länge die gesuchte Horizontalprojection erhält. Zu dem Ende werden wir zunächst ein wagrechtes und dann ein geneigtes Terrain voraussetzen.

Fig. 209.



1) Die Bodenfläche ist wagrecht, Fig. 209. Der Standpunkt des Instruments befinde sich in C und es sey die Drehaxe D des Fernrohrs lothrecht über C. Mit dem Diopter v, welches in der Regel 5 Fuss über dem Fusspunkt B der Latte steht, wird nach dem Fernrohr D visirt und hierdurch die Latte AB senkrecht zur Linie vD gestellt: von dieser Linie aber darf man, da DC nahezu gleich Bv ist, annehmen, dass sie der BC parallel und folglich ihr auch gleich sey. Wird das untere Fadenkreuz auf den Nullpunkt (o) der Latte gerichtet und ist ou = h der Abschnitt, welchen das obere Fadenkreuz angibt, so kann ohne merklichen Fehler der Schnittpunkt M der optischen Axe DM des Rohrs mit der Latte in der Mitte von ou angenommen werden. Hiernach lässt sich für jede beliebige Ablesung e der Winkel ε berechnen, welchen die Fernrohraxe mit dem Horizont oder der Linie vD bildet. Denn da der Abstand l des Nullpunktes o der Latte von der Absehlinie des Diopters v bekannt und $oM = \frac{1}{2}h$ ist, so wird zunächst

$$(Mv) = l - \tfrac{1}{2}h = (DM)\sin\varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

Würde die Latte auf MD senkrecht stehen, so wäre die Ablesung bei u gleich der Länge MD; da aber die Latte mit der Senkrechten auf MD den

messer und seine Latte eine Tafel, welche sofort für jede abgelesene Entfernung und Neigung die Reductionsgrösse oder diejenige Länge angibt, welche von der Ablesung abzuziehen ist. Im Anhange zu diesem Buche findet man diejenige Reductionstabelle (Nr. II), welche wir für den Reichenbach'schen Distanzmesser, wie er in der Ertel'schen Werkstätte angefertigt wird, neu berechnet und im Eingange des Anhangs erläutert haben.

§. 183. **Prüfung und Berichtigung.** Der Reichenbach'sche Distanzmesser ist zunächst in seiner Eigenschaft als Kippregel und hierauf als längenmessendes Instrument zu prüfen. Als Kippregel hat er dieselben sechs Anforderungen zu erfüllen, welche nach §. 116 an diese gestellt werden. Ob jenen Forderungen genügt wird, ist nach dem eben angeführten Paragraph zu untersuchen; nur die Bestimmung des Collimationsfehlers erheischt ein etwas abgeändertes Verfahren, weil die Visirlinien des Distanzmessers mit der optischen Axe wohl in einer Ebene aber nicht in einer geraden Linie liegen. Wir geben diese Abänderung in der Aufsuchung des Collimationsfehlers weiter unten (Nr. 3) an und bemerken hier nur noch, dass auch die Berichtigungen, welche an den zum Winkelmessen dienenden Theilen des Distanzmessers nöthig werden, ganz und gar nach §. 116 vorzunehmen sind.

Als Längenmesser ist der Reichenbach'sche Apparat auf folgende Eigenschaften zu prüfen:

1) ob die Distanzlatte richtig getheilt ist;
2) ob die beiden Fadenkreuze des Fernrohrs den rechten Abstand von einander haben; und
3) ob die optische Axe des Fernrohrs mit der Linealkante parallel läuft, wenn der Vertikalkreis auf Null steht.

Zu 1. Darf man, wie es hier geschieht, eine hinreichend starke aber nicht zu schwere, aus gut getrocknetem Holze angefertigte, mit einem kurzen Diopter und zwei festen Handgriffen versehene Latte voraussetzen, so ist die weitere Untersuchung dieser Latte sehr einfach. Man misst nämlich die Länge der Latte von der Stelle an, welche einer Entfernung von 50 Fuss entspricht, bis zu einem der unteren Endstriche, der etwa 1000 Fuss Entfernung angehört, berechnet sich hieraus durch eine einfache Division dasjenige Stück (i) der Theilung, welches einem Längenunterschiede von 50 Fuss zwischen 50 und 1000 Fuss entspricht, und sieht zu, ob zwischen diesen zwei Stellen die Lattentheilung ganz gleichförmig ist, wie sie seyn soll.

Nun fragt es sich, ob der Lattenabschnitt von 0 bis 50 die richtige Länge hat. Diese Länge ist aber nach den vorausgegangenen Messungen mit Hilfe der in §. 181 aufgestellten Formeln leicht zu berechnen. Bezeichnet nämlich

x den gesuchten Lattenabschnitt für die Entfernung von 0 bis 50 Fuss,
i den Lattenabschnitt für je 50 Fuss Längenunterschied zwischen 50 und 1000 Fuss,
c die erste und d die zweite Constante des Distanzmessers,

so gelten nach §. 181 und Gl. 133 für den vorliegenden Fall folgende Gleichungen:

$$50' = cx + d;$$
$$100' = c(x + i) + d;$$
$$150' = c(x + 2i) + d \quad \text{u. s. w.}$$

Zieht man jede vorhergehende Gleichung von der folgenden ab, so folgt $ci = 50'$, woraus sich die Constante c ergibt, während $d = 1{,}5\,f$ an dem Fernrohre abzumessen ist. Man erhält somit

$$x = (1 - 0{,}02\,d)\,i,$$

und diese berechnete Länge muss, wenn die Latte richtig seyn soll, mit der gemessenen zwischen 0 und 50 übereinstimmen.

An dem oben beschriebenen Instrumente ist $d = 2',55$ und $i = 0',706$; daher $x = 0',670$, und diese berechnete Länge stimmt mit der gemessenen, welche ebenfalls $0',67$ beträgt, völlig überein.

Zu 2. Um zu untersuchen, ob die Fadenkreuze den richtigen Abstand von einander haben, ist zunächst nöthig, dass man auf festem ebenen Boden eine lange gerade Linie ausstecke und genau abmesse. Von 100 zu 100 Fuss lässt man Pfähle einschlagen, um die Latte in bestimmten Entfernungen vom Instrumente aufstellen zu können. Ueber dem ebenfalls mit einem Pfahl bezeichneten Anfangspunkt der abgemessenen Linie stellt man den Messtisch centrisch und horizontal auf und bezeichnet auf dem Tischblatte durch die Lothgabel die Projection des Anfangspunktes, um den Ständer des Distanzmessers darüber zu bringen. Die Fadenkreuze sind schon vorher so gerichtet worden, dass man sie deutlich sieht und dass sich ihre Schnittpunkte bei horizontal stehendem Tische in Vertikalebenen bewegen. Nun lasse man die Latte auf dem Pfahl Nr. 1, der 100 Fuss entfernt ist, aufstellen und richte selbst das Fernrohr so auf dieselbe, dass man deutlich lesen und keine Parallaxe bemerken kann. Das eine (untere) Fadenkreuz wird auf Null gestellt und am anderen (oberen) abgelesen. Ausser dieser Ablesung macht man noch eine zweite am Vertikalkreise und schreibt beide auf. Dasselbe Verfahren wiederholt man vorsichtig für alle abgesteckten Punkte und reducirt alsdann alle abgelesenen Entfernungen mit Hilfe der Reductionstabelle auf den Horizont. Stimmen diese reducirten Entfernungen mit den abgemessenen genau überein oder finden nur ganz geringe bald positive bald negative Abweichungen davon statt, so hat man an dem Fadenmikrometer Nichts zu verbessern; sind aber diese Entfernungen entweder alle kleiner oder alle grösser als die abgemessenen Längen, so muss man in dem ersten Falle den Abstand der Fäden etwas grösser und in dem zweiten Falle etwas kleiner machen, was durch Lüften oder Anziehen der in Fig. 206 mit s bezeichneten Stellschraube geschieht. Nach dieser Berichtigung — welche so gemacht wird, dass die Ablesung für einen bestimmten Standpunkt der Latte (z. B. auf dem Pfahl Nr. 5) deren Entfernung genau entspricht — wiederholt man die früheren Aufstellungen, Ablesungen, Reductionen und Correctionen so lange, bis man mit der Leistung des Instruments zufrieden ist.

Zu 3. Das Verfahren, den Collimationsfehler des Reichenbach'schen Distanzmessers zu bestimmen, ist nur wenig von dem in §. 116 beschriebenen, zur Kippregel gehörigen, verschieden. Da man nämlich nicht längs der optischen Axe des Fernrohrs visiren kann, so müssen die zwei Absehlinien benützt werden, welche die beiden Fadenkreuze gewähren; wir wollen zunächst die obere wählen, d. h. diejenige, welche ausserhalb des Fernrohrs über der optischen Axe liegt. Verfährt man nun mit der Messung gerade so, wie im §. 116 angegeben; behält man ferner dieselben Bezeichnungen wie dort für die Ablesungen (w' und w'') am Gradbogen, den wahren Höhenwinkel (w) und den Collimationsfehler (c) bei, und bezeichnet man weiter noch den Winkel, welchen die hier benützte obere Visirlinie mit der optischen Axe des Fernrohrs bildet, mit δ, so ist nicht schwer einzusehen, dass folgende zwei Gleichungen richtig sind:

$$\left.\begin{aligned} w' &= w \pm c - \delta \\ w'' &= w \mp c + \delta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (139)$$

Hieraus folgt, wenn man die zweite Gleichung von der ersten abzieht,

$$w' - w'' = \pm 2c - 2\delta. \quad \ldots \ldots \quad (140)$$

Setzt man δ als bekannt voraus, so lässt sich hiemit der Collimationsfehler c berechnen; will man aber diese Voraussetzung nicht machen, so lässt sich δ wegschaffen, indem man mit der unteren Visirlinie dasselbe Verfahren durchführt wie mit der oberen. Bezeichnen für diese Absehlinie w_1 und w_2 die abgelesenen Höhen- und Tiefenwinkel, so gelten für dieselbe folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= w \pm c + \delta \\ w_2 &= w \mp c - \delta \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (141)$$

aus denen auf demselben Wege wie vorhin

$$w_1 - w_2 = \pm 2c + 2\delta \quad \ldots \ldots \quad (142)$$

erhalten wird. Verbindet man die Gleichungen (140) und (142) durch Addition, so folgt

$$\pm c = \frac{w' - w'' + w_1 - w_2}{4}. \quad \ldots \ldots \quad (143)$$

Hat man den Collimationsfehler des Reichenbach'schen Distanzmessers auf diesem Wege bestimmt, so schaffe man ihn entweder durch Verschiebung des Nonius weg oder bringe ihn gehörig in Rechnung. In dieser Beziehung hat man die Gleichungen (139) und (141) zu beachten, welche Folgendes lehren:

1) Misst man die Neigung einer Linie an ihren beiden Endpunkten und jedesmal mit einer und derselben Absehlinie, so gibt das arithmetische Mittel aus den beiden Ablesungen den richtigen Neigungswinkel, der Collimationsfehler mag seyn welcher er will. Denn aus (139) und (141) folgt durch Addition:

$$w = \frac{w' + w''}{2} \quad \text{und} \quad w = \frac{w_1 + w_2}{2}. \quad \ldots \quad (144)$$

2) Misst man die Neigung einer Linie nur an einem Endpunkte, aber

nach einander mit beiden Visirlinien, so ist zu dem arithmetischen Mittel der beiden Ablesungen am Gradbogen der Collimationsfehler zu addiren oder von ihm zu subtrahiren, je nach der Lage dieses Fehlers und des gemessenen Winkels. Denn aus der Verbindung der beiden ersten oder der beiden letzten Gleichungen der Formeln (139) und (141) folgt:

$$w = \frac{w' + w_1}{2} \mp c \quad \text{und} \quad w = \frac{w'' + w_2}{2} \pm c. \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

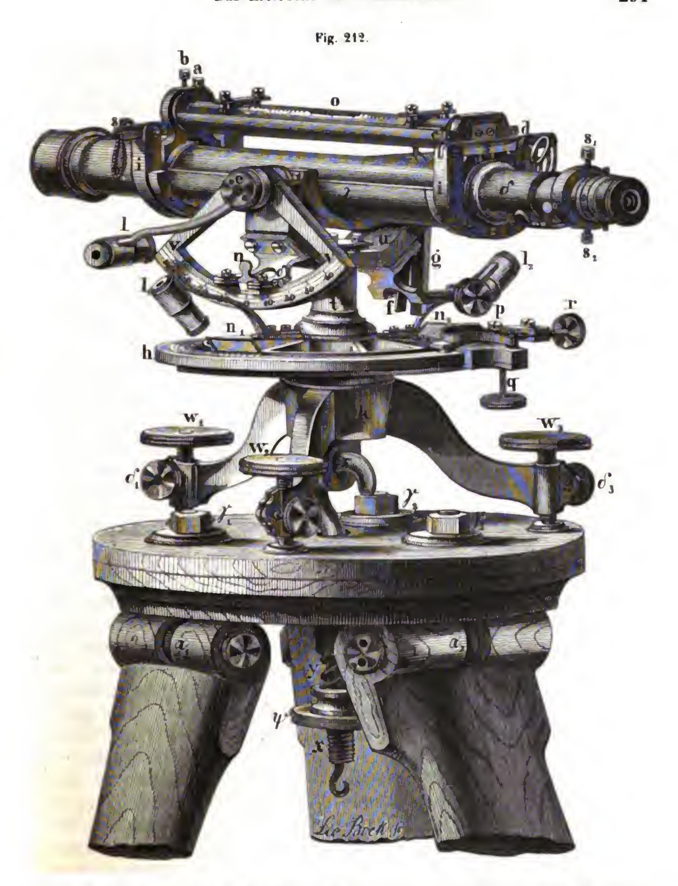
Das Ertel'sche Universalinstrument [1] als Theodolith und Distanzmesser.

§. 184. Dieses Instrument erfüllt drei Zwecke zugleich, indem es zum Messen horizontaler und vertikaler Winkel, zum Nivelliren und zum Distanzmessen dient. Als Distanzmesser stimmt es im Principe mit dem Reichenbach'schen Instrumente überein und unterscheidet sich von diesem nur in der mechanischen Einrichtung des Fadenmikrometers, das in Folge der Verbindung von Theodolith, Nivellirinstrument und Distanzmesser einer Abänderung bedurfte. Gerade diese Verbindung, welche in vortrefflicher Weise ausgeführt ist, macht das in Rede stehende Instrument zu einem der brauchbarsten geodätischen Apparate. Wir haben dasselbe in Fig. 212 perspectivisch, in Fig. 213 aber im lothrechten Durchschnitte abgebildet und werden es nun kurz beschreiben.

Auf dem Gestelle (π), das nach Reichenbach wie das in §. 112 S. 143 beschriebene Messtischgestelle gebaut ist, steht ein messingner Dreifuss (k) mittels dreier Stellschrauben (w), deren aufgeschlitzte Muttern durch drei kleinere Schräubchen (δ) nach Erforderniss etwas gelüftet oder verengt werden können. Ein Hacken (x) verbindet diesen Dreifuss so mit dem Gestelle, dass er nicht herabfallen, sich aber doch so viel bewegen kann, als die Horizontalstellung des Kreises durch die Fussschrauben erfordert. Zu dem Ende ist der Hacken unten mit einer federnden Spirale (y) umwunden, welche einerseits an die Gestellplatte (π) und andererseits an die am unteren Ende des Hackens befindliche Schraubenmutter (ψ) drückt. An dem Dreifusse ist der Horizontalkreis (h) durch Speichen und der Zapfen (z, Fig. 213) für den Alhidadenkreis durch eine Schraube befestigt. Dieser nach oben sich verjüngende stählerne Zapfen steckt in der Mitte des Dreifusses (k) und steht zur gemeinsamen Ebene des Horizontal- und Alhidadenkreises senkrecht. Mit Hilfe einer genau gebohrten Büchse (t), an der sich die Speichen (m) des Alhidadenkreises vereinigen, dreht sich dieser um den Vertikalzapfen und in dem Horizontalkreise; durch die Klemmschraube q kann der Alhidadenkreis angehalten und durch die Mikrometerschraube r alsdann noch etwas vor- oder rückwärts bewegt werden. Der silberne Limbus des Horizontalkreises ist in 2160 gleiche Theile, ein Grad also in 6 Theile getheilt. Die unmittelbare Ablesung geht somit bis zu 10 Minuten. Die beiden auf

[1] In dem Preissverzeichnisse von Ertel und Sohn ist dieses Instrument unter dem Namen »grosses Nivellirinstrument« aufgeführt, weil es als solches vorzugsweise verwendet wird.

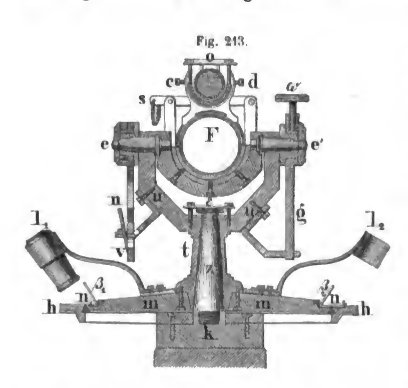
Fig. 212.



dem Alhidadenkreise befindlichen Nonien (n_1, n_2) stehen sich diametral gegenüber und haben eine Angabe von 10 Sekunden, da 60 Noniustheile 59 Limbustheilen gleich sind. Der Zweck der Lupen l_1 und l_2 ist bekannt. Die Büchse (t), welche den Alhidadenkreis trägt und deren Bewegung um den Hauptzapfen z durch die zwischen v und u sichtbaren Federn und Schrauben (ε) geregelt wird, erweitert sich nach oben in zwei Arme (u, u),

denen sich ein halbcylindrisches Lager (λ) um eine zur Hauptaxe senkrechte und zu den Kreisebenen parallele Axe (e e') drehen und feststellen lässt. Dieses Lager ist für das Fernrohr bestimmt, dessen Objectivröhre mit zwei genau abgedrehten Metallringen von gleichem Durchmesser auf den ebenfalls genau cylindrisch ausgedrehten Endstücken (i, i) des Lagers ruht und in denselben um seine optische Axe gedreht werden kann, während es sich mit dem Lager um die Axe ee', welche die Drehaxe des Fernrohrs heisst und dessen optische Axe senkrecht schneidet, bewegt. Auf den Metallringen der Objectivröhre des Fernrohrs stehen die cylindrischen Füsse einer nach Fig. 20 und §. 38 eingerichteten Röhrenlibelle, welche sich auf dem Fernrohr umsetzen und durch Schliessen (s, s) festhalten lässt. An der Drehaxe (ee') des Fernrohrs ist ein Gradbogen (v) angebracht, welcher zum Messen vertikaler Winkel dient. Derselbe umfasst nur einen Viertelkreis und dient somit bloss zur Messung von Höhen- und Tiefenwinkeln, welche 45⁰ nicht überschreiten. Um mehr als diesen Betrag lässt sich auch das Fernrohr nicht kippen. Indem man diese Beschränkung der Vertikalbewegung eintreten liess, hatte man nur den Zweck der Distanzmessung, welche keine grösseren Höhen- oder Tiefenwinkel fordert, und bloss gewöhnliche trigonometrische Höhenmessungen vor Augen. Wollte man in der Messung der Vertikalwinkel weiter gehen, so müsste der Träger des Fernrohrs erhöht und dieses selbst zum Durchschlagen eingerichtet werden. Dadurch gienge aber an der Einfachheit des in Rede stehenden Universalinstruments Viel verloren und sein Preiss stiege bedeutend. Diese Rücksichten waren für die angedeutete Einrichtung des Vertikalkreises entscheidend. Derselbe hat einen silbernen Limbus, welcher unmittelbar in Viertelgrade getheilt ist, und einen Nonius (n), der einzelne Minuten angibt. Der Nullpunkt (0) liegt in der Mitte des Gradbogens und diese in der Ebene, welche durch die Drehaxe ee' des Fernrohrs geht und auf dessen optischer Axe senkrecht steht. Der Nonius n läuft in zwei Körnern (δ, δ), welche eine geringe Verschiebung desselben am Gradbogen zu dem Zwecke verstatten, den Collimationsfehler zu beseitigen. Die grobe Drehung des Vertikalkreises ist möglich, wenn die bei e' auf die Axe ee' drückende Schraube (ω) gelüftet wird; ist dagegen diese Schraube angezogen, so kann

Fig. 213.

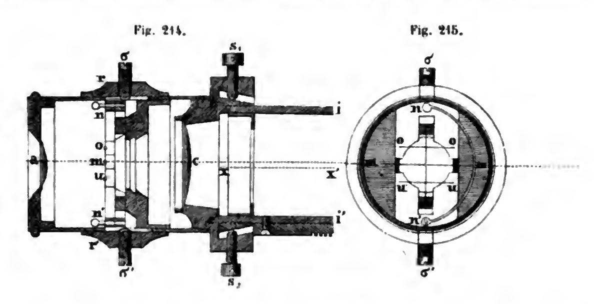


der Vertikalkreis und das Fernrohr sammt der Libelle nur noch mit der Mikrometerschraube p, welche auf den Hebel g und die Stahlfeder f wirkt, fein gedreht werden.

Was das Fernrohr betrifft, so ist dasselbe ein astronomisches mit achromatischem Objectiv von 17 Linien Oeffnung und 18 Zoll Brennweite und einem Huygens'schen Doppelocular, welches eine 25malige Vergrösserung gewährt. Fig. 214 stellt einen Längenschnitt und Fig. 215 einen Querschnitt dieses Oculars und des in ihm angebrachten Fadenmikrometers vor.

Die beiden Ocularlinsen sind mit a und c, die zum Distanzmessen dienenden Horizontalfäden mit o und u, und die Fäden des zum Winkelmessen und Nivelliren bestimmten Fadenkreuzes mit m und n bezeichnet.

Fig. 214. Fig. 215.



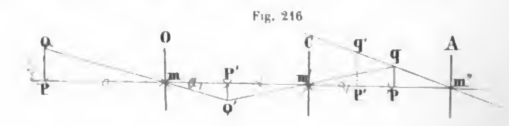
Der in der Richtung n n' ausgespannte Vertikalfaden und die drei Horizontalfäden (o, m, u) liegen in zwei einander berührenden, auf der optischen Axe des Fernrohrs senkrecht stehenden Ebenen dergestalt, dass sich die Fäden o o und u u unabhängig von den Fäden m m und n n bewegen lassen. Die Bewegung der Fäden o o und u u geschieht durch die Schräubchen σ und σ', welche auf die Plättchen n, n' mit den Fäden o, u drücken, und durch die Stahlfeder n m n', welche in n und n' mit den eben genannten Plättchen fest verbunden ist und sie auseinander zu ziehen strebt. Man begreift, dass es durch diese Einrichtung möglich ist, nicht nur den Abstand o u zu berichtigen, sondern auch die Abstände o m und u m einander gleich zu machen. Damit das mittlere Fadenkreuz in die optische Axe des Fernrohrs gebracht werden kann, ist die Ocularröhre in zwei Theile getrennt, von denen der eine gegen den anderen in zwei zu einander und zur optischen Axe senkrechten Richtungen verstellt werden kann. Diese Verstellung geschieht durch die vier Schräubchen s_1 bis s_4, wovon je zwei einander diametral gegenüber stehen. Sollte z. B. die Axe x x' mit a c vereinigt werden, so müsste man das Schräubchen s_1 lüften und s_2 anziehen; denn durch dieses Verfahren bewegt sich offenbar der Theil e i i' e' der Ocularröhre an der Fläche e e' aufwärts gegen den vorderen Theil a e e' a.

Das Augenglas a ist hier etwas grösser als an den gewöhnlichen astronomischen Fernröhren, und zwar desswegen, weil es zu gleicher Zeit für die drei Kreuzungspunkte o, m, u bestimmt ist, während bei der in §. 180 beschriebenen Einrichtung jedes Fadenkreuz sein eigenes Augenglas hat. Wollte man hier auch jeden Kreuzpunkt durch ein besonderes Glas anschauen, so wären deren drei erforderlich, die sich nicht wohl anbringen liessen. Sie sind aber auch nicht nöthig, denn die Erfahrung lehrt, dass man sich in dem vorliegenden Falle recht gut mit einem Augenglase begnügen kann.

Die Distanzlatte, welche zu dem Ertel'schen Universalinstrument gehört, ist eben so eingerichtet wie die in §. 180 beschriebene, nur ist sie kürzer und mit einer Nivellirlatte vereinigt: es enthält nämlich eine Seite die Theilung für Entfernungen bis zu 600 Fuss und die andere die Theilung für das Nivelliren. Wäre diese Latte genau so lang wie die frühere, so würde man auch dieselben Reductionsgrössen, welche für jene erste Latte gelten, anwenden können; so aber müssen für eine kürzere Latte neue berechnet werden, weil nach Gleichung 137 der Winkel ε, welcher in den Reductionsformeln vorkommt, von dem gegenseitigen Abstand l des Nullpunktes der Latte und der Absehlinie des Diopters abhängt. Die Grösse l beträgt an der Latte des Ertel'schen Distanzmessers nur 4 Fuss, während sie an der Reichenbach'schen 9,8 Fuss gleich ist.

§. 185. **Wirkung des Collectivglases.** Das Fernrohr des in §. 180 beschriebenen Reichenbach'schen Distanzmessers entbehrt das Collectivglas des Ertel'schen. Man kann desshalb die Gleichung (133), welche die mathematischen Beziehungen zwischen Entfernung, Lattenabschnitt, Brennweite des Objectivs und Fadenabstand für das erstere Distanzfernrohr ausdrückt, nicht auch für das letztere annehmen, ohne durch eine besondere Untersuchung dazu berechtigt zu seyn, welche wir hiemit führen.

Fig. 216



In Fig. 216 stelle PQ die Latte, O das Objectiv, C die Collectivlinse und A das Augenglas des Ertel'schen Distanzmessers vor; m"m'm sey die optische Axe des Fernrohrs, P'Q' das erste und pq das zweite Bild des Lattenabschnittes PQ. Zwar wird in dem Fernrohre des Ertel'schen Universalinstruments zwischen dem Objectiv und der Collectivlinse kein Bild erzeugt, in so ferne letztere in der Brennweite des Objectivs steht; wir können aber von unserer allgemeineren Betrachtung leicht auf jenen besonderen Fall übergehen. Bezeichnet man mit

a die Entfernung mP der Latte vom Objectiv O; mit

α die Entfernung des Bilds P'Q' von der Collectivlinse C; mit
h den ganzen Lattenabschnitt 2(PQ); mit
f, f_0, f_1 die Brennweiten der Linsen O, C, A; und mit
a_1 und α_1 die Brennweiten mP' und m'p des ersten und zweiten Bilds, so ist zunächst nach §. 46 und Gleichung (23) die Bildgrösse

$$P'Q' = \frac{a_1 h}{2a} = \frac{fh}{2(a-f)}, \text{ und folglich}$$

$$pq = \frac{\alpha'}{\alpha}(P'Q') = \frac{f_0 f h}{2(a-f)(\alpha - f_0)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

Da das Huyghens'sche Ocular so eingerichtet ist, dass $f_0 = 3 f_1$, $m'p = \alpha_1 = pm'' = f_1$ und $P'm' = \alpha = -\,^3/_2\, f_1$ ist, so wird, wenn man diese Werthe einsetzt, die Bildgrösse

$$pq = -\frac{fh}{3(a-f)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

Nennt man b' den Abstand der Horizontalfäden o und u des Fadenmikrometers, so ist b' = 2 (pq) zu setzen, wenn PQ der halbe von den Absehlinien gedeckte Lattenabschnitt ist. Nimmt man hier, wo es sich bloss um die absolute Grösse des Bilds pq handelt, von dem Vorzeichen des Ausdrucks für pq Umgang, so erhält man aus der letzten Gleichung nach Einführung des Ausdrucks b' die Entfernung

$$a = \frac{2f}{3b'}h + f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (148)$$

Setzt man den Coefficienten von h gleich c' und die Entfernung der Latte von der Drehaxe des Fernrohrs $a + {}^1/_2 f = e$, so wird

$$e = c'h + 1{,}5f = c'h + d, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

ein Ausdruck, welcher sich von dem in Nr. 133 nur dadurch unterscheidet, dass hier

$$c' = \frac{2f}{3b'} \text{ und dort } c = \frac{f}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

ist. Erwägt man aber, dass für den Ertel'schen Distanzmesser dieselbe Latte wie für den Reichenbach'schen gilt, also zu einem bestimmten Werth von e für beide Instrumente derselbe Lattenabschnitt h stattfindet, so wird offenbar c' = c, dagegen aber

$$b' = \frac{2f}{3c'} = \frac{2f}{3c} = \frac{2}{3}b. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

Und in der That beträgt der Abstand der Horizontalfäden o und u an dem Ertel'schen Universalinstrumente nur zwei Drittel des Abstandes der Kreuzpunkte in dem Reichenbach'schen Distanzmesser, nämlich 1,6 bayer. Dezimallinien, während die Brennweite f des Objectivs hier wie dort = 1,7 bayer. Fuss ist.

Die Wirkung des Collectivglases auf das Fadenmikrometer besteht somit darin, dass es den Abstand der Fäden kleiner zu machen gestattet als ein Fernrohr von gleicher Brennweite ohne Collectivglas.

Die Gleichung (147) findet nur in der Voraussetzung statt, dass die

Mikrometerfäden von der Collectivlinse um die Brennweite f_1 des Augenglases abstehen; es darf somit auch, wenn jene Gleichung richtig bleiben soll, keine Verschiebung des Fadenkreuzes stattfinden. Denn würde man die Fäden dem Augenglas nähern, d. h. α_1 grösser als f_1 machen, so würde auch der Factor $(\alpha - f_0)$ im Nenner des Ausdrucks (146) für pq grösser und folglich das Bild pq selbst kleiner werden; umgekehrt müsste das Bild wachsen, wenn man die Fäden von dem Augenglas weiter weg und näher an das Collectivglas rückte. Hieraus geht zur Genüge hervor, dass das deutliche Sehen der Fadenkreuze nur durch Verschiebung des Augenglases längs der optischen Axe bewirkt werden darf, weil sonst verschiedene Augen von einander abweichende Ablesungen an der Distanzlatte erhalten würden.

§. 186. **Reduction der schiefen Längen.** Für die Herstellung der Horizontalprojection der geneigten Linien, deren Länge mit dem Ertel'schen Distanzmesser bestimmt worden ist, gelten ganz und gar die Betrachtungen des §. 182 und es ist denselben nur die Bemerkung beizufügen, dass die Werthe von ε in dem vorliegenden Falle, wo die Distanzlatte bloss für 600 Fuss Entfernung eingerichtet ist, aus der Gleichung (136) erhalten werden, wenn man $l = 4$ Fuss setzt. Unter dieser Annahme wird

$$m = \frac{2lc + d}{c} = 8{,}036, \quad n = \frac{1}{c} = 0{,}01412 \quad . \quad . \quad . \quad (152)$$

und die Gleichung zur Berechnung des Winkels ε:

$$\sin 2\varepsilon = \frac{8{,}036}{e} - 0{,}01412. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

Darnach ist folgende Tabelle gerechnet.

Ablesung e	Winkel ε	Ablesung e	Winkel ε	Ablesung e	Winkel ε	Ablesung e	Winkel ε
50′	4° 13′	175′	0° 55′	300′	0° 22′	425′	0° 8′
75′	2° 40′	200′	0° 45′	325′	0° 18′	450′	0° 6′
100′	1° 54′	225′	0° 37′	350′	0° 15′	500′	0° 3′
125′	1° 26′	250′	0° 31′	375′	0° 13′	550′	0° 1′
150′	1° 8′	275′	0° 26′	400′	0° 10′	600′	0° 0′

Auf diese Tabelle und die Formel Nr. 138 stützt sich die zweite mit Nr. III bezeichnete Reductionstabelle, welche für die kleineren Ertel'schen Distanzlatten gilt und dem Anhange beigefügt ist. Es bedarf wohl keines besonderen Nachweises, dass die kleine Latte mit der zugehörigen Reductionstabelle eben so gut für den Reichenbach'schen als die grosse Latte mit ihrer Tabelle für den Ertel'schen Distanzmesser gebraucht werden kann.

§. 187. **Prüfung und Berichtigung.** Die Aufstellung und der Gebrauch des Ertel'schen Universalinstruments als Theodolith stimmen mit jenen des früher beschriebenen einfachen Theodolithen überein; die Verwendung als Distanzmesser ergibt sich aus den Erklärungen des Reichenbach'schen Instruments von selbst, und von dem Gebrauche desselben als Nivellirinstrument

ist in dem nächsten Abschnitt die Rede. Es ist daher nur noch Einiges über die Prüfung und Berichtigung des vereinigten Theodolithen und Distanzmessers beizufügen.

Wir übergehen sofort die Untersuchungen über richtige Theilung der Kreise und Nonien, Excentricität der Alhidade und des Fernrohrs, senkrechte Lage der Kreise gegen ihre Axen u. s. w., indem wir in dieser Beziehung auf §. 138 verweisen, und beschäftigen uns bloss mit denjenigen Prüfungen, welche von Zeit zu Zeit vorzunehmen und darauf zu richten sind:

1) ob die Libellenaxe mit der Fernrohraxe parallel läuft;
2) ob die Fadenkreuze deutlich gesehen werden;
3) ob das mittlere Fadenkreuz in der optischen Axe liegt;
4) ob sich die optische Axe des Fernrohrs in einer zum Horizontalkreis senkrechten Ebene bewegt;
5) ob der Vertikalkreis keinen Collimationsfehler hat; und
6) ob die Horizontalfäden des Fadenkreuzes den rechten Abstand von einander haben.

Die erste Prüfung und Berichtigung wird nach der in §. 39 gegebenen Anleitung vorgenommen. Bei der zweiten richtet man das Fernrohr gegen die freie Luft und dreht das in die Ocularröhre geschraubte Augenglas so lange vor- oder rückwärts, bis man die Fäden als reine schwarze Linien deutlich sieht. Die dritte Untersuchung geschieht nach §. 65, während die Berichtigung auf die bei der Beschreibung des Fernrohrs angegebene Weise durch die Stellschräubchen s_1, s_2 und s_3, s_4 bewirkt wird. Damit die vierte Forderung erfüllt werde, ist es nöthig, dass die optische Axe des Fernrohrs senkrecht zu dessen Drehaxe und diese selbst senkrecht zur Alhidadenaxe stehe. Diese zwei Bedingungen sind gleichzeitig erfüllt, wenn die in der optischen Axe liegende mittlere Visirlinie bei horizontal stehendem Kreise eine lothrechte Linie beim Auf- und Niederkippen fortwährend deckt; findet diese Deckung nicht statt, so lässt sich leider eine Verbesserung der gegenseitigen Lage der genannten Axen nur durch den Mechaniker vornehmen, da keine Correctionsschrauben hiefür angebracht sind. Auch bleibt es bei dieser Untersuchung ungewiss, ob der Fehler von der schiefen Lage der zwei Axen des Fernrohrs allein, oder bloss von der Dreh- und Alhidadenaxe, oder endlich von allen drei Axen zugleich herrührt. Wollte man hierüber auf einfachem Wege Gewissheit erlangen, so müsste das Fernrohr zum Durchschlagen eingerichtet seyn. Lehrte nicht die Erfahrung, dass an allen Ertel'schen Instrumenten von der Einrichtung, welche uns jetzt beschäftigt, die Bewegung der optischen Axe des Fernrohrs auffallend genau in einer Vertikalebene vor sich geht, wenn der Kreis horizontal steht und das Fadenkreuz genau centrirt ist, so wäre man veranlasst, Durchschlagbarkeit des Fernrohrs und Stellschrauben an der Drehaxe desselben dringend zu wünschen. Die Bestimmung und Beseitigung des Collimationsfehlers geschieht unverändert nach §. 137 Nr. 4 S. 197, und die letzte Untersuchung,

welche die Horizontalfäden betrifft, nach Anleitung des §. 183 Nr. 2 S. 288. Hiezu ist nur noch zu bemerken, dass man die Abstände mo und mu der Horizontalfäden o und u gerne einander und $^1/_2$ b′ gleich macht, weil man manchmal in den Fall kommt, eine grössere Länge als die Latte bei Benützung der Fäden o und u gestattet, zu messen. In solchen Fällen benützt man die Fäden o und m oder m und u, weil, wenn b′ nur halb so gross ist als gewöhnlich, ein und derselbe Lattenabschnitt h nahezu die doppelte Entfernung anzeigt. Denn setzt man in den Gleichungen (148) und (149) $^1/_2$ b′ für b′, so geht a in a′ und e in e′ über und es wird

$$a' = \frac{4\,f}{3\,b'}\,h + f \text{ und } e' = 2\,c'\,h + d. \qquad (154)$$

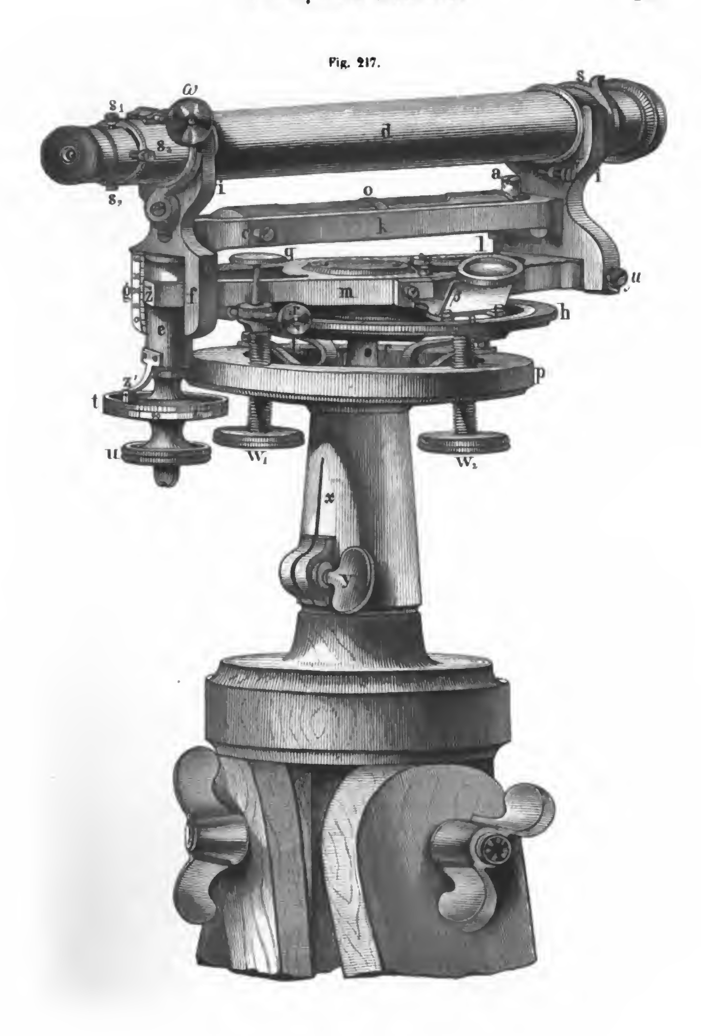
Da $e = c'h + d$, so verhält sich $e : e'$ wie $(c'h + d) : (2c'h + d)$ oder fast wie $1 : 2$, da d im Verhältniss zu dem Produkte $c'h$ nur sehr klein ist.

Der Stampfer'sche Distanzmesser.

§ 188. Dieser Distanzmesser besteht nicht für sich allein, sondern ist mit einem Nivellirinstrumente und einem Horizontalkreise verbunden, erfüllt also, mit Ausnahme der Vertikalwinkelmessung, dieselben Zwecke wie das eben betrachtete Ertel'sche Universalinstrument. Wir werden das Stampfer'sche Instrument hier nur in seiner Eigenschaft als Distanz- und Winkelmesser und erst später als Nivellirinstrument betrachten. Doch geben wir sofort eine vollständige Beschreibung davon, der wir die perspectivische Abbildung in Fig. 217 und den lothrechten Durchschnitt des Horizontalkreises in Fig. 218 zu Grunde legen.

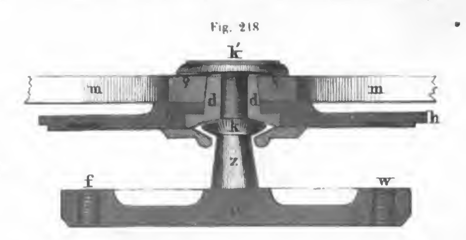
Das dreibeinige Gestelle, worauf das Instrument ruht, ist von dem Reichenbach'schen oder s. g. Münchener Stative wesentlich verschieden, indem hier die Füsse an den Wänden eines dreiseitigen hölzernen Prisma's gedreht und durch Schrauben mit Flügelmuttern festgestellt werden können. Der hölzerne Kopf des Stativs läuft in einen abgestumpften Kegel aus, dessen Axe mit der des Prisma's zusammenfällt und der dazu bestimmt ist, mit der Hülse x, die durch eine Schraube y angepresst werden kann, das Instrument aufzunehmen. Diese Hülse trägt eine durch Schrauben senkrecht mit ihr verbundene starke Grundplatte p, welche innen ausgedreht ist, um zwei Stahlfedern f_1 und f_2 grösseren Spielraum zu gewähren, während sie am Rande zwei um 90° von einander abstehende Stellschrauben w_1 und w_2 enthält, die in Verbindung mit den ihnen gegenüberstehenden Stahlfedern f_1 und f_2 zur Horizontalstellung des Kreises h dienen, der auf die aus Fig. 218 näher ersichtliche Weise durch eine Nuss (k) mit der Grundplatte p vereinigt ist. Der Zapfen z und die Nuss k sind von Stahl und unbeweglich; der Kreis dagegen kann sich, durch die Stellschrauben und Federn veranlasst, nach zwei auf einander senkrechten Richtungen soweit vertikal bewegen, als es zu seiner Horizontalstellung erforderlich ist. Damit die Federn und Schrauben den Kreis h nicht zu stark angreifen, bestehen ihre oberen Theile aus

Fig. 217.



Stückgut, während in die untere Fläche des Kreises ein stählerner Ring eingelassen ist, auf den jene drücken. In der oberen Fläche des Kreises befindet sich ein silberner Limbus, welcher mit Hilfe eines Nonins (n), zu dem die Blende β und die Lupe l gehören, Horizontalwinkel bis zu einer Minute Genauigkeit angibt. Die Alhidade (m) dreht sich um den mit dem Horizontalkreise fest verschraubten hohlen Zapfen d und wird durch die Kopfschraube k' vor dem Abheben bewahrt, während der federnde Ring die Gleichmässigkeit ihrer Bewegung fördert. Die Klemmschraube q hemmt die grobe Drehung der Alhidade und durch die Mikrometerschraube r wird die feine Drehung bewerkstelligt. Mit der Alhidade steht der Träger (i, i) des Fernrohrs und der Libelle in Verbindung. Derselbe kann sich um eine mit dem Horizontalkreis parallele und zur Alhidadenaxe senkrechte Axe $l\mu$ um ungefähr 8 Grade auf und ab bewegen, und es geschieht diese Bewegung durch die Mikrometerschraube et, welche bereits in §. 74 beschrieben worden ist, so dass wir jetzt nur noch anzuführen brauchen, dass die dort mit d bezeichnete feste Platte hier die Alhidade m und das in Fig. 68 und 69 p genannte Plättchen hier der vordere Theil fi des Fernrohr- und Libellenträgers ist. Gerade diese Schraube, welche mit höchster Sorgfalt gearbeitet

Fig. 218



ist, macht den wesentlichsten Theil des Distanzmessers aus, so wie sie auch zu einer besonderen Art des Nivellirens dient. Sie ist bekanntlich so eingerichtet, dass bei einer ganzen Umdrehung die Scala g um einen Theilstrich gegen den an der Alhidade angebrachten festen Zeiger z fortrückt. Dieser Zeiger misst somit die ganzen Umdrehungen der Schraube, während die Trommel t unmittelbar Hundertel und eine gute Schätzung sogar noch Tausendel einer Umdrehung angibt. Die Röhrenlibelle o befindet sich in einem Messingkasten k, welcher an den Träger i, i so angeschraubt ist, dass die Libellenaxe nahezu schon mit der Fernrohraxe parallel läuft und der Rest von Abweichung durch die Stellschräubchen a und c leicht beseitigt werden kann. Die beiden Schräubchen c, c dienen zur horizontalen, a aber zur vertikalen Berichtigung. Das Fernrohr (d) ist in unserer Zeichnung wegen des beschränkten Raumes einer Druckseite etwas verkürzt dargestellt; in Wirklichkeit hat es eine Länge von 13 Pariser Zoll und eine Objectivöffnung von 13 Pariser Linien. Sein Objectiv ist selbstverständlich

achromatisch, während das Ocular, abweichend von den meisten Messfernrohren, in der Regel kein astronomisches aus zwei, sondern ein terrestrisches aus vier Linsen ist, zwischen denen sich das einfache Fadenkreuz befindet. Es wird übrigens das Fernrohr, wenn es gewünscht wird, von der mechanischen Werkstätte des polytechnischen Instituts in Wien, welche allein die Anfertigung des Stampfer-Starke'schen Nivellirinstruments besorgt, mit einem astronomischen Ocular von 20maliger Vergrösserung versehen. Das terrestrische Ocular vergrössert nur 15mal. Das zum Umlegen eingerichtete Fernrohr ruht mit zwei genau abgedrehten Metallringen in den ebenfalls cylindrisch ausgehöhlten Trägern i, i und wird darin durch zwei drehbare Hacken s, s festgehalten. Die Bewegung der Ocularröhre geschieht durch das Getriebe ω und die Berichtigung des Fadenkreuzes durch die vier Stellschräubchen s_1 bis s_4, welche in bekannter Weise auf den Ring wirken, der das Fadenkreuz trägt. An dem hinteren Theil des Trägers i ist ein Kloben mit einem Stellschräubchen v, das auf einen Ansatz der Objectivröhre drückt, sichtbar. Diese Vorrichtung hat den Zweck, das Fernrohr in dem Lager so zu richten, dass von den beiden Fäden des Fadenkreuzes der eine genau horizontal und der andere vertikal steht.

Die Distanzlatte, welche zu dem Stampfer'schen Instrumente gehört, ist in Fig. 219 von der Vorder- und in Fig. 220 von der Rückseite abgebildet. Dieselbe besteht aus zwei Theilen A und B, welche in zwei Metallhülsen m und n aneinander auf- und niedergeschoben und deren Zieltafeln v, v' in einem beliebigen, auf dem Massstabe an der Rückseite abzulesenden Abstand durch eine Klemmschraube s festgestellt werden können. Beim Distanzmessen macht man den Abstand der Mittelpunkte v und v' der Zieltafeln gewöhnlich einer Ruthe (10 Fuss) oder einer Klafter (6 Fuss) gleich. Da diese Latten gleichzeitig auch zum Nivelliren dienen, so wird von ihrer Einrichtung für diesen Zweck im nächsten Abschnitt noch weiter die Rede seyn. Es versteht sich von selbst, dass wenn eine Latte bloss für das Distanzmessen allein anzufertigen wäre, diese auch bloss aus einer einzigen Stange mit zwei feststehenden Zielscheiben bestehen könnte.

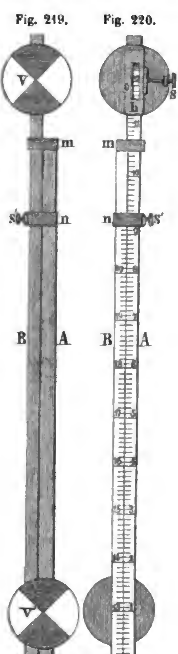
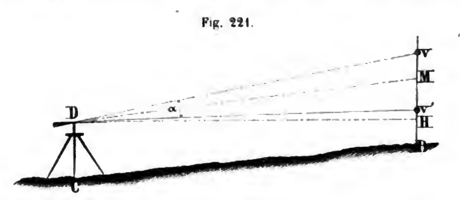


Fig. 219. Fig. 220.

§. 189. **Aufstellung und Gebrauch.** Wir setzen ein vollständig berichtigtes Instrument voraus und zeigen, wie damit Horizontalwinkel und Entfernungen gemessen werden können. Bei der Berichtigung des Instruments hat man an der Scala g und der

Trommel t den Stand der Mikrometerschraube bemerkt, bei welchem die Fernrohr- und Libellenaxe senkrecht zur Alhidadenaxe stehen. Ist dieser Stand z. B. = 24,96, so dreht man die Schraube e am Kopfe u so lange, bis der Zeiger z nahe an 25 und der Zeiger z' auf 96 steht. Hierauf bringt man, nach Oeffnung der Klemme der Alhidade durch die Schraube q, das Fernrohr in die Richtung einer Stellschraube (w_1) und der ihr entgegenwirkenden Feder (f_2) und bewirkt durch die Stellschraube das Einspielen der Libelle; findet dieses statt, so dreht man die Alhidade über die zweite Stellschraube (w_2) und ihre Feder (f_1) und verfährt wie vorhin. Spielt auch hier die Libelle ein, so kann man die Alhidade nochmals in die erste und abermals in die zweite Stellung bringen und durch die Schrauben w_1 und w_2 verbessern, was an dem Stand der Libelle allenfalls noch zu verbessern seyn sollte. Spielt die Libelle nach den zwei Richtungen $w_1 f_2$, $w_2 f_1$ ein, so steht der Kreis horizontal und es kann ein Horizontalwinkel, dessen Schenkel keine starke Neigung gegen den Horizont haben,[1] gemessen werden, wenn man erst auf den linken Schenkel einstellt, den Nonius abliest, dasselbe Verfahren am rechten Schenkel wiederholt und den Unterschied beider Ablesungen bestimmt. Soll die Entfernung eines Punktes C von B gemessen werden, so stelle man das Instrument (nach Fig. 221) centrisch über C und die Latte lothrecht über B auf, bringe das Fernrohr in die Richtung CB, verstelle das Ocular so, dass man die Zieltafeln besstmöglichst sehen kann, visire hierauf die obere Tafel (v) an, lese den Stand (o) der Schraube ab, drehe dann das Fernrohr mit der Mikrometerschraube so weit herab, dass das Fadenkreuz die untere Zieltafel (v') in der Mitte trifft, lese wieder den Stand (u) der

Fig. 221.



Schraube ab, stelle endlich auch das Fernrohr horizontal und bemerke für diese Richtung den Stand (h) der Mikrometerschraube. Stellt man die Differenz o — u der beiden ersten Ablesungen her und sucht die zu derselben gehörige Länge in der Tafel Nr. IV, so gibt diese die Entfernung der Drehaxe des Fernrohrs von der Mitte der Latte an, während die Reductionstabelle Nr. VI mit Hilfe von o — u und h — u die Grösse liefert, welche wegen der schiefen Lage der gemessenen Länge von dieser abzuziehen ist. Die Einrichtung und der Gebrauch dieser Tafeln ist in dem folgenden Paragraph begründet und im Anhange näher erklärt.

[1] Das Fernrohr bewegt sich nur um 8 Grade in vertikaler Richtung

§. 190. **Theorie.** Nach §. 75 ist der Winkel α, welchen die optische Axe des Fernrohrs zwischen den auf die obere und untere Zielscheibe gerichteten Absehlinien D v und D v' durchlaufen hat, der Anzahl o — u der Schraubengänge proportional, und da der Winkel α unter allen Verhältnissen klein ist, so kann man ohne merklichen Fehler

$$\tan \alpha = c\,(o - u) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (155)$$

setzen, wenn man unter c eine Constante versteht, welche der Einrichtung des Instruments und der Höhe der Schraubengänge zukommt. Bedeutet ferner d den constanten Abstand v v' der beiden Zieltafeln und e die Entfernung D M, so ist bei der geringen Neigung der Latte gegen die Linie D M und bei der Kleinheit des Winkels α genau genug

$$e = \frac{d}{\tan \alpha} = \frac{d}{c\,(o - u)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (156)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann die Constante c bestimmt werden, wenn man auf wagrechtem Boden eine Länge e genau abmisst, in dem einen Endpunkt das Instrument, in dem anderen die Latte aufstellt, die Beobachtung auf den Zieltafeln wie im vorigen Paragraph macht und die Differenz o — u und den Lattenabschnitt d sehr genau bestimmt. Aus mehreren Beobachtungen erhält man den Werth von

$$\frac{1}{c} = \frac{e}{d}\,(o - u) = k, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (157)$$

und wenn man diesen in die vorletzte Gleichung einführt, so wird

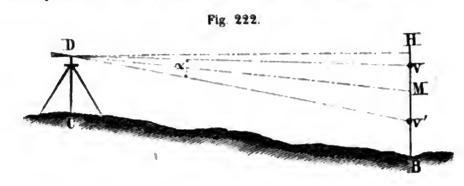
$$e = \frac{k\,d}{o - u} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (158)$$

Für alle zum Distanzmessen eingerichteten Nivellirinstrumente von Stampfer und Starke ist die Constante k = 324 und daher

$$e = \frac{324}{o - u} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (159)$$

Der Coefficient von d ist es, welcher, von Hundertel zu Hundertel Schraubengang fortschreitend, in der Tabelle Nr. IV enthalten ist. Man findet also dort für jeden Stand der Schraube, d. h. für jede Differenz o — u, die Entfernung e unter der Voraussetzung, dass d = 1 sey; also in Klaftern, wenn d eine Klafter, in Ruthen, wenn d eine Ruthe, und in Fussen, wenn d ein Fuss ist. Würde z. B. d = 7 Fuss seyn, so hätte man den Coefficienten von d, welchen die Tabelle für einen bestimmten Werth von o — u liefert, mit 7 zu multipliciren, um sofort e in Fussen zu erhalten.

Fig. 222.



Will man die Voraussetzung, dass der Winkel α der Anzahl der Schraubengänge proportional sey, da sie nicht ganz richtig ist, nicht gelten lassen, so kann man mit Hilfe der Gleichung Nr. 82 für die Entfernung e eine Formel aufstellen, welche genauer ist als die vorhergehende. Setzt man nämlich in Fig. 222 den Abstand v'H der unteren Zieltafel von der Horizontalen DH, welche durch die Drehaxe des Fernrohrs geht, gleich z, die Horizontalprojection von $CB = DH = e'$, den Winkel $vDH = \beta$, und behalten α und d ihre frühere Bedeutung: so ist offenbar

$$z = e' \operatorname{tg}\beta \quad \text{und} \quad z - d = e' \operatorname{tg}(\beta - \alpha). \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

Hieraus folgt

$$z = d\,\frac{\sin\beta\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha} \text{ und } e' = d\,\frac{\cos\beta\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}. \quad . \quad (161)$$

Hätte man dieser Entwicklung die Fig. 221 zu Grunde gelegt und berücksichtigt, dass die Linie v'H und folglich auch der Winkel β eine der vorigen entgegengesetzte Lage hat, also negativ zu nehmen ist, so würde

$$z = -\,d\,\frac{\sin\beta\cos(\beta+\alpha)}{\sin\alpha} \text{ und } e' = d\,\frac{\cos\beta\cos(\beta+\alpha)}{\sin\alpha} \quad . \quad (162)$$

erhalten worden seyn, zwei Ausdrücke, die sich sofort aus denen der Nr. 161 ergeben, wenn man $-\beta$ für $+\beta$ setzt und berücksichtigt, dass allgemein $\cos(-x) = \cos x$ und $\sin(-x) = -\sin x$ ist.

Um die Horizontalprojection e' der Linie e nicht aus dem Ausdrucke (161), der völlig genau ist, berechnen zu müssen, entwickelt Prof. Stampfer für e' und z Näherungsausdrücke, indem er statt der Winkel α und β ihre Bögen einführt, die Sinus- und Cosinusreihen bis zu den dritten Potenzen dieser Bögen benützt und schliesslich die Werthe von α und β nach den in §. 75 aufgestellten Gleichungen bestimmt. Hierdurch und mit Rücksicht auf die Constanten, welche für die in der Werkstätte des Wiener polytechnischen Instituts angefertigten Instrumente gelten, gelangt er am Ende zu den Ausdrücken:

$$z = d\left[\frac{h-u}{o-u} - 0{,}00011\,\frac{(h-u)^2}{o-u} - 0{,}00000635\,\frac{(h-u)^3}{o-u}\right]; \quad (163)$$

$$e' = d\left[\frac{324}{o-u} + 0{,}0356\left(\frac{o+u-2m}{o-u}\right) - 0{,}0031\,\frac{(h-u)^2}{o-u}\right], \quad (164)$$

in welchen alle Grössen bekannte Bedeutungen haben, bis auf die Zahl m, welche für jedes Instrument aus der Gleichung

$$m = \frac{a - 637}{2b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (165)$$

zu bestimmen ist. Die Buchstaben a und b sind die constanten Werthe, welche nach §. 75 bestimmt werden, und m ist nichts Anderes als die Ablesung auf der Scala g und der Trommel t, bei welcher ein ganzer Schraubengang gerade einem Winkel von 637 Sekunden entspricht.

Die Horizontalprojection e' wird aus drei von Prof. Stampfer berechneten und im Anhange unter Nr. IV bis VI mitgetheilten Tabellen erhalten, von denen

die erste das Glied $\frac{324}{o - u}$, die zweite $0{,}0356 \frac{(o + u - 2m)}{o - u}$

und die dritte $0{,}0031 \frac{(h - u)^2}{o - u}$

liefert. Will man die Verbesserungen wegen der Schraubengänge nicht vornehmen, so bleibt das zweite Glied, und braucht die gemessene Länge nicht auf den Horizont reducirt zu werden, das dritte Glied weg.

§. 191. **Genauigkeit.** Nimmt man mit Stampfer an, dass ein Fehler in der Längenmessung mit seinem Instrumente nur dadurch entstehen kann, dass die Anzahl der Schraubengänge $o - u = v$ um eine kleine Grösse Δv fehlerhaft bestimmt ist, und legt man der Berechnung des Fehlers in der Länge e nur den einfachen Ausdruck (158) zu Grunde, nach welchem

$$o - u = 324 \frac{d}{e}$$

ist, so wird die Aenderung in e, welche wir Δe nennen wollen, nach den Regeln der Differentialrechnung erhalten, wenn man x dem Differentiale von (324 d) e' gleich setzt und aus dieser Gleichung das Differentiale von $e = \Delta e$ sucht. Hierdurch findet man, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen,

$$\Delta e = \frac{e^2 \Delta v}{324 d} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (166)$$

Demnach wächst der Fehler mit dem Quadrat der Entfernung und umgekehrt mit der Grösse des Lattenabschnitts.

Unter der Voraussetzung, dass der Fehler $\Delta v = 0{,}003$ Schraubengang angenommen werden könne, berechnet Stampfer eine Tabelle über die Genauigkeit seines Distanzmessers bei verschiedenen Entfernungen und bei zwei Lattenabschnitten von 1 und $2^1/_2$ Klafter Höhe, und vergleicht diese Genauigkeit mit jener der Kettenmessung, welche er gleich 1 : 1000 annimmt. Wir theilen diese Tabelle nachstehend mit, indem wir alle Grössen

Entfernung (e) in Fussen.	Fehler in der Entfernung e.		Fehler einer gewöhnlichen Kettenmessung.
	Lattenhöhe 6 Fuss.	Lattenhöhe 15 Fuss.	
120	0',025	0',006	0',12
180	0,048	0,024	0,18
240	0,08	0,04	0,24
360	0,20	0,08	0,36
480	0,36	0,15	0,48
600	0,54	0,22	0,60
900	1,26	0,48	0,90
1200	2,22	0,90	1,20
1500	3,48	1,38	1,50
1800	5,04	2,04	1,80
2400	8,94	3,60	2,40

in Fussen ausdrücken und die Bemerkung beifügen, dass die Genauigkeitsversuche, welche wir mit einem vorzüglich gearbeiteten Wiener Instrumente anstellten, meist etwas hinter der Rechnung zurückblieben, so lange wir, wie in der Tabelle, $\varDelta v = 0{,}003$ annahmen. Unseren Messungen würde $\varDelta v = 0{,}005$ besser entsprechen.

§. 192. **Prüfung und Berichtigung.** Um das Stampfer'sche Instrument mit Zuverlässigkeit als Distanz-, Winkel- und Höhenmesser gebrauchen zu können, muss man vorher folgende Untersuchungen desselben vorgenommen haben:

1) ob das Fadenkreuz die richtige Lage hat;
2) ob die Libellenaxe mit der Absehlinie parallel läuft;
3) ob die Ringdurchmesser des Fernrohrs genau gleich gross sind;
4) bei welchem Stande der beiden Zeiger an der Mikrometerschraube die Libellenaxe senkrecht steht zur Alhidadenaxe;
5) ob der Kreis und sein Nonius richtig getheilt sind; und
6) ob die Mikrometerschraube allen Anforderungen entspricht.

Zu 1. Die richtige Lage des Fadenkreuzes erfordert, dass es deutlich gesehen werde, dass sein Schnittpunkt in der vereinigten optischen und mechanischen Axe des Fernrohrs liege, und dass von den beiden Fäden der eine wagrecht und der andere lothrecht gerichtet sey. Die beiden ersten Theile dieser Untersuchung sind aus §. 65 bekannt, und was den dritten betrifft, so erfährt man auf folgende Weise, ob der Horizontalfaden wagrecht liegt. Man stelle das Instrument nach §. 189 horizontal, richte das Fernrohr auf einen scharf begrenzten und gut beleuchteten fernen Punkt und stelle mit der Mikrometerschraube den Horizontalfaden genau darauf ein. Ohne an dem Fernrohr Etwas zu ändern drehe man hierauf die Alhidade so viel nach rechts und links, dass der anvisirte Punkt an beide Grenzen des Gesichtsfeldes kommt, und sehe zu, ob der Faden diesen Punkt fortwährend deckt oder nicht. Findet Deckung statt, so ist der Faden horizontal, ausserdem hat man aber die Schraube v, welche auf einen mit dem Fernrohr verbundenen stählernen Zapfen drückt, in ihrer Mutter so weit heraus oder hinein zu drehen, bis die verlangte Deckung eintritt. Da der zweite Faden auf dem ersten senkrecht steht, so ist jener vertikal, wenn dieser horizontal ist. Durch Anvisiren eines in der Ferne aufgehängten und zur Ruhe gekommenen Senkels kann man sich übrigens auch noch von der richtigen Lage des Vertikalfadens überzeugen, obschon eine Verbesserung desselben nach Richtigstellung des Horizontalfadens nicht mehr möglich ist, es sey denn, dass man ihn neu aufspannt. Dass diese letztere Untersuchung die zweite, dritte und vierte als geschehen voraussetzt, bedarf kaum der Erwähnung.

Zu 2. Wie man prüft, ob die Fernrohr- und Libellenaxe in dem Falle zu einander parallel sind, wo die Libelle an den Trägern des Fernrohrs feststeht, dieses selbst aber umgesetzt werden kann, ist aus Folgendem zu entnehmen. Man stelle etwa in einer Entfernung von 150 oder 200 Fuss

eine gleichtheilige Latte lothrecht auf, richte das Fernrohr nach ihr, verschiebe die Ocularröhre so lange, bis man die Theilung deutlich ablesen kann und keine Parallaxe des Fadenkreuzes mehr stattfindet, stelle hierauf die Libelle durch die Mikrometerschraube e horizontal und lese schliesslich den Theilstrich ab, welchen das Fadenkreuz deckt. Nun setze man das Fernrohr in seinem Lager um, drehe hierauf die Alhidade um 180°, so dass das Fernrohr wieder auf die Latte gerichtet ist, stelle abermals die Libelle horizontal und lese zum zweitenmale ab. Zeigt sich, dass die beiden Ablesungen, welche man mit umgesetztem Fernrohr und bei horizontalem Stande der Libelle auf einer gleichgetheilten und lothrecht stehenden Latte gemacht hat, von einander abweichen, so verbessert man die Hälfte der Abweichung an der Mikrometerschraube e und die andere Hälfte an der Stellschraube a. Diese Verbesserungen werden so oft wiederholt, bis 2 gleiche Ablesungen stattfinden. [1]

Zu 3. Die vorhergehende Untersuchung setzt voraus, dass die beiden Ringdurchmesser des Fernrohrs genau gleich gross sind; denn wären sie es nicht, so hätte man keineswegs, wie es die Absicht war, die Visirlinie des Fernrohrs, sondern nur die unterste Seite des Kegels, welcher durch die ungleichen Ringe bestimmt ist und womit das Fernrohr in seinem Lager ruht, mit der Libellenaxe parallel gemacht. Um sich nun zu überzeugen, ob die Ringdurchmesser gleich oder ungleich sind, führe man erst das zu Nr. 2 gehörige Verfahren genau durch und hierauf wende man die in §. 137 Nr. 1 beschriebene Prüfungsmethode an. Wird hiebei die dort auf S. 195 mit y bezeichnete Grösse null, so sind die Ringdurchmesser gleich, ausserdem aber sind sie ungleich. Ein solcher Fehler kann wohl erkannt und unschädlich gemacht, aber an den Ringen selbst nicht verbessert werden. Wie gross sein Einfluss namentlich beim Nivelliren ist und welche Mittel es gibt, diesen Einfluss zu beseitigen, wird im nächsten Abschnitte gelehrt.

Zu 4. Um zu erfahren, ob die Libellenaxe senkrecht steht zur Alhidadenaxe, braucht man nur durch Drehung der Alhidade die Libelle in die Richtung einer der Stellschrauben (w_1) und der ihr zugehörigen Feder (f) zu stellen, durch die Mikrometerschraube e die Libelle zum Einspielen zu bringen, hierauf die Alhidade um 180° zu drehen und zuzusehen, ob die Libelle wieder einspielt oder nicht. Findet das Einspielen statt, so steht nach §. 137 Nr. 3 offenbar die Alhidadenaxe senkrecht zur Libellenaxe; findet es aber nicht statt, so zeigt der Ausschlag der Luftblase den doppelten Fehler in der Lage dieser Axen an und ist derselbe halb an der Mikrometerschraube e und halb an der Stellschraube w_1 zu verbessern (§. 137, Nr. 3). Hat man es durch diese Verbesserungen dahin gebracht, dass die Libelle in zwei entgegengesetzten Lagen genau einspielt, so kann man an der Scala g und an der Trommel t den Stand der Mikrometerschraube ablesen, bei welchem die Libellen- und Alhidadenaxe senkrecht zu einander sind. Auf diesen Stand wird die Schraube jedesmal gebracht, wenn das Instrument

[1] Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird sich der Leser leicht selbst beweisen können.

horizontal gestellt werden soll. Hierdurch bewirkt man dasselbe, was an einem Theodolithen mit Vertikalkreis geschieht, wenn man nach Beseitigung des Collimationsfehlers und vor der Horizontalstellung die Nullpunkte des Vertikalkreises und seines Nonius aufeinander stellt.

Zu 5 und 6. Für die Untersuchung der Theilung des Kreises und seines Nonius gelten die in §. 138 enthaltenen Bemerkungen, und was die Prüfung der Schraube betrifft, so genügt es, wenn man mehrere genau bekannte Winkel mit ihr misst und sich überzeugt, dass sie diese Winkel richtig angibt. Solche Winkel erhält man aber dadurch, dass man mit Messlatten eine Länge von etwa 120 bis 150 Fuss so scharf als möglich abmisst, an dem einen Ende eine fein getheilte Latte lothrecht aufstellt, und von dem anderen Ende aus das Fernrohr mittels der Schraube über die ganze Latte führt, indem man das Fadenkreuz von Fuss zu Fuss genau auf die betreffenden Theilstriche einstellt. Aus den bekannten Entfernungen der abgelesenen Striche unter sich und aus der gemessenen Entfernung der Latte von der Drehaxe des Fernrohrs berechnet man die gemessenen Winkel trigonometrisch und aus der Ablesung an der Schraube mit Hilfe der Gleichung (82) algebraisch. Die Beobachtungen mit der Schraube wird man mehrmals wiederholen, um die Fehler im Einstellen des Fadenkreuzes dadurch möglichst auszugleichen, dass man aus allen nach Gl. 82 berechneten Winkeln das arithmetische Mittel nimmt.

Fünfter Abschnitt.

Instrumente zum Höhenmessen.

§. 193. Die Höhe eines Punktes oder seine lothrechte Erhebung über dem wahren Horizont eines anderen Punktes kann mit den bis jetzt betrachteten Winkel- und Längen-Messinstrumenten mittelbar dadurch bestimmt werden, dass man die gesuchte Höhe mit zwei anderen Linien zu einem ebenen Dreiecke verbindet, darin eine Seite nebst zwei Winkeln misst und hieraus die Höhe berechnet. Dergleichen Höhenmessungen, so vortheilhaft und nothwendig sie in gewissen Fällen sind, lassen sich aber nicht immer anwenden, weil sie manchmal zu umständlich und schwierig, manchmal zu ungenau werden. Es muss daher Vorrichtungen geben, durch welche die Höhenunterschiede zweier Punkte in den dazu geeigneten Fällen auf einfacherem Wege unmittelbar bestimmt werden können. Solche Vorrichtungen sind die Nivellirinstrumente und die Barometer, deren Betrachtung den Inhalt dieses Abschnitts ausmacht. Man wendet zwar auch die Thermometer zu Höhenmessungen an, indem man aus der beobachteten Temperatur des

siedenden Wassers den auf letzteres ausgeübten Luftdruck bestimmt und hiernach die Höhe des Beobachtungsortes nach der Barometerformel berechnet; es ist jedoch dieses Verfahren noch weniger genau als die Messung mit dem Barometer, wesshalb wir es hier mit der Bemerkung übergehen, dass man die ausführlichste Darstellung desselben in der Schrift: „Das Höhenmessen mit dem Thermometer“ von J. W. Gintl, Wien 1835, findet.

Nivellirinstrumente.

§. 194. Die Nivellirinstrumente dienen zunächst nur zur Ermittelung kleiner Höhenunterschiede. Dabei dürfen die zwei Punkte, deren lothrechten Abstand ihrer Horizonte man wissen will, nicht sehr weit von einander entfernt seyn. Indem man aber eine grössere Reihe von Punkten in der Art verbindet, dass man immer den Höhenunterschied zweier aufeinander folgender Punkte sucht, kann man durch Nivelliren mittelbar auch grosse Höhenunterschiede sehr weit entfernter Punkte messen.

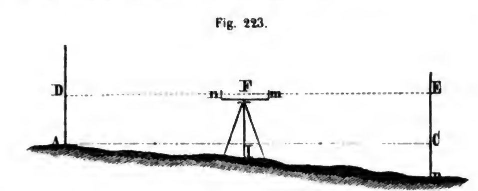
Das Nivelliren ist zu keiner Zeit so wichtig gewesen als jetzt, wo man sich überall mit dem Baue von Eisenbahnen, Canälen, Wasserleitungen, mit der Verbesserung von Flüssen, Entwässerung von Sümpfen und Mooren, Bewässerung von Feldern und Wiesen etc. beschäftigt und ungeheuere Summen darauf verwendet; es ist aber auch niemals früher in solcher Vollkommenheit ausgeführt worden, wie gegenwärtig, wo es selbst minder Geübten möglich ist, den Höhenunterschied zweier Punkte bis auf den 50 000sten Theil ihrer horizontalen Entfernung richtig zu bestimmen, während sehr geübte Ingenieure ohne Schwierigkeit ihren Nivellements eine wenigstens doppelt so grosse Genauigkeit verleihen können.

Diese Genauigkeit der Messung verdanken wir den vollkommeneren Nivellirinstrumenten, welche alle besseren mechanischen Werkstätten liefern. Für viele technische und ökonomische Zwecke ist aber begreiflicherweise eine so grosse Genauigkeit wie die angeführte nicht nöthig; es werden daher neben den feinsten Nivellirinstrumenten auch andere von geringerer Leistungsfähigkeit, und ausser den genauesten Nivellirmethoden auch weniger zuverlässige Methoden des Nivellirens angewendet.

Die allgemeinste Anforderung, welche ein Nivellirinstrument zu befriedigen hat, besteht in der Gewährung einer wagrechten Absehlinie, welche auf einen lothrecht gestellten Massstab gerichtet werden kann. Denkt man sich nämlich in einem Punkte A einen solchen Massstab, der hier eine Nivellirlatte heisst, lothrecht aufgestellt und von der horizontalen Visirlinie mn des Instruments (I) in dem Punkte D getroffen, so bezeichnet diese Absehlinie die Höhe AD des Punktes D über A (die Visir- oder Lattenhöhe von A); und denkt man sich weiter in derselben Horizontalebene, worin D,n,m liegen, die Visirlinie nm auf die in B stehende Latte gerichtet und diese in E getroffen, so erhält man auch die Höhe BE des Punktes E über B (die Visirhöhe von B). Nun ist aber, wenn AC der Horizont von A ist,

A C || DE und daher der Höhenunterschied zwischen A und B gleich BC = BE — AD. Man findet folglich durch das hier im Allgemeinen angedeutete Verfahren des Nivellirens den Höhenunterschied zweier Punkte mit Hilfe einer horizontalen Absehlinie und einer Nivellirlatte.

Fig. 223.



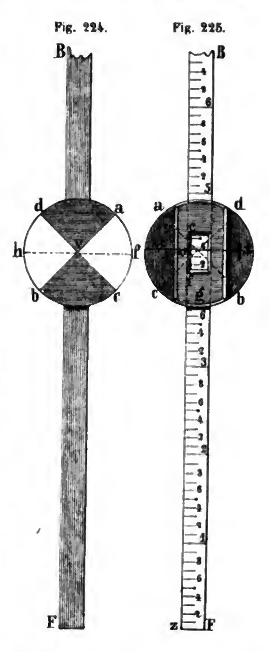
Zur Herstellung wagrechter Absehlinien bietet uns die Natur drei Wege dar: erstens das Loth in Verbindung mit einer zu ihm senkrechten Geraden; zweitens den Stand der tropfbaren Flüssigkeiten in communicirenden Röhren; und drittens die Vereinigung einer tropfbaren und elastischen Flüssigkeit in einer Röhre oder die Libellen. Hiernach kann man die Nivellirwerkzeuge in Pendel-, Röhren- und Libelleninstrumente eintheilen. Jede dieser drei Gattungen hat verschiedene Arten; wir werden aber nur die gebräuchlichsten davon beschreiben, nachdem zuvor die Nivellirlatten betrachtet worden sind, welche bei keinem Nivellirapparate entbehrt werden können.

Nivellirlatten.

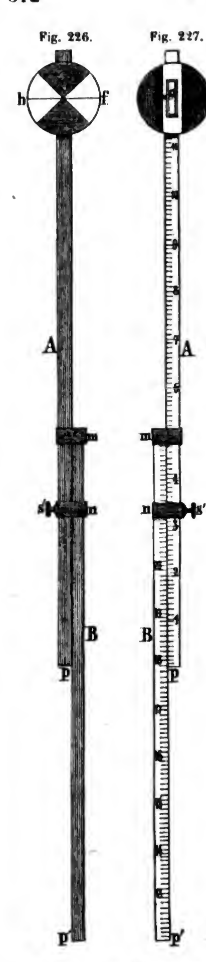
§. 195. Es sind zwei Arten von Nivellirlatten gebräuchlich: bei der einen lässt sich eine runde oder viereckige Tafel von 8 bis 10 Zoll Durchmesser an einer eingetheilten Stange so verschieben, dass ihr Mittelpunkt in die Ziellinie kommt, während die andere Art von Nivellirlatten eine Zieltafel nicht besitzt, sondern die Visirhöhe durch das Fernrohr unmittelbar abzulesen gestattet. Die Nivellirlatten mit Zieltafeln nennt man auch Schiebelatten und jene ohne Zieltafeln Reichenbach'sche Nivellirlatten, weil letztere zuerst von Reichenbach angewendet wurden. Die Schiebelatten sind jetzt fast nur mehr bei den Nivellirinstrumenten mit Dioptern in Gebrauch, da die Reichenbach'schen Latten bei feineren mit Fernrohr versehenen Nivellirinstrumenten den grossen Vortheil gewähren, dass der Geometer das Ablesen der Visirhöhe nicht dem Gehilfen, welcher die Latte hält und die Tafel verschiebt, zu überlassen braucht, sondern selbst vornehmen kann, wodurch er nicht bloss von dessen Geschicklichkeit unabhängig wird, sondern auch an Zeit gewinnt, indem das Einrichten der Zielscheibe wegfällt.

§. 196. **Nivellirlatten mit Zielscheiben.** Eine zweckmässige Einrichtung dieser Latten zeigen die Fig. 224 und 225, welche die Stampfer'sche

Nivellirlatte von der Vorder- und Rückseite darstellen: BF ist eine vierseitig prismatische 0',2 breite, 0'1, dicke und 12 Fuss hohe Stange aus gut getrocknetem Tannenholze, welche zum Schutze gegen das Schwinden mit Oel getränkt und angestrichen ist. Längs dieser Stange lässt sich die Zieltafel v mittels der Hülse g verschieben und durch die Druckschraube s feststellen, sobald sie die richtige Höhe erlangt hat. Die Stange B ist auf der Rückseite von ihrer Grundfläche F an in Fusse und Zolle getheilt, während die Hülse g der Zieltafel auf derselben Seite eine Durchbrechung hat, unter der sich eine Messingplatte mit einem Zeiger o und einer Theilung ef in Linien befindet. Der Zeiger entspricht dem Mittelpunkte der Zieltafel und gibt daher mit Hilfe der Theilung auf der Messingplatte die Visirhöhe bis auf so kleine Theile einer Linie an, als man noch sicher schätzen kann. Es genügt jedoch für alle Fälle, wenn man die Ablesung nur bis auf halbe Linien macht. Bei dem Stande, welchen die Zieltafel in Fig. 225 hat, würde die abgelesene Visirhöhe 4 Fuss 3 Zoll 8,5 Linien betragen.



Kommt der Fall vor, dass eine Stange nicht mehr hinreicht, die Zieltafel in die Höhe der Visirlinie zu bringen, so verbindet man auf die in den Fig. 226 und 227 angedeutete Weise mittels der Metallhülsen m, n eine zweite Stange B mit der ersten A und schiebt diese mit der auf einen bestimmten Theilstrich gestellten Zieltafel soweit an B auf oder ab, bis die Visirlinie auf die Mitte dieser Tafel trifft. Alsdann stellt man durch die Druckschraube s' die beiden Stangen an einander fest. Die Ablesung wird von dem Gehilfen an dem Fusse p der Stange A gemacht, welche desshalb unten mit Messing beschlagen und daselbst auf einen Zoll Länge in Linien getheilt ist. Damit diese Ablesung die richtige Höhe der Zieltafel über dem Boden gibt, muss nothwendig auf der Stange B die Theilung von A fortgesetzt und die Zieltafel der Stange A auf den Theilstrich gestellt seyn, welcher dem Fusspunkt der Stange B entspricht. In Fig. 227 steht der Zeiger an A auf 12 Fuss, und von dieser Zahl an geht die Bezeichnung von B. Die Ablesung würde in dem vorliegenden Falle 17 Fuss 8 Zoll 7,5 Linien betragen.



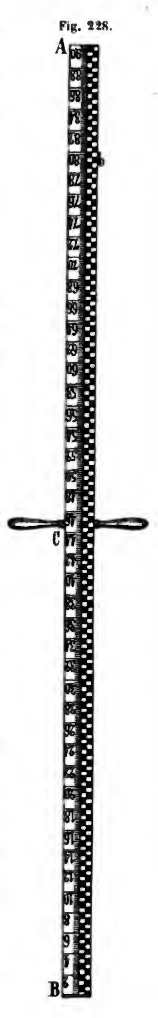
§. 197. Nivellirlatten ohne Zielscheibe. Diese Latten sind wenig von einander verschieden und darum wird es genügen, wenn wir eine derselben abbilden und kurz beschreiben. Fig. 228 stellt eine Nivellirlatte aus dem Reichenbach'schen Institute von Ertel und Sohn in München vor. Dieselbe ist 9 Fuss lang, $3\frac{1}{2}$ Zoll breit und 1 Zoll dick. Unten ist sie mit einer Eisenplatte von 1 Linie Dicke beschlagen; in einer Höhe von $4\frac{1}{2}$ Fuss hat sie zwei Handgriffe (C) zum Halten und weiter oben einen Hacken (b), woran sich ein Senkel befestigen lässt, der dem Messgehilfen zur lothrechten Stellung der Latte dient. Diese Latte ist sehr zweckmässig eingetheilt: von zwei zu zwei Zollen sind nämlich die Abstände vom Fusspunkte durch verkehrt gestellte Ziffern aufgeschrieben; ferner ist jeder Zoll durch ein schwarzes und weisses Quadrat in zwei und somit der Zwischenraum von einer Zahl zur andern in vier gleiche Theile (halbe Zolle) getheilt; und endlich ist jeder halbe Zoll durch abwechselnde schwarze und weisse Striche von einer Linie Dicke in fünf gleiche Theile (Dezimallinien) zerlegt. Bei dem Nivelliren richtet man das Fadenkreuz in die Mitte der Latte, so dass der Vertikalfaden den Langseiten und der Horizontalfaden den Theilstrichen parallel läuft. Da das astronomische Fernrohr die Gegenstände verkehrt zeigt, so sieht man folglich die verkehrt geschriebenen Zahlen aufrecht und es scheint als ob die Höhen von oben nach unten gezählt würden. Darum muss man bei der Ablesung zunächst die oberhalb des Horizontalfadens sichtbare Zahl nehmen, zu dieser die Zolle und hiezu die Linien fügen, welche zwischen jener Zahl und dem genannten Faden enthalten sind.

Man hat früher eine Zeit lang die Linien auf einem durch die Mitte der Latte laufenden zollbreiten Messingstreifen mit feinen Strichen aufgetragen; diese Einrichtung hat sich aber als unpraktisch erwiesen, insoferne bei neuen Latten der Glanz des Messings und bei alten dessen Oxydüberzug die Theilstriche nicht erkennen liessen und man daher die Linien innerhalb eines halben Zolles

schätzen musste, während man jetzt nur noch Theile einer Linie durch das Augenmass zu bestimmen hat.

Will man aus einer gewöhnlichen Latte von 10 bis 15 Fuss eine grössere von 20 und mehr Fuss machen, so darf man auf dieselbe nur ein entsprechend getheiltes Lattenstück mittels eines langen eisernen Zapfens, der in die zu vergrössernde Latte passt, stecken. Bei Nivellements in wenig durchschnittenem Terrain lässt man diesen Aufsatz weg, weil eine kürzere Latte ruhiger gehalten werden kann.

Fig. 228.



Pendelinstrumente.

§. 198. Unter diese Gattung von Nivellirinstrumenten gehören die Setzwage, Pendelwage, Bergwage, Hängwage, Wallwage u. dgl. m. Alle diese Werkzeuge können keinen Anspruch auf Genauigkeit machen, da selbst bei ruhiger Luft das Loth kaum genauer als bis auf den tausendsten Theil seiner Länge den wahren Spielpunkt deckt, woraus denn auch eine Unsicherheit in der Höhenbestimmung gleich dem tausendsten Theil der Entfernung des einnivellirten Punktes vom Instrumente folgt. Rechnet man zu dieser Unsicherheit noch jene, welche in der Einstellung des Diopters liegt, so wird man die Genauigkeit dieser Instrumente wohl kaum höher als $^1/_{500}$ anschlagen können. Aus diesem Grunde aber werden wir uns auch in keine weitgehenden Beschreibungen und Erörterungen der Pendelinstrumente einlassen.

§. 199. **Die Setzwage** ist allgemein bekannt und bedarf gar keiner Beschreibung; jedermann weiss, wie Steinmetzen, Maurer und Zimmerleute dieses einfache Werkzeug handhaben, um Steine und Balken in wagrechte Lagen zu bringen. Soll aber die Setzwage zum eigentlichen Nivelliren benützt werden, so muss sie mit einem Diopter verbunden seyn, das sich auf einem Gestelle drehen lässt und dessen Absehlinie mit der Basis der Setzwage parallel, folglich zur Mittellinie senkrecht ist. Spielt das Loth auf diese Linie ein, so hat die Absehlinie eine wagrechte Richtung, und lässt man die Zielscheibe der Nivellirlatte in diese Richtung bringen, so kann der die Latte haltende Gehilfe die Visirhöhe ablesen. Dergleichen Vorrichtungen hat man früher allerdings benützt; sie finden aber jetzt keine Anwendung mehr, da die Libelle ein weit sichereres Mittel ist, die Absehlinie eines Diopters horizontal zu stellen.

§. 200. **Die Pendelwage** besteht aus einem massiven, mehrere Pfunde wiegenden Pendel mit eiserner Stange, an welche ein messingnes Diopterlineal mit senkrechten Flügeln angeschraubt ist. Diese Verbindung ruht auf einem Stative und kann sich mittels eines Universalgelenkes in jeder Richtung horizontal und vertikal bewegen. Ist der Pendel ruhig geworden, so steht das Diopterlineal und mit ihm die Absehlinie horizontal. Selten aber steht der Pendel so stille, wie es gute Beobachtungen erfordern, oder es dauert sehr lange, bis es dahin kommt; darum ist auch dieses Instrument nicht mehr im Gebrauche, oder wenigstens nicht zu empfehlen.

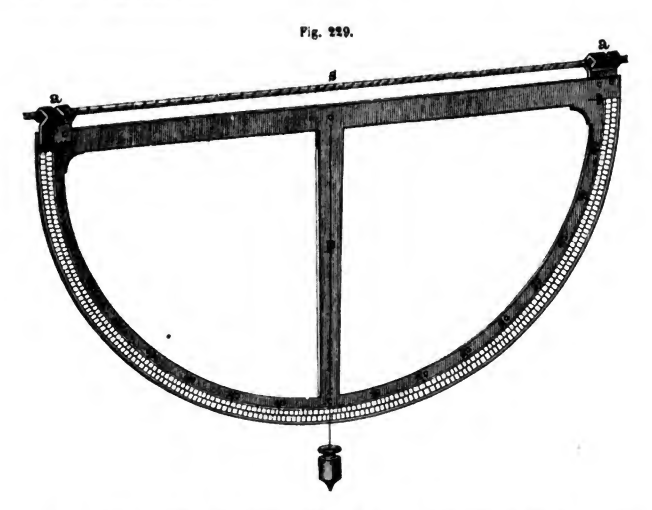
§. 201. **Die Bergwage** ist im Grunde nichts Anderes als eine mit einem Gradbogen versehene Setzwage. Dadurch wird es möglich, die Neigungswinkel schiefer Flächen, namentlich von Böschungen, zu messen. Sie wird in Verbindung mit einem etwa 10 Fuss langen Richtscheite gebraucht, auf dessen Mitte sie gestellt ist und zu dessen schmalen Langseiten ihre Mittellinie senkrecht steht. In dieser Mittellinie liegt auch der Nullpunkt der Theilung des Gradbogens, welcher auf dem Dreiecke, das den Körper der Bergwage bildet, festgemacht ist. Da man mit diesem Werkzeuge die Böschungswinkel kaum genauer als bis auf $^1/_4$ Grad messen kann, so hat es für das Nivelliren selbstverständlich nur eine geringe Bedeutung.

Eine etwas veränderte Gestalt hat die Bergwage in neuester Zeit durch H. v. Göhl in Landau erhalten. Es wird nämlich auf der Rückseite und in der Mitte einer Setzlatte von etwa $2^1/_2$ Fuss Länge ein metallnes Gehäuse angebracht, in welchem sich ein Pendel wie ein Durchmesser um den Mittelpunkt eines eingetheilten Halbkreises bewegt, dessen Nullpunkt in einem zur Grundfläche der Setzlatte senkrecht stehenden Durchmesser liegt, während ein dieser Grundfläche paralleler Durchmesser die Theilungspunkte 90^0 trifft. Der bewegliche Durchmesser ist oben wie ein Zeiger zugespitzt, unten aber mit einem Gewichte beschwert, so dass er bei der geringen Reibung seiner Axe stets lothrecht steht, wie auch die Latte geneigt seyn mag. Dieses Werkzeug wird Universalsetzwage genannt, weil es zur Messung aller Neigungswinkel zwischen 0 und 90^0 dient, und ist im „Kunst- und Gewerbeblatt des polytechnischen Vereins für Bayern," Jahrgang 1861, S. 345 beschrieben und abgebildet.

§. 202. **Die Hängwage** oder der Gradbogen der Markscheider (Fig. 229) ist dazu bestimmt, an einer ausgespannten Schnur aufgehängt zu werden, um hierdurch deren Neigung gegen den Horizont zu erfahren. Desshalb besteht sie aus einem mit Hacken (a, a) versehenen Halbkreise von geschlagenem Messingbleche, in dessen Mittelpunkte ein Loth p befestigt ist, das an der Theilung des Bogens vorbeispielt. Das Blech, woraus der Bogen und seine massiven Arme gebildet sind, darf nicht zu dünn seyn, damit es sich nicht biegt, aber auch nicht zu dick, damit es durch sein Gewicht die Richtung der Schnur durch Herabziehen nicht ändert: 0,2 Linien sind für die Dicke und 4 Linien als Breite genügend, wenn der Durchmesser des

Bogens 8 bis 10 Zoll beträgt. Die Birne des Lothes ist an einem Menschenhaare und dieses mit etwas Wachs in dem durchlöcherten Mittelpunkt des Bogens befestigt. Um das Haar mit der Birne zu vereinigen, wird es durch ein hohles Schräubchen gesteckt, unten umgebogen und auf dem Grund der Birne festgeschraubt.

Fig. 229.



Die Prüfung des Gradbogens besteht darin, dass man zunächst mittels eines Zirkels seine Theilung untersucht, ob sie keine groben Fehler enthält, und, wenn diese richtig ist, eine Schnur so ausspannt, dass der daran aufgehängte Gradbogen genau einspielt. Nun lässt man die Schnur ganz ungeändert, und hängt den Gradbogen um, so dass er gegen seine erste Lage um 180° gedreht erscheint. Spielt hier das Loth wieder auf den Nullpunkt der Theilung ein, und hat man vorhin keine Theilungsfehler entdeckt, so ist die Hängewage richtig; ausserdem müsste einer der Hacken etwas erhöht oder vertieft werden. Will man der Schnur keine horizontale Lage geben, so kann man die Prüfung auch bei geneigter Richtung vornehmen, indem man zusieht, ob der Bogen in zwei einander entgegengesetzten Lagen gleiche Ablesungen gibt. Es ist immer gut, beide Prüfungen vorzunehmen, und zwar die letztere bei verschiedenen Neigungen der Schnur, welche begreiflicherweise gleichförmig dick und fest seyn muss.

§. 203. Die Wallwage (Fig. 230) ist in soferne eine Hängwage, als ein hölzernes, mit Diopter (a, b) versehenes gleichschenkeliges Dreieck

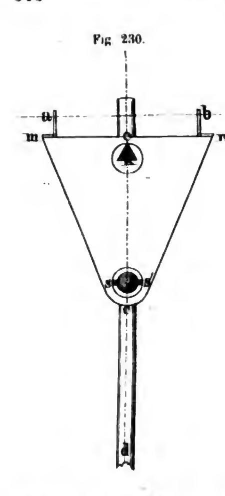
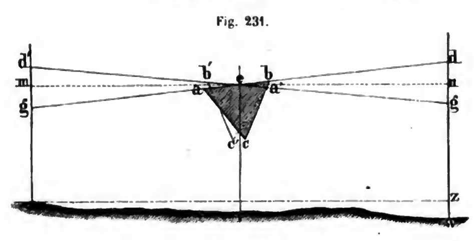


Fig. 230.

(mnc) von etwa anderthalb Fuss Grundlinie und Höhe in der Mitte seiner Basis auf einem scharfen Stahlkeile (k), der sich an einem als Stativ dienenden Stocke (d) befindet, aufgehängt wird. An seiner Spitze ist das Holzdreieck durchbohrt, um eine Schraubenspindel (s, s') mit einer grösseren Metallkugel (i) aufzunehmen, durch deren Verschiebung die Absehlinie berichtigt werden kann, wenn es nöthig ist. Ob es aber nöthig ist, erfährt man auf folgende Weise. Man bezeichne zwei Punkte u, w (Fig. 231), die etwa 100 Fuss auseinander liegen und ungleiche Höhe haben, durch Grundpfähle; stelle das Instrument zwischen beiden in v auf und bestimme mit Hilfe einer Schieblatte die Visirhöhe wd = h und, indem man das Dreieck (abc) umsetzt, auch die Visirhöhe ud' = h'. Wäre die Visirlinie jedesmal genau horizontal gewesen, so würde h' — h das richtige Gefälle wz von u nach w seyn und es müsste, wenn man jetzt das Instrument in u aufstellt und von hier aus die Visirhöhe H für w und die Instrumentenhöhe ev = J misst, die Gleichung H — J = h' — h oder H — J + h — h' = 0 stattfinden. Zeigt sich, dass das letztere nicht der Fall ist, so muss man die zwischen s und s' sich befindende Kugel (i) so lange verschieben, bis der angegebenen Bedingung genügt wird.

Fig. 231.

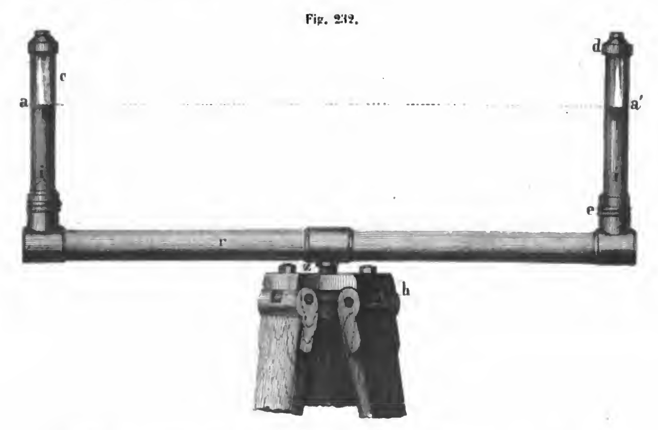


Röhreninstrumente.

§. 204. Die Canalwage (Fig. 232) besteht aus einer cylindrischen Röhre (r) von Eisen-, Messing- oder Kupferblech, mit rechtwinkelig umgebogenen Endstücken (e, e), in denen kurze Glascylinder (c, c) stecken, und mit einer in der Mitte angebrachten hülsen- oder zapfenförmigen Vorrichtung (z), welche auf ein dreibeiniges Gestelle (h) passt. Dieses Stativ muss

sich so stellen lassen, dass der Zapfen z nahezu lothrecht wird, damit bei einer horizontalen Drehung der Röhre r auch die Cylinder c, c nahehin lothrecht stehen. Die Blechröhre oder der Körper der Canalwage wird 3 bis 5 Fuss lang und etwa 1 Zoll weit gemacht; die Ansätze e, e sind in der Regel etwas weiter, da man den Gläsern mindestens einen Zoll lichten Durchmesser gibt. Die Gläser sind unten in Messing gefasst und können durch Schrauben mit den Endstücken e,e wasserdicht verbunden werden; oben werden sie mit Korkstöpseln oder Deckeln (d,d) nach Erforderniss geschlossen oder geöffnet.

Fig. 232.

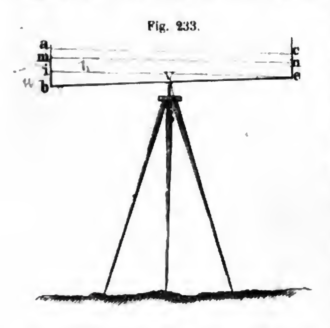


Dieses Röhrensystem wird mit reinem oder gefärbtem Wasser gefüllt und in der Art zum Nivelliren benützt, dass man an den in einer Horizontalebene liegenden Rändern (a, a') der durch die Gläser sichtbaren Flüssigkeitssäulen vorbei nach einer Schieblatte visirt und deren Zielscheibe in die Absehlinie einwinkt. Damit man die Ränder der Wassercylinder gut sieht, müssen die Gläser möglichst rein seyn, und damit sie wirklich in einer Horizontalebene liegen, dürfen die Gläser nicht zu enge und ungleich weit seyn. Bei engen Gläsern von verschiedenen Durchmessern würde die Haarröhrchenkraft einen nachtheiligen Einfluss äussern, insoferne die eine Flüssigkeitssäule höher stände als die andere. Dieser Einfluss ist aber bei Röhren, die über einen Zoll weit sind, auch wenn ihre Durchmesser merklich von einander abweichen, nicht mehr zu beachten; denn gesetzt, die eine Röhre wäre einen Pariser Zoll oder 27 Millimeter und die andere 28 Millimeter weit, so würde (da die Erhebung des Wassers bei 1 Millimeter Durchmesser der Röhre und bei einer Temperatur von 8,5° C 29,8 Millimeter be-

trägt und die Erhebungen sich umgekehrt wie die Durchmesser verhalten) die Erhebung in der 27^{mm} weiten Röhre $1^{mm},104$ und in der 28^{mm} weiten Röhre $1^{mm},065$ und somit der Unterschied beider Erhebungen nur $1,104 - 1,065 = 0,039$ Millimeter oder nahezu $^1/_{60}$ Linie betragen. Der hieraus entspringende Fehler in der Visirhöhe wäre folglich, wenn die Gläser 4 Fuss oder 576 Linien auseinanderstehen, nur dem 34560sten Theile der Entfernung des einnivellirten Punkts vom Instrumente gleich und demnach 20mal kleiner, als die Genauigkeit, welche sich bei ganz gleichen Gläsern erreichen lässt.

Aber auch weite Glascylinder, bei denen die Haarröhrchenanziehung lange nicht mehr in Betracht kommt, dürfen nur sehr wenig verschiedene Durchmesser haben, weil sonst bei schiefem Stande des Stativzapfens jede Drehung des Instruments nach einer anderen Richtung den Horizont der Visirlinien hebt oder senkt. Um dieses einzusehen, stelle man sich zunächst unter a b in Fig. 233 die weite, unter c e die enge Glasröhre vor und nehme an, der Punkt b der Blechröhre liege um (b i) = u tiefer als der Punkt e. Ist für diesen Stand des Instruments m n die horizontale Absehlinie; bezeichnet R den grösseren und r den kleineren Halbmesser der Wassercylinder m b und n e; nennt man h die Höhe n e der Absehlinie über dem Punkt e und vernachlässigt man den schiefen Schnitt der Wassersäulen: so ist offenbar die Wassermenge beider $R^2 \pi (h + u) + r^2 \pi h$. Dreht man jetzt die Röhre b e um ihre Axe v g, welche senkrecht zu b e, aber nicht lothrecht ist, um 180°, so dass e nach b und der enge Cylinder an die Stelle des weiten kommt, so wird die Absehlinie die höhere Lage a c, welche von m n um die Grösse z entfernt ist, einnehmen und es wird jetzt die Wassermenge in den beiden Flüssigkeitssäulen durch

Fig. 233.



$$R^2 \pi (h + z) + r^2 \pi (u + h + z)$$

ausgedrückt seyn. Diese Wassermenge ist aber offenbar der vorigen gleich und es findet somit die Gleichung statt:

$$R^2 (h + u) + r^2 h = R^2 (h + z) + r^2 (u + h + z),$$

aus der man für den vorliegenden Fall die Erhebung des Horizonts der Absehlinie

$$z = u. \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (167)$$

findet. Es ist von selbst klar, dass, wenn anfänglich a b die enge und c e die weite Glasröhre gewesen wäre, statt einer Erhebung des Horizonts eine Senkung desselben von gleichem Betrage sich ergeben hätte. Auch ist nicht

schwer einzusehen, dass man der letzten Gleichung eine allgemeinere Bedeutung, als bei ihrer Entwickelung geschehen ist, dadurch geben kann, dass man unter u diejenige Grösse versteht, um welche sich die Länge bi von der ersten zur zweiten Lage der Blechröhre, welche um irgend einen Horizontalwinkel verschieden seyn können, ändert.

Liegt z. B. bei der ersten Visur der Punkt b nur 1 Zoll, bei der zweiten aber 5 Zoll tiefer als e, so ist hier u = 4 Zoll. Ist dann ferner R = 1″,1 und r = 1″, so wird die Aenderung des Horizonts z = 0,38 Zoll oder fast 4 Dezimallinien.

Will man das Verhältniss bestimmen, welches zwischen den Halbmessern R und r stattfinden darf, wenn für einen bestimmten Werth u′ von u der Fehler z eine gewisse Grösse z′ nicht überschreiten soll, so braucht man nur u′ und z′ für u und z in die letzte Gleichung zu setzen und daraus das Verhältniss von R : r zu suchen. Man findet aber dieses Verhältniss aus der Gleichung

$$z' = u' . \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2},$$

wenn man erst die Werthe u′ + z′ und u′ — z′ bildet und den einen Ausdruck durch den andern dividirt. Es wird alsdann

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{u' + z'}}{\sqrt{u' - z'}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (168)$$

Soll der Fehler in der Visirhöhe nicht mehr als eine Linie betragen, wenn das eine Ende der Blechröhre bei der zweiten Visur um 2 Zoll tiefer steht als bei der ersten, so muss

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2 + 0,1}}{\sqrt{2 - 0,1}} = 1,05$$

seyn; d. h. wenn r = 1 Zoll ist, so darf unter den oben gemachten Voraussetzungen R höchstens 1,05 Zoll betragen.

Beim Gebrauch der Canalwage ist darauf zu sehen, dass die Deckel oder Korkstöpsel, womit die Gläser beim Transporte des Instruments von einer Station zur anderen geschlossen werden, so viel Oeffnung haben, dass die äussere atmosphärische Luft mit der in den Gläsern in Verbindung steht, damit kein ungleicher Druck auf die Wassersäulen ausgeübt wird. Fände eine Ungleichheit dieses Druckes statt, so würden die Oberflächen der Wassersäulen und mithin auch die durch sie bestimmte Visirlinie nicht mehr in einer Horizontalebene liegen und folglich die Messung fehlerhaft werden. Von der Grösse dieses Fehlers, der so leicht zu vermeiden ist, kann man sich mit Hilfe des Mariotte'schen Gesetzes Rechenschaft geben.

Das starke Schwanken des in der Canalwage befindlichen Wassers während des Transportes von einer Station zur anderen kann dadurch gemässiget werden, dass man nach Fig. 232 in der Fassung jedes Glascylinders einen hohlen Blechkegel (i) anbringt, dessen kleinere Oeffnung nach oben gerichtet ist, während die grössere sich an die Röhrenwand anschliesst.

Die vortheilhafte Wirkung dieses Kegels besteht allerdings zunächst darin, dass durch den verkleinerten Röhrenquerschnitt ein langsamerer Uebergang des Wassers von einem Glas in's andere stattfindet; sie hat aber auch noch einen anderen Grund. Es wird nämlich, wenn man das Wasser langsam an den Seitenwänden der Gläser in die Canalwage giesst, durch den in Rede stehenden Blechkegel der Eintritt von Luft in die Blechröhre (r) verhindert und dadurch der ununterbrochene Zusammenhang der Wassermasse des Instruments erhalten, welcher sehr wesentlich ist.

Da die Genauigkeit der Canalwage nur gering ist, so ist es nicht erlaubt, sie zu grösseren Nivellements zu verwenden; sie darf nur zur Aufnahme von Querprofilen oder anderen ähnlichen Arbeiten benützt werden. Man nimmt dabei die Entfernungen der Latte vom Instrumente nicht gerne über 50 Fuss an, da bei diesen Stationslängen die Visirhöhen schon um einige Linien unsicher sind, wie eine ganz einfache Rechnung lehrt, die sich auf die Voraussetzung gründet, dass die Visirlinie auf einen Abstand der Gläser von 4 Fuss um mindestens $^1/_5$ Linie fehlerhaft ist, auch wenn die Glascylinder weit und zwar gleich weit sind. Wenn aber die Visirlinie auf 4 Fuss oder 400 Linien um 0,2 Linien steigt oder fällt, so wird die Visirhöhe bei 50 Fuss Entfernung offenbar um $12{,}5 \times 0{,}2$ oder um 2,5 Linien zu gross oder zu klein werden, je nachdem die Absehlinie in die Höhe oder in die Tiefe geht.

Nach dieser Annahme würde die Genauigkeit der Canalwage $^1/_{2000}$ der Stationslänge betragen. Erwägt man aber, dass zu der schiefen Lage der Absehlinie noch andere kleine Beobachtungsfehler, welche aus dem Stand der Latte, dem Einstellen der Zieltafel, dem Ablesen etc. entspringen, hinzukommen, so wird es gewiss gerechtfertigt seyn, wenn man die Genauigkeit der Canalwage für die einzelne Visur auf $^1/_{1000}$ und nur für eine grössere Reihe aufeinander folgender Punkte, wobei sich einzelne Fehler aufheben, auf $^1/_{2000}$ anschlägt. Mit diesen Zahlen stimmen unsere Erfahrungen am besten überein.

Die Prüfung der Canalwage besteht nur darin, dass man sich von der guten Beschaffenheit der Gläser und ihrer wasserdichten Verbindung mit dem Instrumentenkörper überzeugt; ihr Gebrauch ergibt sich aus dem Vorhergehenden von selbst.

§. 205. **Die Quecksilberwage.** Diese Vorrichtung, welche ganz auf dem Princip der Canalwage beruht, ist wenig oder gar nicht mehr im Gebrauche, da man jetzt bei gleicher Güte wohlfeilere und bei gleichem Preisse bessere Nivellirwerkzeuge haben kann. Ihre Einrichtung ist indessen folgende. Zwei vierseitige prismatische Gefässe von einem Zoll Weite sind durch eine anderthalb Fuss lange Röhre von etwa drei Linien Durchmesser verbunden und mit Quecksilber gefüllt. Auf den in einer horizontalen Ebene liegenden Oberflächen der Quecksilbersäulen schwimmen zwei mit Dioptern versehene Würfel von Elfenbein, und unterhalb der Mitte der Verbindungsröhre ist eine Hülse angebracht, welche auf ein Stativ gestellt und horizontal

gedreht werden kann. Die Gefässe und die Röhre, welche das Quecksilber enthalten, bestehen in der Regel aus Kupfer, manchmal aber auch aus hartem Holze. Die Deckel, womit man die Quecksilberbehälter nach dem Gebrauche des Instruments schliesst, müssen sehr gut gearbeitet seyn und durch Zwingen und Druckschrauben fest an die Gefässwände gepresst werden können, um jeden Quecksilberverlust zu verhindern.

Die Richtigkeit der Quecksilberwage beruht darauf, dass bei jeder Beobachtung die Absehlinie wagrecht ist. Um sich hievon zu überzeugen hat man nur das in §. 203 für die Wallwage angegebene Verfahren anzuwenden und dabei zu beachten, dass das dort vorkommende Umsetzen des Instrumentenkörpers hier in einer Vertauschung der Diopterwürfel besteht.

Mit einer gut gebauten Quecksilberwage kann man zwar etwas genauer nivelliren als mit einer guten Canalwage, aber es muss dieser grössere Grad von Genauigkeit durch besondere Sorgfalt in der Behandlung des Instruments erkauft werden. Hieher ist zu rechnen: dass die Gefässe für die Diopter fast genau lothrecht stehen müssen, damit sich die Elfenbeinwürfel nicht an ihnen reiben; dass ferner eben desshalb der Ansatz von Quecksilberoxyd, welcher sich leicht bildet, an den Wänden dieser Gefässe vermieden oder immer wieder entfernt werden muss; und dass man sich endlich öfter von dem stetigen Zusammenhange der Quecksilbermasse in der Verbindungsröhre zu überzeugen, ausserdem aber die den Zusammenhang unterbrechenden Luftblasen zu beseitigen hat.

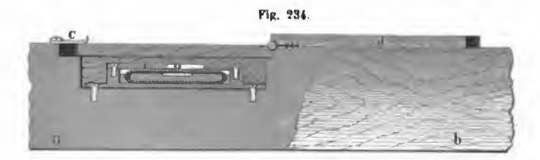
Libelleninstrumente.

§. 206. Unter allen Nivellirinstrumenten sind diejenigen, bei welchen die Horizontalstellung durch eine Röhrenlibelle bewirkt wird, die genauesten. Sie bestehen in der Regel aus Diopter oder Fernrohr und Libelle und werden von einem Gestelle getragen, das im Allgemeinen wie das eines Theodolithen beschaffen ist. Diese Bestandtheile sind somit schon einzeln bekannt und brauchen daher nur mehr nach ihren verschiedenartigen Verbindungen und nach ihrer Gesammtwirkung betrachtet zu werden. Ehe wir jedoch auf diese Betrachtungen eingehen, müssen wir, der angenommenen Eintheilung der Nivellirinstrumente zufolge, hier auch einiger Libellensetzwagen gedenken, welche in neuester Zeit zur Anwendung kamen. Diese Libellenwagen sind freilich nicht im strengen Sinne Nivellirinstrumente, verdienen aber hier eben so gut eine Stelle als die verschiedenen Pendelwagen unter der ersten Abtheilung der Nivellirinstrumente.

1. Libellensetzwagen.

§. 207. **Libellensetzwage von Dittmar.** Der Zweck dieses in Fig. 234 im Längenschnitte dargestellten, zunächst nur für Bauhandwerker bestimmten Messwerkzeugs ist, zu untersuchen, ob Linien oder Ebenen, an die man

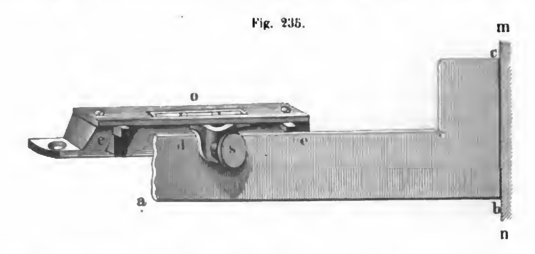
Fig. 234.



die untere Langseite ab des parallelepipedischen, $2^1/_2$ Fuss langen, 3 Zoll breiten, 1 Zoll dicken Holzkörpers anlegt, wagrecht sind. Zu dem Ende ist die Libelle o in eine Vertiefung des hölzernen Prisma's so eingesetzt, dass ihre Axe der Seite ab parallel läuft. Spielt die Luftblase ein, so ist ab wagrecht, ausserdem zeigt der Ausschlag der Luftblase Richtung und Grösse der Neigung gegen den Horizont an. Diese Libellensetzwage unterscheidet sich demnach von den in Fig. 18 und 19 dargestellten Setzlibellen dem Zwecke und Gebrauche nach gar nicht, in der Ausführung aber in so ferne, als die Unterlage hier viel grösser und die Libelle gegen das Zerbrechen durch das Einlassen in den Holzkörper, sowie durch den Verschluss mit einem hölzernen Deckel d gesichert ist. Die Libellenröhre ist in einer eisernen Fassung auf Gyps gebettet und kann, wenn sich ihre ursprünglich richtige Lage verändern sollte, nicht berichtigt werden.

Eine auch zu Untersuchungen vertikaler Linien und Ebenen dienende Einrichtung der Dittmar'schen Setzwage zeigt Fig. 235. Das eiserne Ge-

Fig. 235.



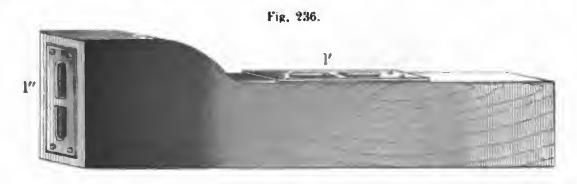
häuse der Libelle hat an der Seite zwei Ansätze e, e, deren Verbindungslinie mit der Libellenaxe parallel ist, und einen Backen d, durch welchen eine Klemmschraube s geht. Mit den Ansätzen e, e kann die Libelle auf die obere Kante eines eisernen Winkelhackens abc aufgesetzt und mit der Schraube s an der Seite dieses Winkelhackens so befestigt werden, dass die Libellenaxe der Kante ab parallel ist. Will man untersuchen, ob eine Gerade mn lothrecht ist, so legt man die Kante cb des eisernen Winkels an sie und beobachtet, ob die Luftblase der Libelle einspielt. Ist dieses der Fall, so steht mn senkrecht; dreht man hierauf den Hacken um die

Linie a b nach zwei Seiten so, dass c b fortwährend die Ebene m n berührt, und bleibt hiebei die Luftblase in der Mitte, so ist auch diese Ebene lothrecht.

Der Vortheil einer solchen Libellenwage gegenüber einer gewöhnlichen Setzwage ist, dass sie eine etwas grössere Genauigkeit gewährt und auch bei windigem Wetter gebraucht werden kann. Eine Libellenwage nach Fig. 234 construirt liefert der Mechaniker E. Dittmar in Heilbronn a. N. um 2 fl. 36 kr., eine Libelle nach Fig. 235, ohne Winkelhacken, um 2 fl. 24 kr.

§. 208. **Libellensetzwage von Falter.** Der Mechaniker Falter in München hat der letztbeschriebenen Libellenwage eine einfachere Gestalt gegeben, in so ferne er nach Fig. 236 in einem etwa $2^1/_2$ Fuss langen und

Fig. 236.

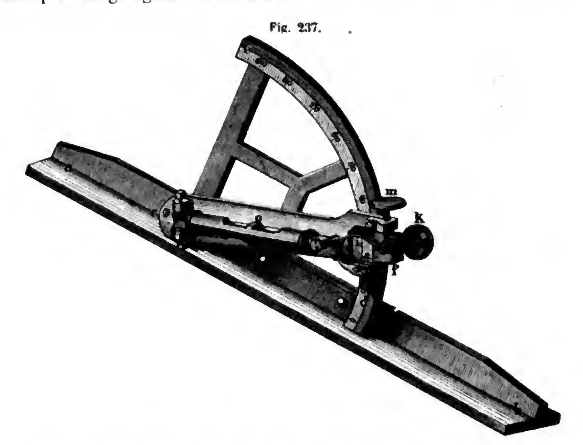


1 Zoll dicken Holzkörper zwei kleine Röhrenlibellen so anbringt, dass die eine in das Langholz eingelassene (l') zum Horizontalstellen, die andere in dem Hirnholz befindliche (l'') zum Vertikalstellen dient. Die Glasröhren sind mittels eines unveränderlichen Harzkittes unmittelbar in die Höhlungen des Holzes gebettet und durch ausgeschnittene, auf das Holz geschraubte Messingplättchen gegen Beschädigung geschützt. Eine solche Setzwage kostet nur 2 fl. 30 kr., während die mit dem eisernen Winkelhacken zu verbindende Dittmar'sche Libelle (Fig. 235) allein schon auf 2 fl. 24 kr. zu stehen kommt. In so ferne hier noch die Kosten des Winkelhackens besonders zu bestreiten sind, hat Falter den beabsichtigten Zweck offenbar in einfacherer Weise erreicht als Dittmar, und da beide Werkzeuge hinreichende Genauigkeit gewähren, so besitzen die Falter'schen Libellensetzwagen einen Vorzug vor denen Dittmar's, welcher bei den betheiligten Arbeitern wohl in's Gewicht fallen wird.

§. 209. **Setzniveau von Weisbach.** Zur Messung vertikaler Neigungswinkel kann man sich in vielen Fällen mit mehr Vortheil des Setzniveau's als der in den §§. 201 und 202 beschriebenen Berg- und Hängwage bedienen. Fig. 237 stellt dieses Instrument dar. Es besteht aus einem messingnen Lineale a b, das mit einem zu seiner Grundfläche senkrecht stehenden Quadranten e d fest verbunden ist, und aus einer an einer Albidade c f befestigten Libelle o o', welche sich miteinander um den Mittelpunkt c des Quadranten bewegen lassen. Der Gradbogen wird unmittelbar in Drittel- oder Viertelgrade getheilt und der Nonius (i) so eingerichtet, dass man bis auf einzelne Minuten ablesen kann. Eine Klemmschraube k dient zur Hemmung der groben Drehung, eine Mikrometerschraube m mit gegenüber-

stehender Feder zur feinen Einstellung. Der Nullpunkt der Theilung befindet sich in einem durch die Mitte c des Gradbogens mit der Linealgrundfläche parallel gezogenen Halbmesser.

Fig. 237.



Damit man dieses Setzniveau auch zur Messung von Neigungswinkeln an Decken gebrauchen kann, lassen wir die nach §. 36 ausgeschliffene Glasröhre so fassen, dass auch der untere Theil derselben bei o' sichtbar ist. Wird nun das Setzniveau in umgekehrter Stellung angewendet, so ist der Röhrenmittelpunkt o' oben und man kann an ihm das Einspielen der Libelle beobachten, wie vorher bei dem Punkte o. Weiter gehört zu einem Setzniveau eine Latte, auf welche dieses gestellt oder an die es beim Gebrauche angelegt werden kann. Diese Latte darf sich nicht im mindesten biegen, wesshalb man ihr einen T förmigen Querschnitt gibt, und ausserdem müssen ihre obere und untere Seitenfläche einander genau parallel seyn.

Der Gebrauch dieses einfachen Werkzeugs ist wohl für sich klar, und was seine Prüfung und Berichtigung betrifft, so ist darüber nur Weniges zu bemerken. Eine richtige Theilung des Kreises und seines Nonius, sowie eine centrische Bewegung der Alhidade vorausgesetzt, genügt es, sich zu überzeugen, ob ein Collimationsfehler vorhanden ist, nach welcher Richtung er liegt und wie viel er beträgt.

Zu dem Ende stelle man den Nullpunkt des Nonius genau auf den Nullpunkt des Gradbogens und bringe die Libelle durch Heben oder Senken der dem Augenmasse nach horizontal liegenden Latte zum Einspielen, was am einfachsten durch Unterschieben eines Messkeils geschehen kann. Hierauf setze man das Niveau um und beobachte den Ausschlag der Luftblase.

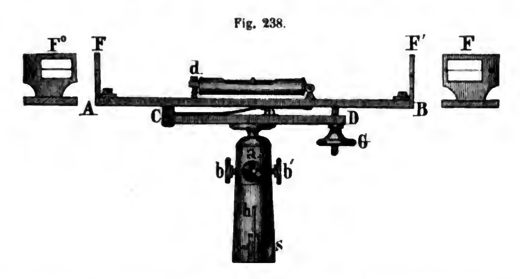
Ist dieser null, so ist kein Collimationsfehler vorhanden; beträgt er aber eine gewisse Grösse 2γ, so messe man dieselbe am Nonius, indem man durch die Mikrometerschraube m die Libelle zum Einspielen bringt. Die Hälfte γ ist die Grösse des gesuchten Fehlers, und ob dieser Fehler positiv oder negativ, d. h. von dem gemessenen Neigungswinkel abzuziehen oder zu ihm zu addiren ist, ersieht man am einfachsten aus der gegenseitigen Lage der Nullpunkte.

Hat man diese Bestimmung für den oberen Theil o der Libelle gemacht, so wiederhole man sie auch für den unteren o', indem man das Niveau an die untere Seite der Latte legt. Es kann sehr wohl seyn, dass der durch dieses zweite Verfahren gefundene Collimationsfehler γ' von dem ersten γ etwas abweicht (was von der unsymmetrischen Gestalt der Röhre herrührt); dieser Unterschied schadet aber nicht, wenn man bei dem normalen Gebrauche des Setzniveau's stets den Werth γ, und bei dem aussergewöhnlichen Gebrauche den Werth γ' in Rechnung bringt.

2. Nivellirdiopter.

§. 210. **Gewöhnliches Nivellirdiopter.** Nach Fig. 238 besteht dieses Werkzeug aus einem messingnen Lineale (A B) von 1 bis $1\frac{1}{2}$ Fuss Länge mit zwei senkrechten Flügeln (F, F'), an denen sich Diopter zum Vor- und

Fig. 238.



Rückwärtsvisiren befinden. Damit die beiden Visirlinien genau in einer Ebene liegen, muss der Horizontalfaden jedes Objectivs genau durch die Mitte jeder Ocularöffnung gehen und überdiess mit der Linealebene parallel seyn. Auf dem Lineale ist eine Röhrenlibelle, welche durch das Schräubchen d mit den Absehlinien parallel gestellt werden kann, befestigt. Zwei an einer Messingplatte (CD) angebrachte Stahlspitzen (bei C) bilden die Axe, um welche sich das Diopterlineal durch die Schraube G so viel auf- und abbewegen lässt als zur Horizontalstellung der Libelle nöthig ist. Die Feder m verhindert jeden todten Gang der Schraube G. Die Platte CD kann um eine Vertikalaxe horizontal gedreht und diese Axe selbst, welche (nach

Fig. 240) ein massiver Zapfen mit kugelförmigem Ansatze ist und im Kopfe der Hülse h steckt, durch die vier Stellschräubchen a, a' und b, b' vertikal gestellt werden. Dadurch wird die Platte CD selbst horizontal. Die Horizontalstellung dieser Platte hat man übrigens nur soweit auszuführen, dass die Fäden der Diopter wagrecht liegen; die Absehlinie wird immer erst durch die Schraube G genau horizontal gestellt. Die Hülse h wird mit der Schraube s auf dem nach Fig. 217 eingerichteten Zapfenstativ befestigt.

Die Prüfung des Nivellirdiopters besteht darin, dass man sich von dem Parallelismus der Libellenaxe mit den beiden Visirlinien überzeugt. Diese Ueberzeugung ist aber gegeben, wenn die nach §. 137, Nr. 1 angeordnete Messung das Ergebniss liefert:

$$2y = i + i' - h - h' = 0.$$

Wird der Ausdruck für y nicht null, so hat man die Libelle zu verbessern. Zu dem Ende lässt man die Zieltafel nach Erforderniss um die Grösse y auf- oder abwärts schieben und stellt auf's Neue die Absehlinie mit der Schraube G ein. Hierdurch wird die Luftblase der Libelle veranlasst, einen Ausschlag zu bilden, welcher dem zu verbessernden Fehler gleich ist. Diesen schafft man mit dem Schräubchen d weg und wiederholt hierauf nochmals die vorhergegangene Prüfung. Ist auf diese Weise eine Absehlinie mit der Libellenaxe parallel gestellt, so wird es auch die andere seyn, wenn die Diopter wirklich so beschaffen sind, wie oben verlangt wurde. Um sich hievon zu überzeugen, braucht man nur das Diopterlineal um 180° zu drehen, horizontal zu stellen und zuzusehen, ob die zweite Absehlinie auch genau auf die Mitte der Zieltafel trifft, wenn diese gerade noch so steht wie vorhin. Trifft diese Linie nicht genau die Mitte, so stelle man sie durch die Schraube G darauf ein und bemerke den hierdurch sich ergebenden Ausschlag der Luftblase. Stellt man später, wenn die zweite Absehlinie gebraucht wird, die Luftblase genau so, wie sie eben stand, so ist die Visur horizontal; will man dieses aber nicht, so muss man den Faden des zweiten Diopters ein wenig verrücken.

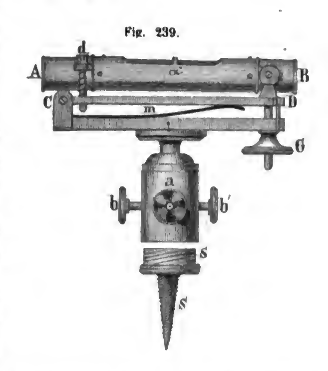
§. 211. **Stampfer's Nivellirdiopter.** Will man dem Uebelstande, dass der Objectivfaden eines Diopters und der anvisirte Gegenstand nicht gleichzeitig deutlich zu sehen sind (§. 25), begegnen, so muss das Diopter durch ein Fernrohr ersetzt werden, bei welchem bekanntlich Bild und Fadenkreuz in einer Ebene liegen. Stampfer wendet bei dem nach seiner Angabe verfertigten Nivellirinstrumente ein Fernrohr ohne Vergrösserung an und behält dafür den Namen Diopter bei. Dieses Fernrohr besteht aus zwei ganz gleich beschaffenen Convexlinsen von 2 bis 3 Linien Oeffnung und einem Fadenkreuze, das in der Mitte des Abstandes beider Linsen steht. Da die Brennweite dieser Linsen nur $1^1/_4$ Zoll beträgt, so fällt selbst für ziemlich nahestehende Gegenstände deren Bild in die Ebene des Fadenkreuzes; dieses braucht daher nicht verschoben zu werden und ist desshalb unveränderlich in der Röhre befestigt. Ein solches Diopter gewährt ausser dem schon besprochenen Vorzug des deutlicheren Sehens noch den weiteren

Vortheil, dass man mit ihm vor- und rückwärts visiren kann, ohne seine Stellung zu ändern. Dieser Umstand hat die Wirkung, dass man die parallele Lage der Libelle und der Absehlinie eben so leicht und sicher prüfen kann als bei dem Theodolithen, dessen Fernrohr sich umlegen lässt.

In welcher Weise Prof. Stampfer das eben beschriebene Diopter mit der Libelle und dem Stative verbindet, zeigt Fig. 239.

Man sieht daraus, dass Diopter und Libelle auf der Platte CD neben einander stehen, und dass die Vorrichtung zur Horizontaldrehung und Vertikalbewegung ganz dieselbe wie bei dem vorhergehenden und folgenden Nivellirwerkzeuge ist. Statt der Hülse, welche in der Zeichnung zur Befestigung auf dem Stative angenommen ist, kann man auch eine Schraube (S) anwenden, welche nach Fig. 239 an dem unteren Rand der Büchse a befestigt wird.

Fig. 239.



Der Gebrauch dieses kleinen Apparats ergibt sich von selbst und seine Prüfung ist sehr einfach, wenn man voraussetzen darf, dass die beiden entgegengesetzten Absehlinien wirklich zusammenfallen. Man braucht nämlich dann nur das Diopter auf eine etwa 100 Fuss entfernte Schieblatte zu richten, die Libelle zum Einspielen zu bringen, die Zieltafel einzuwinken und ablesen zu lassen, hierauf aber das Instrument um 180^0 zu drehen und dasselbe Verfahren bei gleichem Stande der Latte zu wiederholen. Behält die Zieltafel bei einspielender Libelle ihre Höhe bei, so ist die Libellenaxe den Absehlinien parallel, ausserdem aber muss man jene Tafel in die Mitte der beiden Ablesungen stellen und die Libelle mit dem Schräubchen d so weit verbessern, dass die Visirlinie auf die Mitte der Tafel trifft. Will man dieses nicht, so kann man nach der Umdrehung des Instruments die Absehlinie wieder auf den ersten Punkt richten und die Hälfte des Ausschlags der Luftblase an dem Schräubchen d, die andere Hälfte an der Schraube G verbessern. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Verfahrungsweisen ist zu einfach, als dass wir uns hier damit befassen wollen.

Zweifelt man an dem Zusammenfallen der beiden entgegengesetzten Absehlinien in eine einzige, so muss die Prüfung des Stampfer'schen Nivellirdiopters nach §. 137, welcher auch bei dem gewöhnlichen Nivellirdiopter in Anwendung kommt, vorgenommen werden. Eine Berichtigung könnte freilich nur von einem Mechaniker vorgenommen werden.

Die Genauigkeit des Stampfer'schen Diopters darf man erfahrungsgemäss auf 0,00005 der Entfernung annehmen, d. h. bei 200 Fuss Abstand der

Latte wird man die abgelesene Höhe auf eine Dezimallinie richtig erhalten: mit einem gewöhnlichen Diopter ist nur wenig mehr als die halbe Genauigkeit (1 : 12 000) zu erreichen.

3. Nivellirinstrumente mit Fernrohr.

§. 212. **Stampfer's Nivellirfernrohr.** Ein dem Nivellirdiopter ganz ähnliches Werkzeug ist das Taschen-Nivellirinstrument oder Nivellirfernrohr von Prof. Stampfer, welches in Fig. 240 von der Seite und in Fig. 241 von vorne gesehen dargestellt ist. Es unterscheidet sich von dem eben betrachteten Nivellirdiopter nur dadurch, dass an ihm statt der nicht vergrössernden Linsenverbindung ein kleines Fernrohr von $4^1/_2$ Zoll Länge und fünffacher Vergrösserung angebracht ist, und dass die Röhrenlibelle (L) über, nicht neben

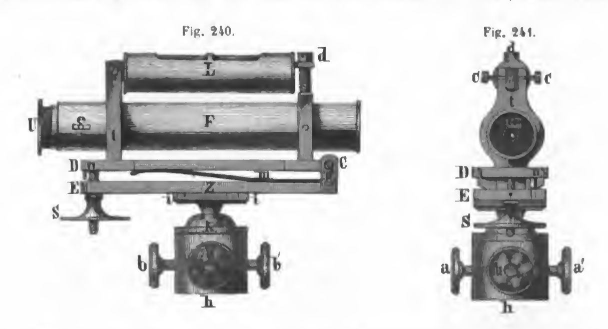


Fig. 240. Fig. 241.

dem Fernrohr steht. Die Horizontal- und Vertikalbewegungen sind völlig denen der beiden Nivellirdiopter gleich, wesshalb wir dieselben nicht weiter besprechen, aber doch darauf hinweisen wollen, dass die vorstehenden Figuren den Vertikalzapfen mit seinem Ansatze k durch punktirte Linien andeuten, was in den Figuren 238 und 239 nicht der Fall ist. Das Fernrohr (F) kann nicht um seine optische Axe gedreht werden, da es in seinen Lagern (t, t) festgemacht ist; das Fadenkreuz lässt sich ebenfalls nicht drehen. Letzteres ist durch zwei mit der Ocularröhre verbundene Stifte (e), welche sich in einem Schlitze der Objectivröhre bewegen, daran verhindert. Der Schlitz ist mindestens so lang als die mögliche Aenderung der Bildweite (a_1) des Objectivs. Das Augenglas (U) lässt sich, so weit es das deutliche Sehen verlangt, dem Fadenkreuze nähern oder von ihm entfernen. Der mit n bezeichnete Stift an dem Hebel CD zeigt, wenn er die Grundplatte EZ berührt, an, dass die Libellenaxe zur Axe des Vertikalzapfens k senkrecht steht. Diese Stellung gibt man der Libellenaxe vor jeder Horizontalstellung, welche durch die vier Stellschräubchen a, a', b, b' in bekannter Weise bewirkt wird.

Vier um 90° von einander abstehende Marken an der Scheibe i,i kann man benützen um auf eine Visirrichtung eine zweite senkrecht zu stellen. Das ganze Instrument findet in einem 5 Zoll langen, 4 Zoll breiten und $1\frac{1}{2}$ Zoll hohen Kästchen und dieses selbst in einer Tasche Platz. Die Verbindung desselben mit dem Stative geschieht entweder durch eine Schraube S, wie sie in Fig. 239 gezeichnet ist, oder durch eine Hülse, welche man statt derselben an der Büchse h anbringen lassen kann, wenn es beliebt.

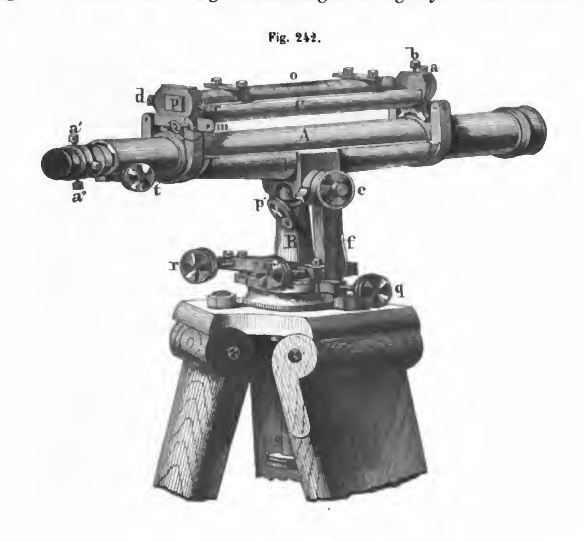
Die Prüfung und Berichtigung der Libellenaxe wird nach §. 137 Nr. 1 vorgenommen und die deutliche Sichtbarkeit des Fadenkreuzes durch Verschiebung des Augenglases hergestellt. Eine Centrirung des Fadenkreuzes ist nicht nöthig, da dasselbe sich nur längs der optischen Axe, aber nicht senkrecht darauf bewegen kann.

Die Genauigkeit, welche mit dem eben betrachteten Instrumente erreicht werden kann, darf, wenn man keine zu grossen Entfernungen der Latte nimmt, auf 1 : 60 000 veranschlagt werden.

Das Ertel'sche kleine Nivellirinstrument.

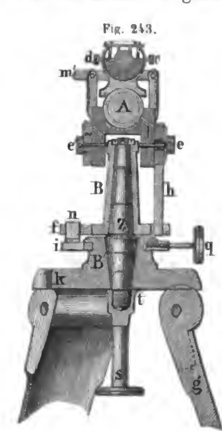
§. 213. Zu der perspectivischen Abbildung dieses Instruments in Fig. 242 und dem zur optischen Axe des Fernrohrs senkrechten Durchschnitte in Fig. 243 werden nur wenige Erläuterungen nöthig seyn. Das Gestelle ist

Fig. 242.



das bekannte Reichenbach'sche; seine Kopfplatte (k) erhebt sich in der Mitte zu einer konischen Büchse (B'), in welche der Vertikalzapfen (z) gesteckt wird, wenn man das Instrument aufstellen will. Dieser Zapfen wird durch die Schraube s in Folge der Reibung bei t in der Büchse festgehalten. Um ihn dreht sich die zweite Büchse B, an deren Kopf das Fernrohrlager (l) angebracht ist. Die hierdurch mögliche grobe Horizontaldrehung des Fernrohrs lässt sich durch die Druckschraube q hemmen; alsdann ist noch eine feine Drehung durch die Mikrometerschraube r hervorzubringen. Das Lager des Fernrohrs dreht sich vertikal um eine zu dem Hauptzapfen z senkrecht stehende horizontale Axe (ee'), die aus zwei in die Büchse B geschraubten Körnern (e, e') besteht. Auch diese Drehung ist entweder eine grobe oder eine feine: die grobe ist möglich, wenn man die Schraube p' lüftet; die feine, wenn man p' anzieht und r' vor- oder rückwärts dreht. Durch die eben beschriebenen Horizontal- und Vertikalbewegungen lässt sich die optische Axe des Fernrohrs genau auf die Mittellinie der Nivellirlatte oder einer Zieltafel einstellen und in eine horizontale Lage bringen. Das Fernrohr (A) liegt mittels zweier genau abgedrehter Ringe in seinem ebenfalls cylindrischen Lager und kann daselbst um seine Axe gedreht werden. Seine innere Einrichtung ist bereits in §. 63 vollständig abgebildet und beschrieben worden, also bekannt. Dasselbe gilt von der Röhrenlibelle (o), welche auf die eben genannten Ringe gesetzt und durch Schliessen (m, m') festgehalten wird. (§. 38.)

Fig. 243.



§. 214. **Prüfung und Berichtigung.** Wenn dieses Instrument zum Nivelliren gebraucht werden soll, so muss man sich vorher überzeugt haben:

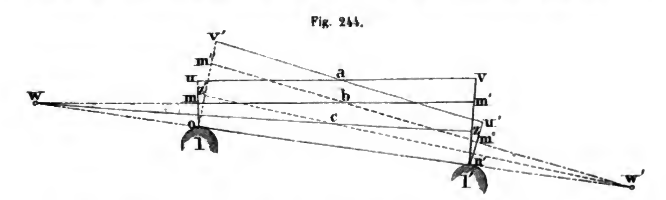
1) dass die optische und mechanische Axe des Fernrohrs zusammenfallen oder das Objectiv genau centrirt ist;
2) dass das Fadenkreuz die richtige Lage hat, d. h. deutlich gesehen wird und in den vereinigten Axen liegt;
3) dass die Libellenaxe mit der durch die Fernrohraxe bestimmten Absehlinie parallel ist; und
4) dass die Ringdurchmesser des Fernrohrs genau gleich sind.

Die Prüfungen Nr. 1 bis 3 und die zugehörigen Berichtigungen sind nach einander in den §§. 65 und 39 vollständig beschrieben und es bleibt daher nur noch in Bezug auf die vierte Einiges zu bemerken übrig.

Ueber die Nothwendigkeit dieser Prüfung wird kein Zweifel stattfinden, da man sofort einsieht, dass durch das Verfahren zu Nr. 3 die Libellenaxe unmittelbar nur mit der obersten Seite der durch die Ringe bestimmten

Kegel- oder Cylinderfläche parallel gestellt wird und erst dann mit der Absehlinie parallel läuft, wenn die beiden Ringe wirklich in einer Cylinderfläche liegen. Ist letzteres der Fall, so ist klar, dass man das Fernrohr sammt der Libelle, nachdem diese zum Einspielen gebracht ist und die Prüfungen 1 bis 3 vorausgegangen sind, in seinem Lager umsetzen kann, ohne dadurch eine Aenderung in dem Stande der Luftblase zu bewirken. Hat dagegen der eine Ring einen grösseren Durchmesser als der andere und man bringt die Libelle zum Einspielen, so wird dieselbe nach dem gemeinschaftlichen Umsetzen mit dem Fernrohre einen Ausschlag zeigen, der dem vierfachen Neigungswinkel der Ringaxe gegen die Libellenaxe entspricht.

Fig. 244.



Denn stellen in Fig. 244 die Linien mo, m'n' die beiden Ringdurchmesser d, d' und uv, wz die Axen der Libelle und des Fernrohrs vor, so ist in Folge der Berichtigungen zu Nr. 1 und 3 uv parallel zu mm', und der Neigungswinkel bwc $= \varphi$ beider Axen ergibt sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d' - d}{2e}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (169)$$

wenn man die Entfernung der Ringe $mm' = e$ setzt. Wird das Fernrohr sammt der Libelle umgelegt, an dem Lager on' aber Nichts geändert, so nimmt die Linie mm' die Lage $m^0 m''$ und uv die Lage u'v' an, wobei $n'm^0 = om = d$, $om'' = n'm' = d'$ und $m^0u' = mu = m''v' = vm'$ ist. Man entnimmt nun leicht aus der Figur, dass der Neigungswinkel ($v'au = \psi$) der Libellenaxe v'a gegen den Horizont $= 4\varphi$ ist, und dass somit der Ausschlag der Luftblase den vierfachen Fehler φ anzeigt, w. z. b. w.

Dieser Fehler φ hat immer einen nachtheiligen Einfluss auf das Nivelliren, wie sich aus der Gleichung (169) bestimmen lässt. Da nämlich die Visirlinie, wenn die Libelle einspielt, mit dem Horizont einen Winkel φ bildet, so wird man auf die Entfernung E die Lattenhöhe um eine Grösse

$$f = E \operatorname{tg}\varphi = \frac{E\,(d' - d)}{2e} \quad \ldots \ldots \quad (170)$$

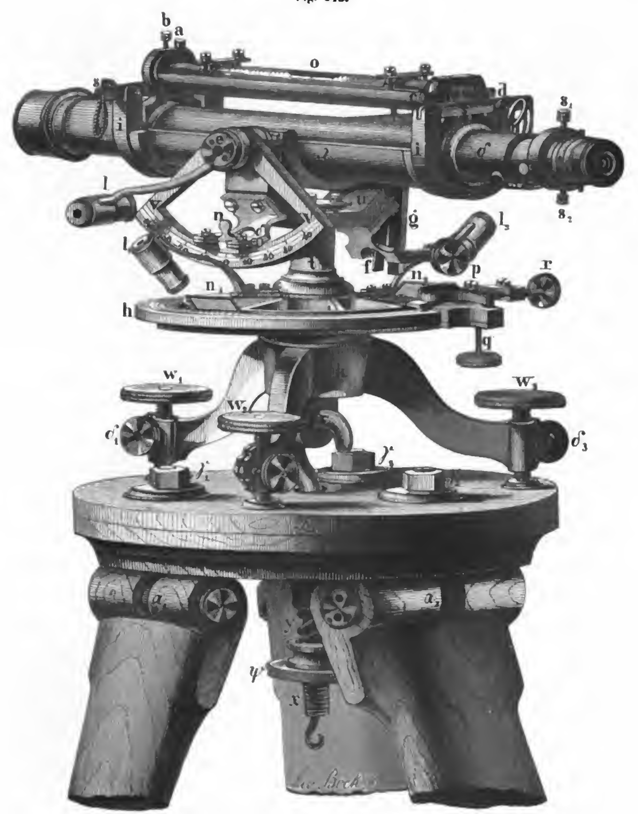
falsch erhalten; diese Grösse kann aber oft sehr bedeutend seyn. Denn nimmt man an, dass der Unterschied in den Durchmessern nur $^1/_{20}$ Linie beträgt, so wird für $e = 4'' = 40'''$ und $E = 200' = 20\,000'''$ der Fehler f $= 12{,}5$ Linien. Derselbe Fehler würde bei gleichen Ringdurchmessern offenbar auch dadurch entstehen, dass zwischen einen Fuss der berichtigten Libelle

und den Ring des Fernrohrs, worauf dieser Fuss steht, Sandkörnchen eindringen, welche die Libelle um $^1/_{20}$ Linie heben. Man entnimmt hieraus, wie nöthig es ist, die Ringe und die Füsse der Libelle von Staub rein zu halten!

Wenn sich, was aber höchst selten der Fall seyn wird, eine Ungleichheit der Ringdurchmesser herausstellen sollte, so kann dieselbe zwar nicht berichtigt, wohl aber durch mehrere Mittel in ihrer schädlichen Wirkung gemildert werden. Eines dieser Mittel ist die Verbesserung der Visirhöhen durch Berechnung der Fehler nach der letzten Gleichung. Alle diese Fehler sind den Entfernungen E proportional und daher, wenn einer bestimmt ist, leicht zu finden. Ein anderes Mittel besteht darin, dass man den Stand der Luftblase bestimmt, für welchen die Absehlinie horizontal ist, und die Libelle jedesmal auf diese Stelle statt auf den Nullpunkt der Scala einspielen lässt. Ein drittes Mittel endlich ist, sich genau gleichweit von den einzunivellirenden Punkten aufzustellen und gerade so zu verfahren, als ob der in Rede stehende Fehler nicht vorhanden wäre. In diesem Falle werden beide Visirhöhen um gleichviel zu gross oder zu klein erhalten und folglich gibt ihr Unterschied die Höhe des einen Punktes über dem anderen richtig. Es ist aber klar, dass bei diesem Verfahren keine Zwischenpunkte einnivellirt werden dürfen, weil für diese die Visirhöhen nicht um eben so viel fehlerhaft werden als die der äussersten Punkte einer Station, indem ihre Entfernungen vom Instrumente kleiner sind.

§. 215. **Gebrauch.** Ist das Ertel'sche kleine Nivellirinstrument berichtigt, so ist sein Gebrauch ein sehr einfacher. Man stellt nämlich das Stativ in ungefähr gleicher Entfernung von den beiden einzunivellirenden Punkten A und B fest, richtet das Fernrohr auf die in dem Punkte A lothrecht stehende Latte, verschiebt das Ocular durch das Getriebe t, bis man auf ihr deutlich lesen kann, bringt dann durch Drehung des Fernrohrs das Fadenkreuz so in die Mitte der Latte, dass der eine Faden vertikal, der andere horizontal ist, stellt hierauf die Libelle mit der Mikrometerschraube r' horizontal, liest ab und schreibt die Ablesung auf. Ohne Etwas an dem Stand des Gestelles zu ändern, dreht man nun das Fernrohr nach dem zweiten Punkte B, wo jetzt die Latte steht, und wiederholt das vorige Verfahren: die Differenz beider Ablesungen gibt den gesuchten Höhenunterschied zwischen A und B. Es ist durchaus nicht nöthig, wie Manche irrig meinen, dass man in der geraden Linie AB das Instrument aufstellen müsse; es kann beliebig weit ausserhalb dieser Geraden stehen, wenn es nur von A und B nicht zu ungleich entfernt ist. Dass man diese Entfernungen nach dem Augenmasse gleich annimmt, hat darin seinen Grund, dass hierdurch, wie später gezeigt wird, der schädliche Einfluss der Strahlenbrechung und Erdkrümmung auf die Höhenbestimmung wegfällt. Man braucht aber in dem Abschätzen dieser Entfernungen keineswegs ängstlich zu seyn, da 10 oder 20 Fuss Unterschied der Längenabstände bei gut beschaffenen Instrumenten noch keinen merkbaren Fehler veranlassen.

Fig. 245.



Das Ertel'sche grosse Nivellirinstrument.

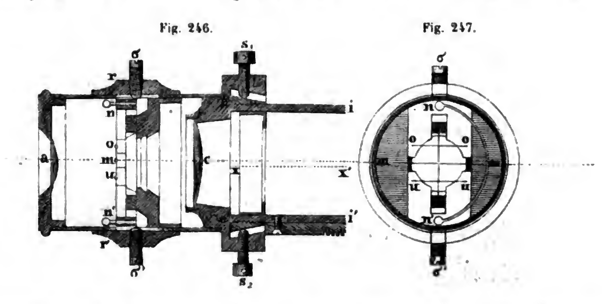
§. 216. Wir haben von diesem Instrumente bereits im vorigen Abschnitte (§. 184) eine Abbildung und Beschreibung geliefert, da es nicht bloss zum Nivelliren, sondern auch zum Distanz- und Winkelmessen bestimmt

ist. Wegen dieser dreifachen Bestimmung kann man es auch Universalinstrument heissen, wie wir bereits gethan haben; die Benennung „grosses Nivellirinstrument“ wird jedoch von den Ingenieuren häufiger gebraucht, und da sie auch in dem Preissverzeichnisse von Ertel und Sohn vorkommt, so wollen wir sie hier ebenfalls anwenden.

Der früheren Beschreibung ist Nichts mehr beizufügen; nur über den Gebrauch des Universalinstruments zum Nivelliren sind einige Bemerkungen zu machen. Dieser Gebrauch setzt die Berichtigung des Instruments voraus. Wenn es sich aber bloss um das Nivelliren (nicht um Winkel- und Distanzmessung) handelt, so genügt es, dieselben vier Prüfungen vorzunehmen, welche im vorigen Paragraph für das kleine Ertel'sche Nivellirinstrument als nothwendig erkannt und beschrieben wurden.

Hinsichtlich der Ausführung dieser Untersuchungen besteht zwischen dem grossen und kleinen Instrumente gar kein Unterschied; nur die Berichtigung des Fadenkreuzes geschieht auf verschiedene Weise: bei dem

Fig. 246. Fig. 247.



kleinen nämlich nach §. 65 und bei dem grossen dadurch, dass man den Theil der Ocularröhre, welcher das Fadenkreuz trägt, mittels der in Fig. 246 mit s_1 und s_2 bezeichneten Stellschräubchen, denen zwei andere s_3 und s_4 senkrecht gegenüberstehen, so weit gegen die Axe der Objectivröhre verrückt, bis der mittlere Kreuzungspunkt m in der Axe dieser Röhre liegt. Was in §. 214 über den Einfluss der ungleichen Ringdurchmesser des kleinen Instruments und dessen Beseitigung oder Vermeidung gesagt wurde, gilt hier ohne alle Ausnahme.

Das Verfahren, den Höhenunterschied zweier oder mehrerer Punkte zu finden, erfordert durchaus nicht, wie Viele glauben, eine Horizontalstellung des Kreises, sondern einzig und allein nur die Horizontalstellung des Fernrohrs in der Richtung zur Latte. Selbst wenn mehrere einzunivellirende Punkte um den Standpunkt des Instruments liegen, gewährt es keinen Vortheil, den Kreis horizontal zu stellen; denn die Herstellung dieser Lage kostet mehr Zeit als die wenn auch mehrmals sich wiederholende Horizontal-

stellung des Fernrohrs. Hiezu kommt, dass im ersteren Falle für jede Visur die Libelle doch wieder zum genauen Einspielen gebracht werden muss, da selten ein Instrument so vollkommen ist, dass die Luftblase nicht um einige Theilstriche aus der Mitte gienge, wenn man das Fernrohr mit der Alhidadenaxe dreht.

Mit dem grossen Ertel'schen Nivellirinstrumente kann man zwei Punkte, die 500 Fuss auseinander liegen, von einem Standpunkte aus einnivelliren, wenn dieser von beiden nahezu gleichweit und nicht viel über 250 Fuss entfernt ist. Man kann in diesem Falle den Höhenunterschied bis auf eine halbe Linie genau ermitteln und somit eine Genauigkeit von 1 : 100 000 erreichen. Bei sehr weit ausgedehnten Nivellements ist diese Genauigkeit scheinbar noch viel grösser, indem sich kleine Fehler in den einzelnen Stationen aufheben. Der Verfasser hat mehrmals Nivellements von 5 Meilen Länge ausgeführt, welche am Schlusse nur um 0,2 Fuss von einander abwichen. Vertheilt man diesen Höhenunterschied auf die Länge von $5 \times 25400 = 127\,000$ Fuss, so ist die Genauigkeit für die ganze Strecke $= 1 : 635000$. Zu solchen Höhenmessungen stehen die Längenmessungen, welche für technische Zwecke meist nur mit der Messkette (selten mit Messlatten) gemacht werden, in einem sehr ungünstigen Verhältnisse, indem jene leicht 100 bis 500 mal genauer seyn können als diese.

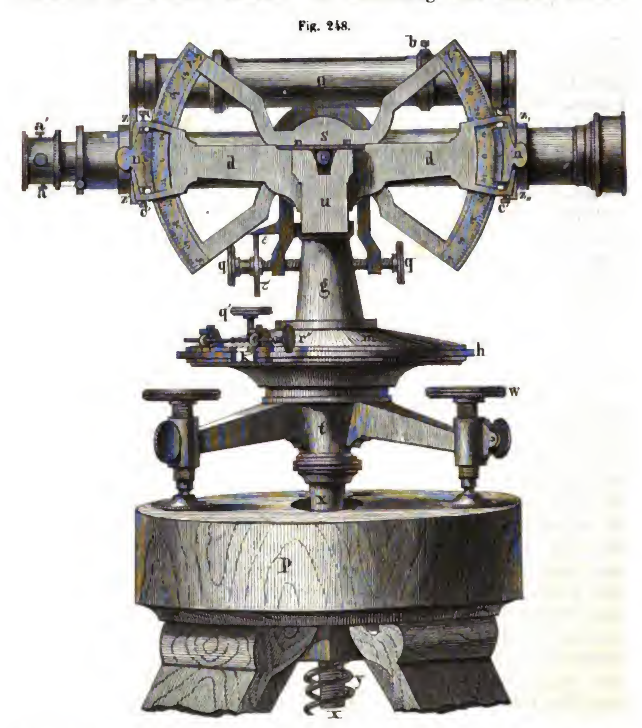
Das Breithaupt'sche grosse Nivellirinstrument.

§. 217. Man macht den Nivellirinstrumenten, deren Fernrohre sich in ihren Lagern umdrehen lassen und bei welchen die Libellen mittels cylindrischer Füsse auf zwei genau abgedrehte Ringe der Objectivröhre des Fernrohrs gesetzt werden, den Vorwurf, dass sich diese Ringe bald abnützen oder Beschädigungen erleiden, welche nicht der Geometer, sondern nur der Mechaniker verbessern kann. Andrerseits erkennt man den grossen Vorzug an, welchen diese Instrumente dadurch besitzen, dass man sie auf so einfache und von jedem anderen Nivellirinstrumente unabhängige Weise prüfen und berichtigen kann. Es lässt sich nun zwar nicht läugnen, dass an dem eben ausgesprochenen Vorwurfe etwas Wahres ist, nämlich dass wirklich eine Abnützung der Lagerringe stattfindet; aber es kann nicht zugegeben werden, dass diese Abnützung bald oder sogar „sehr bald" eintritt, wie hie und da behauptet wird. Bei sorgfältiger Behandlung jener Instrumente kann man sie jahrelang an allen zum Nivelliren geeigneten Tagen gebrauchen, ohne dass man auch nur mehr als eine Spur jener Abnützung wahrnimmt. Tritt dann endlich wirklich eine nachtheilige Ungleichheit der Ringdurchmesser ein, so ist die Ausgabe für die Abgleichung derselben im Verhältniss zu den Vortheilen, die dergleichen Instrumente in den vorhergegangenen Jahren gewährt haben und in den folgenden wieder gewähren werden, eine so geringe, dass sie nicht in Anschlag kommen kann.

Breithaupt in Cassel hat aus Veranlassung des erwähnten und von

ihm vielleicht zu sehr gewürdigten Mangels seinen grösseren Nivellirinstrumenten eine Einrichtung gegeben, wodurch das Fernrohr allerdings umgelegt, aber nicht um seine optische Axe gedreht werden kann, und wobei die Libelle zwar auf dem Fernrohre aufsitzt, aber nicht unmittelbar auf der Objectivröhre selbst, sondern auf den Köpfen stählerner Stellschrauben, welche in dieser Röhre stecken. Die Einrichtung eines solchen Nivellir-

Fig. 228.



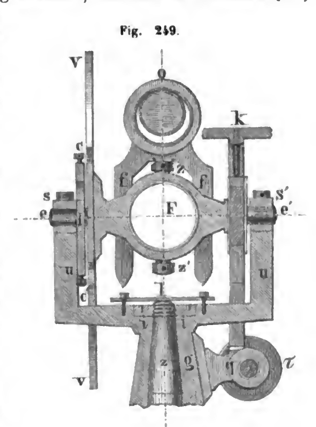
instruments ergibt sich aus der Zeichnung in Fig. 228, welche nach den in dem Preissverzeichnisse von F. W. Breithaupt und Sohn enthaltenen Abbildungen angefertigt ist. Des Raumes wegen ist hier das Fernrohr etwas verkürzt dargestellt.

Dieses Nivellirinstrument ist gleichzeitig zum Messen horizontaler und

vertikaler Winkel eingerichtet. Sein Stativ (p). der Dreifuss (t) und dessen Verbindung (x, x) mit dem Gestelle, der Horizontalkreis (h) mit der Alhidade (m), die Nonien (n) und die Klemmvorrichtung (q', r') sind gerade so beschaffen, wie die gleichnamigen Theile des in §. 135 beschriebenen einfachen Theodolithen; wir können uns daher sofort zu den übrigen Bestandtheilen wenden, bei deren Besprechung uns ihr Querdurchschnitt (Fig. 249) unterstützen soll.

Mit dem Dreifusse und dem Horizontalkreise steht ein Vertikalzapfen (z_0) in fester Verbindung; seine Axe ist zugleich die der Alhidade, welche sich mit einer konischen Metallbüchse (g) um ihn dreht. Das Abheben dieser Büchse von dem Zapfen ist durch die Schraubenmutter i, und das Herabsinken derselben durch die federnde Scheibe l verhindert. Die zwei Arme (u, u), in welche die Büchse g ausläuft, nehmen die Drehaxe (ee') des Fernrohrs auf. Will man diese Axe aus ihren Lagern heben und das Fernrohr umlegen, so muss man die Schliessen (s, s'), welche sie bedecken, durch Lösung der auf sie drückenden Schräubchen öffnen. Die grobe Drehung der in Rede stehenden Axe kann durch die Druckschraube k gehemmt werden; nach dieser Hemmung ist die feine Drehung durch die Mikrometerschraube q möglich. Die eingetheilte Trommel τ derselben und der feststehende Zeiger ε gestatten, die Vertikalwinkel an den beiden Höhenbögen v, v' bis auf einzelne Sekunden zu messen, nachdem die beiden einander gegenüberstehenden Nonien n, n' dieselben bis auf 10 Sekunden angegeben haben. Der Höhenkreis von 8 Zoll Durchmesser ist nämlich auf

Fig. 249.



Silber unmittelbar in Sechstelgrade getheilt und 59 solche Theile geben 60 Noniustheile. Der Horizontalkreis hat nur 7 Zoll Durchmesser, aber dieselbe Theilung wie der Höhenkreis. Die Nonien des letzteren bewegen sich in Stahlspitzen c, c', durch welche jeder Collimationsfehler beseitigt werden kann. Das 20 Zoll lange achromatische Fernrohr besitzt 18 Linien Oeffnung und eine 35malige Vergrösserung; es lässt sich aus seinen Lagern heben und so umlegen, als ob es durchgeschlagen wäre. In diesen beiden Lagen des Fernrohrs wird die Libelle (o), welche für 5 Sekunden Neigung 1 Linie Ausschlag gibt, mit dem einen Ende auf den abgeschliffenen Kopf des Stellschräubchens z oder z', mit dem andern Ende auf die Kante eines dreiseitigen Stahlprisma's (bei $z_,$ oder $z_{,,}$) aufgesetzt und durch gabelförmige Füsse

(f, f), die sich dicht an die Objectivröhre anschliessen, vor Seitenbewegungen bewahrt.

§. 218. **Prüfung und Berichtigung.** Wenn das grosse Breithaupt'sche Nivellirinstrument in seinen beiden Eigenschaften als Höhen- und Winkelmesser berichtigt seyn soll, so muss

1) die Libellenaxe mit der durch die Auflagepunkte $z, z_,$ oder $z', z_{,,}$ bestimmten Linie parallel seyn; ferner müssen
2) diese beiden Linien unter sich und
3) mit der die Abstände zz', $z_, z_{,,}$ halbirenden optischen Axe des Fernrohrs parallel laufen; weiter muss sich
4) die optische Axe beim Auf- und Niederkippen des Fernrohrs in einer zum Horizontalkreise senkrechten Ebene bewegen; und endlich dürfen
5) die beiden Nonien des Höhenkreises keinen Collimationsfehler haben.

Ausserdem sollen die beiden Kreise und ihre Nonien richtig getheilt seyn und keine Excentricitäten der Alhidade und des Fernrohrs stattfinden.

Zu 1. Um zu sehen, ob die Libellenaxe der Linie $zz_,$ parallel läuft, bringe man die Luftblase mit Hilfe der Mikrometerschraube q zum Einspielen, setze hierauf die Libelle um und verbessere die eine Hälfte des Ausschlags durch die Stellschraube (b) der Libelle, die andere aber durch die Mikrometerschraube q oder eine der Fussschrauben (w, w). Hierauf Wiederholung des Verfahrens. Es ist klar, dass die Libellenaxe, wenn sie mit $zz_,$ parallel ist, auch mit $z'z_{,,}$ parallel läuft, sobald sie auf das umgelegte Fernrohr gesetzt wird.

Zu 2. Die Linien $zz_,$ und $z'z_{,,}$ werden einander parallel seyn, wenn in zwei genau entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs die Luftblase der vorher berichtigten Libelle genau einspielt. Darum stelle man die Libelle auf $zz_,$, bringe die Luftblase in die Mitte und lese die beiden Nonien des Höhenkreises so genau als möglich ab. Nun hebe man, ohne sonst an dem Instrumente Etwas zu ändern, das Fernrohr aus seinem Lager und setze es so wieder ein, dass es als durchgeschlagen erscheint; bringe hierauf die Libelle auf die feste Linie $z'z_{,,}$, lasse sie abermals einspielen und lese wieder die beiden Nonien am Vertikalkreise ab. Ist das Mittel dieser Ablesungen dem Mittel der vorigen gleich, so sind die Linien $zz_,$ und $z'z_{,,}$ parallel; weichen aber die beiden mittleren Ablesungen von einander ab, so bewirke man durch die Mikrometerschraube q ihre Gleichheit und verbessere alsdann den Ausschlag der Libelle an einer der Schrauben z, z' durch Heraus- oder Hineindrehen.

Von der Richtigkeit dieses (wiederholt anzuwendenden) Verfahrens kann man sich leicht überzeugen, wenn man erwägt, dass durch Herstellung der gleichen mittleren Ablesungen (die aber insoferne einander entgegengesetzt sind, als die eine Höhen- und die andere Tiefenwinkel bezeichnet) die Visirlinie und die Linie $zz_,$ genau in die ihrer ersten entgegengesetzte Lage kommen. Da nun $zz_,$ ursprünglich horizontal war, so ist sie es in der

zweiten Lage wieder. Wenn aber in dieser Lage die auf $z'z_{,,}$ stehende Libelle einen Ausschlag zeigt, so kann er einzig nur von der Linie $z'z_{,,}$ herrühren, welche desshalb auch allein zu verbessern ist.

Zu 3. Die Visirlinie geht durch die Mitte der Auflagerabstände zz' und $z_{,}z_{,,}$ und ist der Libellenaxe parallel, wenn sie nach Umlegung des Fernrohrs und einer halben Drehung der Alhidade des Horizontalkreises bei einspielender Libelle ihre erste Lage wieder annimmt. Desshalb richte man, nachdem die Berichtigungen zu Nr. 1 und 2 gemacht sind, das Fernrohr auf eine etwa 180 Fuss weit entfernte lothrecht stehende Nivellirlatte, stelle das Ocular so, dass man die Theilung ganz deutlich sehen kann, bringe die Libelle zum Einspielen und lese ab. Hierauf lege man das Fernrohr wie bei Nr. 2 um, drehe die Alhidade des Horizontalkreises um 180^0, d. h. so weit um, dass das Fernrohr wieder auf die Latte, welche unverrückt stehen blieb, gerichtet ist, lasse die Luftblase einspielen und sehe zu, ob die neue Ablesung der vorausgegangenen gleich ist oder nicht. Sind beide gleich, so ist das Fadenkreuz richtig centrirt, weichen sie aber ab, so muss die halbe Abweichung durch die auf den Horizontalfaden wirkenden Stellschräubchen a, a' verbessert werden. Die Nothwendigkeit der Wiederholung des Verfahrens versteht sich von selbst.

Zu 4. Die Erfüllung der vierten Bedingung, dass sich die Virsirlinie bei horizontal gestelltem Instrumente in einer Vertikalebene bewege, setzt voraus: a) dass jene Linie senkrecht stehe zur Drehaxe des Fernrohrs, und b) dass diese Axe mit der Alhidadenaxe einen rechten Winkel bilde. Wie diese beiden Fälle untersucht werden, ist im §. 137 unter den Prüfungsverfahren zu Nr. 2 und Nr. 3 nachzulesen.

Zu 5. Ueber die Bestimmung und Beseitigung des Collimationsfehlers der Nonien am Höhenkreise gilt Alles was darüber in §. 137 Nr. 4 mitgetheilt wurde. Hinsichtlich der Excentricitäts- und Theilungsfehler glauben wir auf den Schluss des eben genannten Paragraphen und auf §. 138 verweisen zu dürfen.

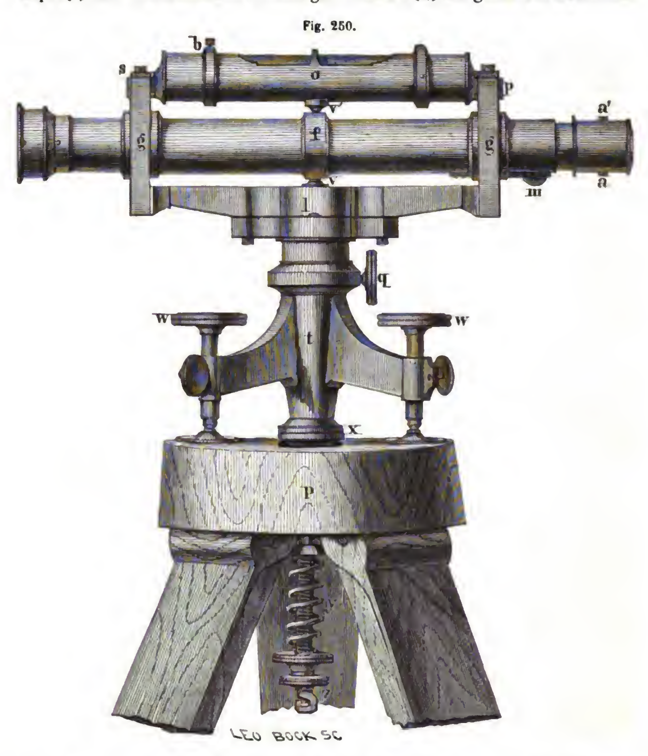
Die Winkelmessung geschieht wie mit dem einfachen Theodolithen (§. 136) und das Nivelliren wie mit den Ertel'schen Nivellirinstrumenten (§§. 215 und 216). Die Genauigkeit beider ist gleich.

Das Breithaupt'sche kleine Nivellirinstrument.

§. 219. Das Breithaupt'sche Nivellirinstrument ohne Horizontal- und Höhenkreis hat die in Fig. 250 dargestellte einfachere Form. Die Horizontaldrehung des Fernrohrs geschieht hier um einen mit dem Fernrohrträger (l) festverbundenen und in den Dreifuss (t) eingeschliffenen Zapfen von ähnlicher Construction wie die des Alhidadenzapfens in Fig. 144. Durch die Druckschraube q wird diese Drehung gehemmt; eine feine Horizontaldrehung ist nicht möglich, aber auch nicht nöthig, da man mit der blossen Hand das Fernrohr leicht auf die Mittellinie der Nivellirlatte einstellen kann. Der

Fernrohrträger spaltet sich an seinen Enden (e, e) in Gabeln (g, g), zwischen denen nach Fig. 251 und 252, welche Längen- und Querschnitte der Endstücke bei e vorstellen, die Objectivröhre mittels eines stählernen Schraubenkopfs (z) und die Kante eines dreiseitigen Prisma's ($z_{,}$) auf gleichfalls stählernen

Fig. 250.



Unterlagen (u, u) ruht. Der Grund für dieses Auflager ist in §. 217 angegeben. Die Länge des Fernrohrs, welches hier etwas verkürzt gezeichnet ist, beträgt 16 Zoll und die Oeffnung seines Objectivs 16 Linien; das astronomische Ocular vergrössert 30mal. Die Röhrenlibelle, welche mit ihren Ansätzen p, p einerseits auf einer mit dem Fernrohre festverbundenen Stahlkante (c) und andrerseits auf einem Schraubenkopfe (z′) ruht und durch

Fig. 251

Fig. 252.

Schliessen (s, s) und Stifte (i, i) zwischen den Armen (g, g) festgehalten wird, gibt für 8 Sekunden Neigung einen Ausschlag von einer Linie.

An diesem Instrumente ist vor seinem Gebrauche zu untersuchen, ob folgende Linien parallel sind:

1) die Libellenaxe und die durch die Punkte c und z′ bestimmte Unterlage derselben;
2) die Linie cz′ und die durch die Lagerpunkte des Fernrohrs gehende Linie $zz_{,}$; endlich
3) die Visirlinie und die Libellenaxe.

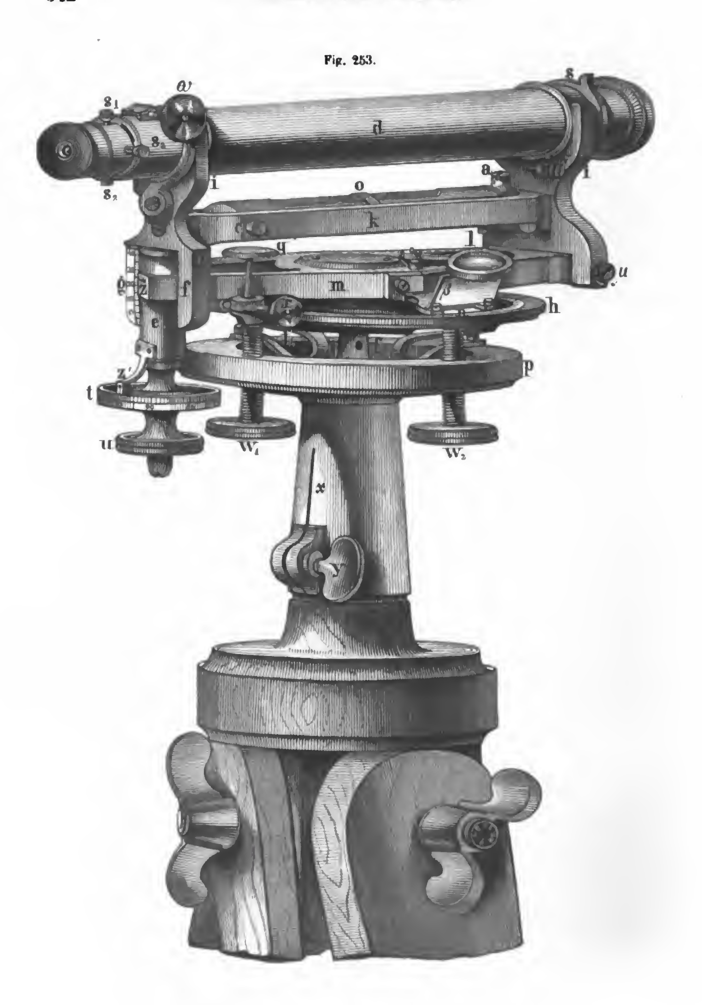
Die erste Untersuchung und eine durch sie bedingte Berichtigung geschehen auf bekannte Weise. Die zweite Prüfung ist weit einfacher als die gleichvielte des grösseren mit Vertikalkreis versehenen Instruments. Man braucht nämlich nur die vorher berichtigte Libelle zum Einspielen zu bringen und hierauf das Fernrohr sammt der Libelle umzulegen, so dass bloss die Auflagepunkte $z, z_{,}$ vertauscht werden, und zuzusehen, ob die Libelle wieder einspielt. Wenn ja, ist die Linie $zz_{,}$ der cz′ parallel; wenn nein, muss erstere durch das Schräubchen z verbessert werden. Bei der dritten Untersuchung stellt man die Seiten $zz_{,}$ und z′c des auf eine Nivellirlatte gerichteten Fernrohrs mit der Libelle horizontal und liest ab; hierauf wendet man das Fernrohr um, indem man es in der vorigen Richtung auf die Punkte c, z′ legt, wodurch es um seine Axe gedreht erscheint, und sieht zu, ob die Visirlinie wieder den vorigen Punkt der Latte trifft. Geschieht diess, so ist die Absehlinie den Linien $zz_{,}$, cz′ parallel; geschieht es nicht, so muss durch die Schräubchen a, a′ des Fadenkreuzes geholfen werden. In welchem Sinne dieselben zu bewegen sind, kann man sich leicht selber klar machen.

Das Nivellirinstrument von Stampfer und Starke.

§. 220. Die Beschreibung dieses Instruments haben wir bereits früher geliefert, als wir es in den §§. 188 bis 192 als Distanz- und Winkelmesser betrachteten. Ebendaselbst wurde seine Prüfung und Berichtigung nicht bloss für diese beiden Zwecke sondern auch für das Nivelliren beschrieben. In diesen Beziehungen haben wir den früheren Beschreibungen Nichts mehr beizufügen, aber über seine Anwendung als Nivellirinstrument ist noch Einiges zu sagen.

Das Stampfer'sche Nivellirinstrument unterscheidet sich von allen anderen wesentlich dadurch, dass man nicht bloss auf die gewöhnliche Weise mittels horizontaler Absehlinien, sondern auch auf aussergewöhnliche Weise mittels

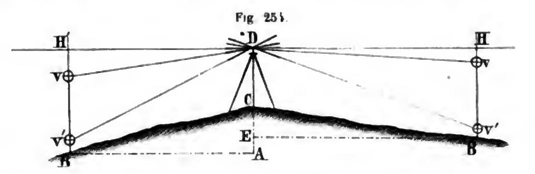
Fig. 253.



geneigter Visirlinien nivelliren kann. Diese besondere Methode, welche sich auf die Anwendung der mit grösster Sorgfalt gearbeiteten Mikrometerschraube des Instruments gründet, gewährt in manchen Fällen Vortheile, welche kein anderes Instrument darbieten kann; dann nämlich, wenn es sich um vorläufige Nivellements in sehr durchschnittenem Terrain, um Aufnahme von Schichtenlinien oder Horizontalcurven u. dergl. handelt; mit anderen Worten: wenn man in stark geneigtem und rasch wechselndem Terrain mit dem Nivelliren das Distanzmessen verbinden will und von beiden nicht den höchsten Grad der Genauigkeit fordert.

Um von der Stampfer'schen Nivellirmethode einen Begriff zu geben, nehmen wir zunächst an, es handle sich darum zu bestimmen, wie tief der Punkt B in Fig. 254 unter der Horizontalebene DH, welche durch die optische Axe des Fernrohrs geht, liege. In B sey die in §. 188 beschriebene

Fig. 254.



Distanzlatte mit den beiden Scheiben v, v', welche genau um die Grösse d von einander abstehen, lothrecht aufgestellt. Auf diese Latte richte man das Fernrohr so, dass man sie ganz deutlich erkennen kann. Hierauf bringe man die Libelle zum Einspielen und lese den Stand der Mikrometerschraube an der Scala g und der Trommel t ab. Diese Ablesung heisse h. Nun visire man die obere Scheibe v genau in der Mitte an und lese an der Schraube wieder ab: die Ablesung sey o. Dasselbe thue man mit der unteren Scheibe, für welche die Ablesung mit u bezeichnet werden mag. Wegen der Kleinheit der Winkel α und β verhalten sich diese erstens wie die ihnen gegenüberliegenden Seiten vv' und v'H, und zweitens wie die Anzahl der Schraubengänge. Nun hat aber die Schraube, um den Winkel α zu durchlaufen, o — u und um β zu durchlaufen h — u Umgänge gemacht; daher ist, wenn man $vv' = d$ und $v'H = z$ setzt:

$$z = d \cdot \frac{h - u}{o - u}.$$

Fügt man zu dieser Grösse noch den unveränderlichen Abstand $Bv' = \lambda$, so ist die gesuchte Höhe $BH = z + \lambda$. Will man den Höhenunterschied zweier beliebiger Punkte B und B' finden, so erhält man für den zweiten Punkt B', wenn er von dem ersten Standpunkte des Instruments aus einnivellirt wird, und h, o', u' die neuen Ablesungen an der Schraube und z', λ die Abstände des Punktes B' von der Horizontalebene DH' und der unteren Scheibe bezeichnen:

$$z' = d \cdot \frac{h - u'}{o' - u'}$$

und $B'H' = z' + \lambda$. Der Höhenunterschied zwischen den beiden Punkten B und B' ist nun offenbar gleich

$$z + \lambda - (z' + \lambda) = z - z' = d\left(\frac{h - u}{o - u} - \frac{h - u'}{o' - u'}\right). \quad . \quad (171)$$

Kennt man die Höhe i des Instruments in C, so ist auch die Höhenlage dieses Punktes gegen B und B' bekannt, indem sie für $B = BH - CD = z + \lambda$ i und für $B' = B'H' - CD = z' + \lambda - i$ ist. Nicht minder kennt man die Horizontalabstände e und e' von BC und B'C, da nach Gleichung (158)

$$e = \frac{k\,d}{o - u} \quad \text{und} \quad e' = \frac{k\,d}{o' - u'}$$

ist, wobei k die Zahl 324 vorstellt.

Diese Andeutungen über den Gebrauch des Stampfer'schen Nivellirinstruments mögen hier, wo es sich vorläufig nur um die einfachsten Messoperationen handelt, genügen; weitere Erörterungen darüber müssen wir der Lehre von den Messungen vorbehalten.

Barometer.

§. 221. Es ist bekannt, dass das Barometer den Druck der atmosphärischen Luft durch die Höhe einer Quecksilbersäule angibt, welche mit diesem Drucke im Gleichgewichte steht. Ebenso ist bekannt, dass sich der Druck einer schweren Flüssigkeit auf ihre Unterlage mit der lothrechten Höhe der Flüssigkeitssäule ändert. Hieraus ist zu schliessen, dass sich auch der Luftdruck von einem Orte A zu einem anderen B, um den Druck einer Luftschichte ändere, welche den Höhenunterschied beider Orte zur Dicke hat, und dass folglich die Länge der Quecksilbersäule des Barometers in einer bestimmten mathematischen Beziehung zu der Höhe des Ortes stehe, an welchem das Barometer beobachtet wurde. Diese Beziehung ist keineswegs einfach, sondern ziemlich verwickelt, da es verschiedene Einflüsse gibt, welche den Druck der Luft und die Länge der Quecksilbersäule abändern. Eine genaue Messung muss allen diesen Einflüssen Rechnung tragen und es geschieht dieses bei der Entwickelung der sogenannten Barometerformel. Wir haben es hier zwar noch nicht mit dieser Entwickelung zu thun, wohl aber müssen wir jetzt schon wissen, welche Einflüsse bei barometrischen Höhenmessungen zu berücksichtigen sind, weil hievon sowohl die Einrichtung als der Gebrauch des Barometers abhängt. Als ein Ergebniss der Theorie und Erfahrung führen wir daher an, dass auf die Berechnung des Höhenunterschieds zweier Orte aus Barometerbeobachtungen Einfluss haben:

1. Die Temperatur sowohl des Quecksilbers und des Massstabes als der das Barometer umgebenden atmosphärischen Luft; darum müssen diese Temperaturen durch besondere Thermometer gemessen werden.

2. Die Feuchtigkeit der Luft. Diese wird zwar in der Regel nicht besonders bestimmt, sondern nur nach einem gewissen arithmetischen Mittel in die Höhenformel aufgenommen; sie lässt sich indessen ohne grosse Mühe nach ihrer wahren Grösse, welche das Psychrometer angibt, berücksichtigen.

3. Die Schwerkraft. Da diese vom Aequator gegen die Pole hin zunimmt, so kann ihr Einfluss nur dann gehörig gewürdigt werden, wenn man die geographische Breite der Beobachtungsorte (wenn auch nur annähernd) kennt.

4. Die Capillarität. Die gegenseitige Anziehung des Glases und Quecksilbers hat die bekannte Erscheinung zur Folge, dass die Oberfläche des letzteren in Barometerröhren immer etwas tiefer steht, als sie den übrigen einwirkenden Kräften nach stehen würde. Dieser Höhenunterschied, welcher die Capillardepression des Quecksilbers heisst, muss zu der beobachteten Länge der Quecksilbersäule in jedem Schenkel des Barometers addirt werden, wenn jene Anziehung genügend gewürdigt werden soll. Die nachfolgende von Schleiermacher und Eckhardt nach der Formel von Laplace[1] berechnete Tafel gibt die Capillardepressionen in Millimetern an, wenn man die Weite der Barometerröhre und die Höhe der Wölbung der Quecksilberoberfläche ebenfalls in Millimetern gemessen hat. Diese Wölbungshöhe muss darum bei jeder Höhenmessung beobachtet und aufgezeichnet werden, während die Weite der Röhre ein für allemal bei Anfertigung des Barometers bestimmt wurde.

Durchmesser.	Höhe der Wölbung der Quecksilberoberfläche										
Millimeter	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1.6	1,8	2,0
1	1,262	2.450	4,377	5,581	6,098	6,171	—	—	—	—	—
2	0.299	0,595	1.152	1,643	2,037	2,338	2,541	2,658	2,681	2,699	2,712
3	0,121	0,242	0.476	0,695	0,839	1,066	1,206	1,316	1,397	1,449	1,473
4	0.068	0.120	0,240	0,354	0.460	0,546	0,580	0,702	0.758	0,805	0,838
5	0,034	0.069	0,138	0,205	0,247	0,299	0,308	0,390	0,428	0,468	0,476

Hat man z. B. in einem Heberbarometer, den Fig. 255 vorstellen mag, und dessen langer Schenkel (bc) 2^{mm} weit ist, während der kurze (d′n′) 3^{mm} misst, die Höhe der Wölbung im langen Schenkel = mn = $0{,}4^{mm}$ und im kurzen = m′n′ = $1^{mm}{,}4$ gefunden, so ist die Depression δ für den ersten Schenkel nach der Tabelle = $1^{mm}{,}152$ und für den zweiten $\delta' = 1^{mm}{,}316$. War der direct abgelesene Barometerstand zwischen den Quecksilberoberflächen m′ und b = bc = l, so ist der von der Capillardepression befreite Barometerstand b′c′ = l′ aus der Gleichung $l' + \delta' = l + \delta$ zu finden, welche $l' = l + \delta - \delta' = l + 1{,}152 - 1{,}316 = l - 0{,}164$ Millimeter liefert. In

[1] Eine ausführlichere, von Delcros nach der Formel von Schleiermacher berechnete Tafel der Depressionen befindet sich unter Nr. VII im Anhange dieses Buches.



Fig. 255.

einem Gefässbarometer ist wegen der Weite des Gefässes $\delta' = o$ und daher $l' = l + \delta$, d. h. man hat hier jederzeit nur die Depression δ zu dem beobachteten Barometerstande l zu addiren.

Es gibt, wie Jeder weiss, verschiedene Arten von Barometern; hier genügt die Beschreibung einiger zum Höhenmessen eingerichteter Reisebarometer.

Das Fortin'sche Reisebarometer.

§. 222. Als Reisebarometer werden sowohl Heber- als Gefässbarometer benützt; das, welches wir zuerst betrachten wollen, ist ein von Fortin in mehreren Theilen verbessertes Gefässbarometer. Fig. 256 stellt eine etwas verkürzt gezeichnete Ansicht dieses Barometers in dem Zustande vor, worin die untere Gefässhülse (h) abgeschraubt und durchschnitten ist, während Fig. 257 einen Durchschnitt des Gefässes in der Stellung zeigt, bei welcher die untere Quecksilberoberfläche gerade den Nullpunkt des Massstabs berührt.

Das Gefäss besteht aus einem 15 Linien weiten und 12 Linien hohen, an seinen Rändern eben abgeschliffenen senkrechten Glascylinder (c), welcher oben mit einem genau schliessenden metallenen Deckel (d) und unten mit einem hohlen Cylinder (b) von Buchsbaumholz vereinigt ist; den Boden desselben bildet ein an dem Umfange des Cylinders b angebundener und festgeleimter Beutel (a) von Handschuhleder. Den oberen Theil des Holzcylinders umgibt ein angekitteter Messingring (e), welcher die doppelte Bestimmung hat, erstens die Verbindung der Glas- und Holzcylinder fester zu machen und zweitens zur Aufnahme der Gefässhülse (h) zu dienen. Durch den in der Mitte verstärkten Boden dieser Hülse dringt eine Schraube (f) mit abgerundetem Kopfe, welcher den Beutel und mit ihm die Oberfläche des Quecksilbers hebt und senkt. Der Beutel kann für den Transport so weit gehoben werden, dass er dicht an dem unteren Ende (n) der Barometerröhre ansteht; in diesem Falle füllt das Quecksilber den Gefässraum vollständig aus. Dabei versteht sich von selbst, dass man vorher das Rohr so weit geneigt hat als nöthig war, es ganz mit Quecksilber auszufüllen. Die Luft, welche sich bei gesenktem Quecksilber in dem Gefässe befand, ist durch eine im Deckel d befindliche kleine Oeffnung ausgetreten, welche beim Transporte des Barometers mit einer Schraube (s) quecksilberdicht geschlossen werden kann.

Die Barometerröhre ist in dem Gefässdeckel, der zu grösserer Festigkeit mit dem Ringe e durch kleine Bolzen (g,g) verbunden ist, mittels einer sie umgebenden Metallhülse (i) eingeschraubt und festgekittet. An den oberen Theil dieser Hülse wird ein Messingrohr (r) geschraubt, das



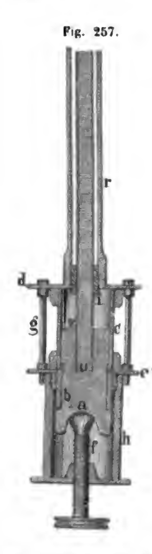
Fig. 256.

die Barometerröhre nach ihrer ganzen Länge umschliesst und an seiner Seite das Thermometer (t) trägt, welches die Temperatur des Quecksilbers misst. Das Messingrohr ist zum Schutze der Glasröhre innwendig mit Leder gefüttert und oben, wo sich der Massstab befindet, auf zwei entgegengesetzten Seiten in einer Länge (r'r') von etwa 18 Zollen soweit ausgeschlitzt als nöthig ist, um den Stand des Quecksilbers genau beobachten zu können. Hiezu dient erstens der Massstab (m), welcher sich auf einer Seite der eben genannten Schlitze befindet, und zweitens der Nonius (n), welcher sich längs desselben verschieben lässt. Dieser Nonius ist auf eine Messinghülse (k) gezeichnet, welche an dem Rohre r mit einiger Reibung auf und ab geschoben aber nicht gedreht werden kann. Die Hülse k hat wie das Rohr r und an der gleichen Stelle wie dieses zwei Längenspalten (o,o), deren obere Ränder (v,v) in einer zur Barometerröhre senkrechten Ebene liegen und dazu dienen, die Oberfläche der Quecksilberkuppe anzuvisiren. Zur feinen Einstellung der Randebene v,v auf die Kuppenoberfläche (o) dient eine mit der Hülse verbundene Mikrometerschraube, deren geränderter Kopf in Fig. 256 mit p bezeichnet ist.

Den Nullpunkt des Massstabes bildet die feine Spitze eines in den Gefässdeckel d eingeschraubten Stiftes z von Elfenbein; mit dieser Spitze muss beim Messen die Oberfläche des im Gefässe befindlichen Quecksilbers durch die Schraube f zur genauesten Berührung gebracht werden. Diese Einstellung wird etwas erschwert und folglich auch ein wenig unsicher, sobald das Quecksilber seinen Glanz verloren hat. Der Nullpunkt des Nonius liegt selbstverständlich in der Ebene der mit v,v bezeichneten Ränder der Spalten in der Hülse k. Die Theilung des Massstabs geschieht entweder im Meter- oder altfranzösischen Fussmasse.

Zum Aufhängen des Fortin'schen Reisebarometers dient ein Gestelle (Fig. 258) mit drei beweglichen Füssen, die sich in Scharniren drehen und mit eisernen Spitzen auf dem Boden feststellen lassen. Zur weiteren Sicherung ihres Standes sind drei mit Hacken versehene Drähte (w,w) vorhanden, welche in die Beine eingehängt werden. Diese Füsse sind ausgehöhlt, um den längeren Theil des Barometers in sich aufzunehmen, wenn sie geschlossen werden. Der Kopf des Stativs enthält ein Universalgelenk, welches gestattet, dass das Barometer eine

Fig. 257.



lothrechte Lage annimmt, sobald es mit seiner Horizontalaxe x, x (Fig. 256) in dasselbe eingehängt wird. Wenn das Barometer in das Gestelle eingepackt ist, so ragt oben noch ein Theil des ersteren über das letztere hervor. Um auch diesen Theil des Barometers gehörig zu schützen, wird darüber eine Kapsel gesteckt, welche bis an den Stativkopf reicht. Die Füsse des Gestelles werden an ihrem unteren Ende durch einen übergeschobenen Ring zusammengehalten. Die nunmehr etwa anderthalb Zoll dicke Hülle des Barometers wird in ein Lederfutteral geschoben und damit transportirt.

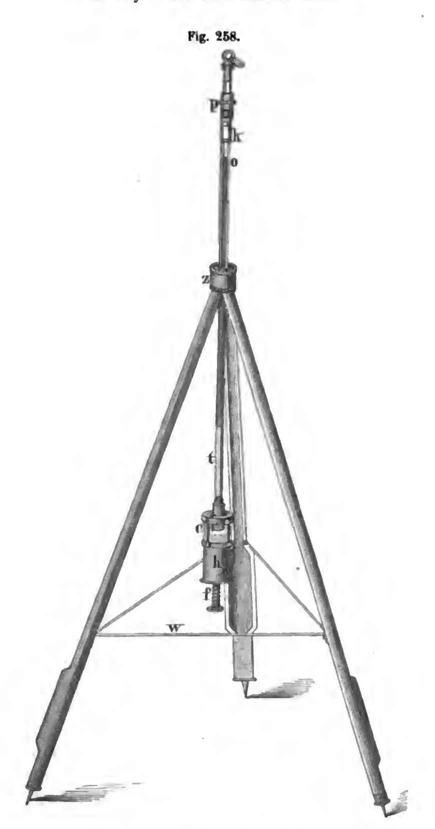
Das Gay-Lussac'sche Reisebarometer.

§. 223. Wenn die Heberbarometer, zu denen das Gay-Lussac'sche gehört, mit einer Vorrichtung zum Abschliessen der Quecksilbersäule und der atmosphärischen Luft versehen sind, so eignen sie sich wegen ihrer Leichtigkeit und compendiösen Form vorzugsweise zu Reisebarometern. Die Fig. 259 und 260 stellen ein solches Barometer in der Ansicht und im Längendurchschnitte dar. Dasselbe ist von dem rühmlich bekannten aber leider vor Kurzem gestorbenen Mechaniker Greiner dahier und entspricht seinem Zwecke vollkommen; denn es vereinigt die von Gay-Lussac und Bunten herrührenden Verbesserungen auf die zweckmässigste Weise mit allen übrigen Anforderungen, die man an ein Reisebarometer billigerweise stellen kann. Wir bemerken zunächst, dass die beigedruckten Figuren im Verhältniss zur Länge etwas zu breit sind und zwar desshalb, weil sonst die Deutlichkeit der Zeichnung beeinträchtigt worden wäre. Ferner schicken wir die Bemerkung voraus, dass das Barometer in einem hölzernen mit Leder gefütterten und überzogenen Futterale steckt, dessen beide Theile (acd, acb) halbe Cylinder sind und sich um ein Scharnir (ac) drehen können. Wenn das Futteral zusammengelegt und mit den Häckchen b, b verschlossen ist, so bildet es einen Stock von 3 Fuss Länge und $1^1/_2$ Dezimalzoll Dicke, welcher sehr leicht getragen werden kann.

Die einzelnen Theile des in Rede stehenden Barometers sind am leichtesten aus dem Durchschnitte (Fig. 260) zu erkennen.

Die Barometerröhre (eki) ist nach der Angabe von Gay-Lussac zwischen den Stellen f und h stark verengt und bei f mit der Bunten'schen Versicherung (n) versehen. Die Verengerung der Röhre hat zunächst den Zweck, die Luft auf längere Zeit aus dem langen Schenkel oder der Toricelli'schen Leere (er) abzuhalten; durch die Vorrichtung von Bunten aber wird der Eintritt von Luft in die genannten Räume für immer verhindert. Zieht man nämlich die enge Röhre zwischen h und f an ihrem unteren Ende bei f zu

Fig. 258.



einer noch engeren Spitze n aus und schmilzt sie mit der weiteren so zusammen wie der Durchschnitt zeigt, so werden allenfallsige Luftblasen, die an der Spitze bei n ankommen, wegen der Kleinheit der Oeffnung dieser Spitze nicht in die enge Röhre, sondern in den Raum zwischen der weiteren Röhre f und der in ihr befindlichen Spitze n eintreten und folglich nicht in den langen Schenkel gelangen. Die eben beschriebenen Einrichtungen verhindern ausserdem noch, dass, wenn man das obere Ende des Barometers rasch neigt, das Quecksilber stark gegen den oberen Theil des

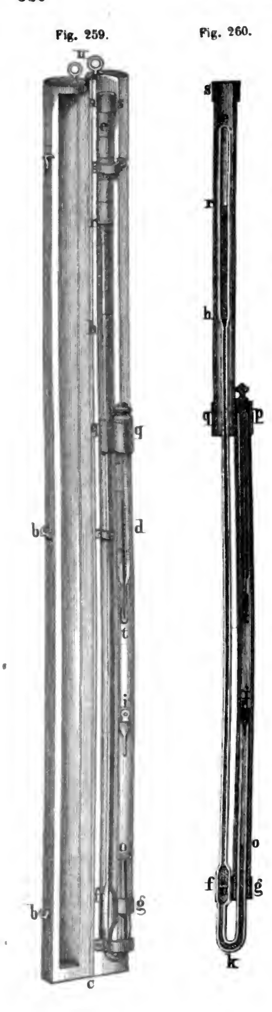


Fig. 259.

Fig. 260.

langen Schenkels schlägt, indem es weniger schnell von dem kurzen in den langen Schenkel übergehen kann.

Der kurze Schenkel ist an seinem freien Ende (i) in ähnlicher Weise abgeschlossen, wie er an dem anderen Ende mit dem langen Schenkel verbunden ist. Es reicht nämlich auch hier nur eine feine hohle Spitze (i) in die Röhre, welche wohl der Luft Zutritt zum Quecksilber, aber diesem keinen Austritt in die Luft gestattet. Auf diese Weise ist die Quecksilbersäule während des Transports hinreichend befestigt und bedarf es hiezu keines weiteren Abschlussmittels mehr.

Man bemerkt an der Fig. 260, dass der kurze Schenkel wie der obere Theil des langen Schenkels mit einer Glasröhre umgeben ist, und dass in dem unteren Theile p g ein Thermometer (t) steckt. Dieses Thermometer dient zur Bestimmung der Temperatur des Quecksilbers, während ein zweites mit dem Barometer nicht verbundenes frei in der Luft aufgehängt wird, um auch deren Temperatur zu messen. Die Röhrenstücke p g und q s sind zwischen p und q fest verbunden und lassen sich gemeinschaftlich und parallel mit den Schenkeln verschieben. Dieses Schieben hat den Zweck, eine bei o befindliche Marke der äusseren Röhre auf den Quecksilberspiegel in dem kurzen Schenkel genau einzustellen und so den Anfangspunkt der zu messenden Quecksilbersäule zu bezeichnen. Der Abstand des Endpunktes bei r ergibt sich alsdann aus der Ablesung der Scala, welche sich auf dem oberen Röhrenstücke zwischen q und s befindet. Der Vortheil dieser verschiebbaren Scala liegt darin, dass man nur einmal abzulesen braucht, und der Vortheil eines gläsernen Massstabes ist, dass sich die Theilung nur halb so stark ausdehnt als wenn sie auf Messing sich befände. Bei vielen Messungen braucht man ebendesshalb gar keine Rücksicht auf die Aus-

dehnung des Glasmassstabs zu nehmen. Es versteht sich von selbst, dass die Verschiebung und Einstellung der äusseren Röhre mit aller Behutsamkeit geschehen muss, und dass das eben beschriebene Barometer bei Beobachtungen an freiliegenden Punkten ebenso wie das von Fortin an einem dreibeinigen und nach Fig. 258 eingerichteten Gestelle aufgehängt werden kann.

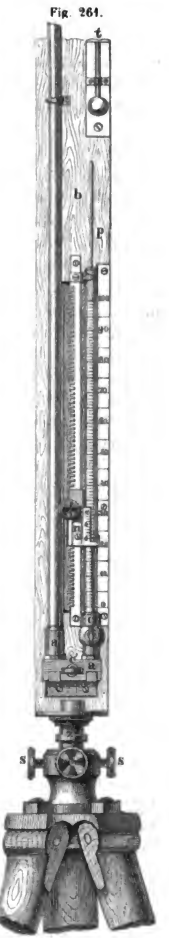


Fig. 261.

Das Rath'sche Reisebarometer.

§. 224. Die drei Barometer, deren sich der Verfasser im August 1857 zur Ausführung der in der Vorrede und in dem Abschnitte über barometrisches Höhenmessen erwähnten Beobachtungen im bayerischen Hochgebirge bediente, wurden von dem Mechaniker Peter Rath in München nach dem Muster der von dem k. bayerischen topographischen Bureau verwendeten Reisebarometer neu angefertigt. Die Schenkel eines jeden dieser Barometer sind gleichweit und besitzen die Gay-Lussac'sche Sicherheitsvorrichtung nicht. Dagegen sind sie nach Fig. 261 durch eine eiserne Röhre (a, a) verbunden, welche während der Reise durch zwei Hahnen oder Wechsel (c, c') von demselben Metalle abgeschlossen werden kann. Die Theilung ist auf die Glasröhren geätzt, die Bezifferung aber daneben auf schmale Messingstreifen gravirt, welche mit den Röhren und dem Thermometer (t) auf einem halbcylindrischen Stabe (b) von Nussbaumholz befestigt sind. Ein hohler Halbcylinder aus demselben Holze, der mit dem genannten Stabe durch Messingringe fest verbunden werden kann, deckt das Barometer, wenn es eingepackt werden soll. Zum Transport dient ein Lederfutteral, das sich wie ein Gewehr umhängen lässt, und worin sich auch das Thermometer für die Luft und ein Senkel zum Aufstellen des Barometers befindet.

Die lichten Weiten der Röhren unserer drei Barometer sind bei Nr. 1 = 4^{mm},69, bei Nr. 2 = 5^{mm},44 und bei Nr. 3 = 5^{mm},49. Die unmittelbare Theilung der Scalen gibt Pariser Duodezimallinien, die Nonien theilen diese in Zehntel ab und Hundertel können geschätzt werden. Mit den Nonien (n,n) sind Diopterfäden verbunden, die mit Hilfe des Spiegelbilds, das sich von ihnen in der Röhre erzeugt, ganz scharf auf den Rand der Quecksilbersäulen eingestellt werden können.

Die Aufstellung des Barometers geschieht auf einem dreibeinigen Stative, an dessen beweglichen Vertikalzapfen (z) das Barometer fest angeschraubt werden kann. Dieser Zapfen dreht sich in gleicher Weise wie jener der Ertel'schen Feldbussole (§. 122, Fig. 129) in einem Kugelgelenke der ihn umschliessenden Messingbüchse, sobald man je zwei der auf ihn drückenden vier Stellschrauben (s, s) wirken lässt. Mit Hilfe dieser Schrauben und des am oberen Ende des Stabes b zu befestigenden feinen Senkels geschieht die lothrechte Aufstellung des Instruments in wenigen Sekunden. Wir halten diese Aufstellung für besser als die in Fig. 256 dargestellte, weil erstens wegen der grösseren Entfernung die Wärmestrahlung des Bodens weniger ungleich auf das Barometer und Thermometer wirkt, und weil zweitens das Ablesen, namentlich am untern Nonius, wesentlich erleichtert ist. Dabei versteht sich, dass das Gestelle nur so hoch seyn darf, dass man auch den oberen Nonius (allenfalls mit Hilfe einer Unterlage) bequem beobachten kann.

§. 225. **Prüfung der Barometer.** Die Genauigkeit der beobachteten Barometerstände ist unmittelbar abhängig von der Genauigkeit der Scalen, an denen man sie abliest. Es ist daher auf deren Prüfung zunächst alle Sorgfalt zu verwenden. Dieses kann mit einem Kathetometer oder in Ermangelung desselben mit einer als vorzüglich bekannten Längentheilmaschine geschehen. Wir benützten die des mechanischen Instituts von Ertel und Sohn dahier.

Mehrmals wiederholte Vergleichungen zeigten, dass die Theilungen unserer drei Rath'schen Barometer zwischen den Theilstrichen 0 und 100, sowie zwischen 250 und 350 sehr gut und die aufgefundenen Differenzen so gering sind, dass sie füglich als Beobachtungsfehler angesehen werden können, da sie nirgends die Dicke eines Theilstriches erreichen. Anders aber verhält es sich mit dem Abstande von 100 auf 250, welcher zu Ablesungen nicht benützt wird, daher ungetheilt, zugleich aber so gross ist, dass ihn die Rath'sche Theilmaschine nicht unmittelbar angeben kann. Die Zusammensetzung dieses Abstandes von 150''' Länge aus zwei Theilen veranlasste einige Fehler, welche wir wie folgt fanden:

Barometer Nr. 1 $= 150{,}003 - 150 = +\,0''',003$;
„ Nr. 2 $= 150{,}160 - 150 = +\,0''',160$;
„ Nr. 3 $= 150{,}080 - 150 = +\,0''',080$;

Die Differenz bei Nr. 1 kann als Beobachtungsfehler angesehen werden, wogegen aber alle an Nr. 2 und 3 abgelesenen Barometerstände beziehungsweise um 0''',16 und 0''',08 zu klein und folglich um diese Grösse zu vermehren sind.

Nächst der Prüfung der Scalen ist eine Vergleichung der Barometer mit einem Normalbarometer erforderlich. Unsere drei Instrumente wurden, der Bitte ihres Verfertigers gemäss, vor der Ablieferung am 15. August 1857 auf der k. Sternwarte zu Bogenhausen mit dem daselbst befindlichen Normalbarometer von Vaccano verglichen. Vor jeder der nachfolgend verzeichneten Beobachtungen wurde das Normalbarometer jedesmal erschüttert, die

Reisebarometer aber geneigt und erschüttert. Temperaturen sind nicht angegeben und die Depressionen als gleich angenommen. Wären diese berücksichtigt, so würden die in der Tafel enthaltenen Differenzen (bei denen jedoch die Scalencorrection berücksichtigt ist) wahrscheinlich kleiner seyn.[1]

Vergleichung der Barometer mit dem Normalbarometer der Sternwarte.

Nr.	Normal-Barometer.	Barometer Nr. 1.		Barometer Nr. 2.		Barometer Nr. 3.	
		Stand + 0''',00.	Diff.	Stand + 0''',16.	Diff.	Stand + 0''',08.	Diff.
⋮	'''	'''	'''	'''	'''	'''	'''
4	316,01	336,62 — 20,70	+ 0,09	330,68 — 14,90	+ 0,07	338,42 — 22,55	+ 0,06
5	315,95	336,70 — 20,72	— 0,03	330,60 — 14,85	+ 0,04	338,48 — 22,55	— 0,06
6	315,85	336,58 — 20,82	+ 0,09	330,58 — 14,98	+ 0,09	338,40 — 22,52	— 0,11
⋮		⋮		⋮		⋮	
Mittel:	315,90	315,89	+ 0,01	315,85	+ 0,05	315,97	— 0,07

Da die Barometer durch die Reise beschädigt werden können, so muss man sie auch vor und nach einer Messung unter sich vergleichen. Wir haben dieses mit unseren drei Instrumenten am 17. und 29. August 1857 gethan und dabei die Theilungsfehler, Temperaturen und Depressionen in der Weise berücksichtigt, wie es §. 226 verlangt. Die Ergebnisse dieser beiden Vergleichungen sind nachstehend verzeichnet, erstens, um darzuthun, dass man hiebei die Temperaturen und Depressionen nicht unberücksichtigt lassen darf, und zweitens, um einen Ueberblick der einzelnen Abweichungen zu geben. Die Differenzen beziehen sich auf das Mittel der reducirten Barometerstände.

Vergleichung der Barometer vor dem Gebrauche.
Am 17. August 1857.

Nr.	Barometer Nr. 1.				Barometer Nr. 2.				Barometer Nr. 3.			
	Stand.	Temp.	Reduct.	Diff.	Stand.	Temp.	Reduct.	Diff.	Stand.	Temp.	Reduct.	Diff.
	'''	0	'''	'''	'''	0	'''	'''	'''	0	'''	'''
1	307,00	12,4	306,99	+ 0,05	307,06	12,5	307,05	— 0,01	307,05	12,3	307,05	— 0,01
2	306,99	12,5	306,98	+ 0,06	307,02	12,3	307,02	+ 0,02	307,13	12,6	307,11	— 0,07
3	307,00	12,4	306,99	+ 0,05	307,08	12,5	307,06	— 0,02	307,13	12,7	307,10	— 0,06

[1] Es sind zehn Beobachtungen gemacht, aber nur drei aufgeführt worden, weil es sich hier mehr um die Form als die Ergebnisse der Vergleichung handelt.

Vergleichung der Barometer nach dem Gebrauche.
Am 29. August 1857.

Nr.	Barometer Nr. 1.				Barometer Nr. 2.				Barometer Nr. 3.			
	Stand.	Temp.	Reduct	Diff.	Stand.	Temp.	Reduct	Diff.	Stand.	Temp	Reduct.	Diff.
	'''	0	'''	'''	'''	0	'''	'''	'''	0	'''	'''
1	310,22	13,3	310,22	— 0,04	310,30	13,8	310,27	— 0,09	310,20	13,5	310,19	— 0,01
2	310,12	13,3	310,12	+ 0,06	310,27	13,5	310,25	— 0,07	310,20	13,3	310,20	— 0,02
3	310,24	13,8	310,20	— 0,02	310,25	14,0	310,20	— 0,02	310,19	13,7	310,16	+ 0,02

§. 226. **Gebrauch des Barometers.** Hier kann es sich nur darum handeln, zu erklären, wie das Reisebarometer aus- und eingepackt, aufgestellt, abgelesen und der auf 0° reducirte Barometerstand hergestellt wird. Weitere Regeln gehören in die Lehre von den barometrischen Höhenmessungen und werden am betreffenden Orte gegeben.

An der Beobachtungsstation wird zunächst ein grosser Sonnenschirm und unter diesem ein Stativ für das Barometer so befestigt, dass sie allenfallsigen heftigen Windstössen widerstehen. Hierauf nimmt man das in einer hölzernen Schale verwahrte Barometer aus dem Lederfutterale, legt es wagrecht nieder, zieht die beide Theile der Hülle festhaltenden Ringe ab und löst die obere Schale von der unteren. Alsdann hält man das Instrument mit der linken Hand in schräger Richtung so, dass der kurze Schenkel über dem langen liegt, zieht den Pfropf (p) im kurzen Schenkel um einige Zolle zurück, klopft mehrmals auf das untere Ende des Barometers, öffnet hierauf den daselbst befindlichen Hahnen oder Wechsel, klopft abermals, indem man gleichzeitig das Barometer der lothrechten Stellung nähert, und öffnet nunmehr auch den obern Wechsel. Sobald das vorher abgeschlossene Quecksilber in den kurzen Schenkel eingetreten ist, schraubt man das Instrument auf das Stativ und gibt ihm mit Hilfe des Senkels die lothrechte Stellung, wobei zu verhüten ist, dass die Senkelbirne auf das Glas schlägt.

Das Einpacken des Barometers beginnt mit der Einschiebung des Pfropfens in den kurzen Schenkel bis nahe an den Quecksilberspiegel. Hierauf folgt die Abnahme des Instruments vom Stativzapfen, die Neigung des Barometers bis zum Anschlagen des Quecksilbers an dem oberen Ende des langen Schenkels, ein Klopfen mit der Hand am unteren Ende des Schafts, der Verschluss der beiden Hahnen, schliesslich das Auflegen und Befestigen der Holzschale und das Einschieben des Instruments in das Lederfutteral, wobei das obere Ende des langen Schenkels nach unten gerichtet ist.

Ist das Einpacken bei niedriger Temperatur geschehen, und steigt diese während der Reise bedeutend, so wird der Ausdehnung des Quecksilbers dadurch Rechnung getragen, dass man bei schräger Haltung des Barometers

und unter stetem Klopfen zuerst den untern und dann den obern Wechsel öffnet, sogleich aber auch beide wieder verschliesst. Ebenso verfährt man, wenn nach dem Einpacken die Temperatur sehr stark gesunken ist, um das Luftbläschen, das durch den untern Wechsel in den durch das Zusammenziehen des Quecksilbers frei gewordenen Raum eingedrungen ist, sofort zu entfernen. Hieraus erklärt sich auch, warum das abgeschlossene Barometer stets verkehrt, d. i. das obere Ende abwärts, getragen werden muss.

Wenn das aufgestellte Barometer einige Zeit frei gestanden und die Zeit einer Beobachtung gekommen ist, so liest man zuerst das am Instrumente befindliche Thermometer ab, um die Temperatur des Quecksilbers zu erfahren. Ein späteres Ablesen ist weniger gut, weil während der Einstellung und Ablesung der Nonien die Körperwärme des Beobachters auf das Thermometer wirkt. Nachdem diese Temperatur aufgezeichnet ist stellt man mittels der Schraube die an den Nonien angebrachten Diopterfäden genau auf den Rand der Quecksilberkuppen ein, liest beide Nonien ab und zeichnet die Ablesungen auf. Bei dem Einstellen der Diopter soll man senkrecht auf die Barometerröhren sehen, was der Fall ist, sobald die Theilstriche auf den Röhren ihre eigenen Spiegelbilder decken. Schliesslich werden die Fäden auch noch auf die höchsten Punkte der Quecksilberkuppen eingestellt und beide Nonien abgelesen, wodurch man die Höhen dieser Kuppen erfährt.

Gewöhnlich bestimmt man den Barometerstand aus den Einstellungen auf die Kuppenscheitel; die Ableitung desselben aus der Einstellung auf den Rand der Kuppen hat aber nach unserer Meinung den Vorzug, dass die Operation in kürzester Zeit und folglich ohne alle Mittheilung von Körperwärme an das Barometer geschehen kann, während das Einstellen auf den Scheitel der Kuppen unsicher und zeitraubend ist. Misst man dagegen die Kuppenhöhe für sich, so schadet es dem Barometerstande gar Nichts, wenn man sich dabei etwas länger vor dem Instrumente aufhält. Ueberdiess braucht man diese Höhen auch, um die Depressionen des Quecksilbers nach der auf S. 345 mitgetheilten Tafel zu finden.

Fig. 262.



Die beigedruckte Fig. 262 zeigt, wie die Kuppenhöhen und Depressionen in Rechnung zu bringen sind. Ist nämlich $en = B'$ der an den Rändern abgelesene Barometerstand, und setzt man die Depression in dem langen Schenkel $dm = \delta$, in dem kurzen $d'm' = \delta'$, die Kuppenhöhe $mn = k$ und $m'n' = k'$, so ist der wahre Barometerstand

$$B = b'c' = en + dn - d'n'$$

und, da $en = B'$, $dn = \delta + k$, $d'n' = \delta' + k'$, auch

$$B = B' + k - k' + \delta - \delta'. \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

An unseren drei Barometern fanden in der Zeit vom 20. bis 28. August 1857 im Mittel aus je 32 Messungen folgende Werthe der Kuppenhöhen und Depressionen statt:

Barometer:	k.	k'.	$\delta - \delta'$.
Nr. 1 ...	0''',335	0''',435	— 0''',140
Nr. 2 ...	0,394	0,497	— 0,101
Nr. 3 ...	0,347	0,442	— 0,102.

Hiernach erhält man mit Rücksicht auf die Scalencorrection für diese drei Instrumente die folgenden, von der Capillardepression befreiten Barometerstände:

$$B_1 = B' + 0{,}00 - 0''',10 - 0''',14 = B' - 0''',24;$$
$$B_2 = B'' + 0{,}16 - 0{,}10 - 0{,}10 = B'' - 0{,}04;$$
$$B_3 = B''' + 0{,}08 - 0{,}10 - 0{,}10 = B''' - 0{,}12;$$

und damit den auf 0° reducirten Barometerstand:

$$B_0 = \frac{B}{1 + \gamma t} = B(1 - \gamma t), \quad \ldots \ldots \quad (173)$$

wobei γ den Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers für 1° der Scala bezeichnet, in welcher die Temperatur t ausgedrückt ist, nämlich $1/_{5550}$ für 1° C und $1/_{4440}$ für 1° R.

§. 227. **Noch zwei Correctionen.** 1) Wenn man die Barometerstände sehr genau finden will, so genügt es noch nicht, die Nonien (wo sie angebracht sind) richtig abzulesen und die Capillardepression in Rechnung zu bringen: man muss vielmehr auch noch darauf Rücksicht nehmen, dass sich die Massstäbe wegen der Ausdehnung ihres Stoffes selbst verändern, d. h. dass ihre Theile grösser oder kleiner werden, je nachdem sie wärmer oder kälter sind als sie zur Zeit der Theilung waren.

Die Temperatur, für welche die Theilung des Massstabs ganz richtig ist, heisst dessen Normaltemperatur und beträgt z. B. für das französische Fussmass 13° R, während sie für das Metermass = 0° ist. Hat man nun für t° C einen bereits von der Capillardepression befreiten Barometerstand gefunden, so wird derselbe in folgender Weise auf die Normaltemperatur, welche wir allgemein durch τ° C bezeichnen wollen, reducirt.

Bezeichnet man nämlich den Ausdehnungscoefficienten des Stoffes, aus dem der Massstab besteht, für 1° C mit k, so wird die Länge b des Massstabs für einen Temperaturunterschied von u° C um das Stück kub grösser oder kleiner[1], je nachdem u eine Zu- oder Abnahme der Temperatur vorstellt, und um dasselbe Stück findet man den Barometerstand b beziehlich zu klein oder zu gross, wesshalb es in dem ersten Falle zu b addirt, in dem zweiten aber davon subtrahirt werden muss. Es ist somit ganz allgemein der auf die Temperatur des Massstabs reducirte Barometerstand

$$b' = b + k(t - \tau) b. \quad \ldots \ldots \quad (174)$$

[1] Eigentlich sollte man k nicht mit u b sondern mit u b° multipliciren, wenn b° die Länge des Massstabstückes vorstellt, welches bei t° C zwischen den beiden Quecksilberspiegeln enthalten und auf 0° reducirt ist. Die Grössen b und b° sind aber so wenig von einander verschieden, dass recht wohl k u b statt k u b° gesetzt werden kann.

Für $t > \tau$ wird $b' > b$, und für $t < \tau$, wie es seyn muss, $b' < b$.

Für Messing ist $k = 0{,}000018$ und für Glas $= 0{,}000009$; daher, wenn $\tau = 13^0$ R $= 16^0{,}25$ C, $t = 26^0{,}25$ C und $b = 26$ Pariser Zoll, für eine Messingscala $b' = 26.\ (1 + 0{,}00018) = 26{,}0047$ Zoll, und für einen gläsernen Massstab $b' = 26.\ (1 + 0{,}00009) = 26{,}00234$ P. Zoll. Wäre $t = 6^0{,}25$ C und b wie vorhin gleich 26 P. Zoll, so hätte man für einen messingnen Massstab $b' = 26.\ (1 - 0{,}00018) = 26{,}9953$ P. Zoll und für eine Glasscala $b' = 26.\ (1 - 0{,}00009) = 25{,}9977$ P. Zoll.

Bezeichnet t eine Temperatur unter 0^0, so muss dieselbe, wie sich von selbst versteht, mit dem Minuszeichen in die Gleichung (174) eingeführt werden.

Hätte man bei -10^0 C einen Barometerstand $b = 330$ Millimeter beobachtet, so wäre hier, da in diesem Falle $\tau = 0$ ist, für eine Theilung auf Messing der auf den Massstab reducirte Barometerstand $b' = 330\ (1 - 0{,}00018) = 329{,}94$ Millimeter.

Alle diese Beispiele zeigen, dass die Reductionen wegen der Ausdehnung des Massstabs nur sehr gering sind, und aus diesem Grunde werden sie auch nicht überall angewendet.

2) Nach längerer Zeit fängt selbst das beste Barometer etwas Luft und gibt in Folge dessen den Druck der Luft etwas zu klein an. Die Grösse c, welche dem nach §. 226 bestimmten Barometerstande B beizufügen ist, kann auf folgende Weise ermittelt werden. Giesst man nämlich in den offenen Schenkel so viel Quecksilber, dass die Säule im geschlossenen Schenkel, wenn er wirklich ganz luftleer wäre, um die Grösse a steigen müsste, und findet man, dass diese Säule nur um b steigt, so rührt der Unterschied $a - b = u$ von der im Toricelli'schen Raume befindlichen Luft her. Ist nun c die durch das Gewicht der Quecksilbersäule ausgedrückte Spannung dieser Luft und bezeichnet h die Höhe des Toricelli'schen Raumes vor und $h - b$ nach dem Zugiessen des Quecksilbers, so hat sich durch dieses Zugiessen die Spannung um u vermehrt und es findet die Proportion statt:

$$h : (h - b) = (c + u) : c.$$

Haben b' und u' die vorige Bedeutung für einen zweiten Versuch, so ist auch

$$h : (h - b') = (c + u') : c,$$

und aus diesen beiden Proportionen folgt:

$$h = \frac{b\,b'\,(u' - u)}{b\,u' - b'\,u} \quad \text{und} \quad c = \frac{(h - b)\,u}{b} = \frac{(b' - b)\,u\,u'}{b\,u' - b'\,u} \quad . \quad (175)$$

Ist h ohnehin bekannt, so braucht man, wie hier gezeigt ist, nur einen, ausserdem aber zwei Versuche zur Bestimmung der Grösse c. Man wird indessen besser verfahren, wenn man seine Barometer von Zeit zu Zeit wieder auskocht, um sie ganz luftleer zu machen.

Sechster Abschnitt.

Instrumente zum Geschwindigkeitsmessen.

§. 228. Nach der Bestimmung des §. 2 ist hier nur von denjenigen Instrumenten und Apparaten die Rede, welche zur unmittelbaren Messung der Geschwindigkeiten fliessender Gewässer, worunter wir die Gerinne, Bäche, Flüsse und Ströme begreifen, dienen. Alle kleineren Wasserläufe, wie die der Quellen, Röhrenleitungen u. s. w. sind von unseren Betrachtungen ausgeschlossen, da die an ihnen vorzunehmenden Messungen ganz und gar in das Gebiet der Hydraulik gehören. Hierdurch ist die vorliegende Aufgabe schon ziemlich beschränkt; sie wird es aber noch mehr, wenn wir uns, wie hier, nur mit denjenigen Hilfsmitteln befassen, wodurch die gleichförmigen Geschwindigkeiten in dem freien Strome eines der oben genannten grösseren Wasserläufe gemessen werden. Es werden demnach an diesem Orte auch alle jene Messungen nicht berücksichtigt, durch welche man die Geschwindigkeit des Wassers beim Abflusse durch Schleusen, Wehre und andere Flussbauwerke erfährt.

In den nachfolgenden Beschreibungen und Erörterungen kommen einige Ausdrücke vor, deren Bedeutung vor Allem erklärt werden muss.

Das Wasser characterisirt sich bekanntlich wie jeder tropfbarflüssige Körper durch die leichte Verschiebbarkeit seiner Theilchen; es hat fast gar keinen Zusammenhang. Wenn es sich aber bewegt, so reihen sich diese Theilchen so aneinander, dass man sogar von einem Wasserfaden spricht. Darunter hat man sich jedoch nichts Anderes vorzustellen als die ununterbrochene Reihe der aufeinanderfolgenden Wassertheilchen. Der Weg nun, den ein solches Wassertheilchen in der Zeiteinheit zurücklegt, heisst die Geschwindigkeit des Wasserfadens. Haben in dem Querschnitte eines Wasserlaufes alle Wasserfäden gleiche Geschwindigkeit, so wird die Geschwindigkeit des Wasserfadens auch die Geschwindigkeit des Wassers in dem ganzen Querschnitte seyn, und das Product aus diesem Querschnitte in die Geschwindigkeit wird die Wassermenge darstellen, welche in der Zeiteinheit durch den gedachten Querschnitt fliesst.

Die Wasserfäden, welche einen Bach, Fluss oder Strom bilden, haben, wie die Erfahrung lehrt, zwar unter sich in einem und demselben Querschnitte verschiedene Geschwindigkeiten, aber man darf für practische Zwecke die Geschwindigkeit jedes einzelnen Wasserfadens und auch einer grösseren Anzahl neben einander liegender Fäden so lange als gleichförmig ansehen, als sich der betrachtete Querschnitt an einer regelmässig beschaffenen Stelle des Wasserlaufes und ziemlich entfernt von allen vorspringenden Gegenständen und Bauwerken befindet, welche eine Aufstauung des Wassers bewirken.

In einem Gerinne oder regelmässigen Flussbette nimmt die Geschwindigkeit der Wasserfäden von der Mitte gegen die Ufer und von der Oberfläche gegen den Boden hin ab; beides in Folge der Widerstände, welche die Wände des Gerinnes oder des Flussbettes veranlassen. Der Wasserfaden eines Flusses nun, welcher die grösste Geschwindigkeit besitzt, heisst dessen Stromstrich. Bei Wasserläufen in Gerinnen von symmetrischem Querschnitt und mässigem Gefälle wird dieser Stromstrich nahezu in der Mitte der Wasseroberfläche liegen und den Ufern parallel laufen; in weniger regelmässigen Betten aber wird er von dieser Lage und Richtung abweichen; in starken Flusskrümmungen liegt er sogar oft ganz an dem concaven Ufer.

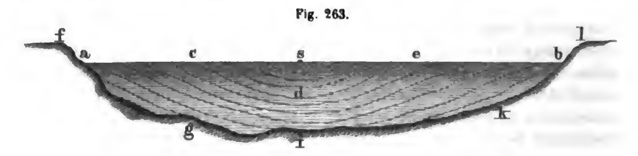
Von dem Stromstriche ist die Stromrinne zu unterscheiden, worunter man die Verbindungslinie aller auf einander folgender tiefsten Stellen eines Flussbettes versteht. In regelmässig beschaffenen Flüssen liegen die Stromrinnen und der Stromstrich fast immer lothrecht über einander; in unregelmässigen aber nur selten. Denkt man sich einen Fluss durch eine vertikalstehende Cylinderfläche geschnitten, deren Leitlinie die Stromrinne ist, so gibt dieser Schnitt das Längenprofil des Flusses. Dieses Profil stellt zwei Linien dar, wovon die eine der Sohle des Flussbetts und die andere der Oberfläche des Wassers angehört. Die letztere bestimmt das Gefälle des Flusses, d. h. die Neigung des Wasserspiegels gegen den Horizont. Drückt man das Gefälle durch die Tangente des Neigungswinkels aus, so heisst dieser Ausdruck das relative Gefälle des Flusses; gibt man es aber durch die Höhe an, auf welche sich der Wasserspiegel in einer bestimmten Entfernung senkt, so ist diese Höhe das absolute Gefälle des Flusses für diese Entfernung. Hat z. B. ein Fluss auf 1000 Fuss Länge 8 Dezimalzoll Gefälle, so ist 0,8 Fuss sein absolutes Gefälle für 1000 Fuss und 0,0008 sein relatives Gefälle. Es versteht sich von selbst, dass man aus dem relativen Gefälle sofort das absolute für jede beliebige Entfernung und in jedem beliebigen Masse findet.



Die geometrische Gestaltung eines Flusses wird erst durch seine Querprofile zur Anschauung gebracht, d. i. durch die Schnitte vertikaler, zur Stromrichtung senkrecht stehender Ebenen mit der Wasseroberfläche und der Wandung des Flussbetts. Denkt man sich in einem solchen Profile von einem beliebigen Punkte der Wasserlinie ein Loth bis zur Terrainlinie gezogen, so ist erfahrungsgemäss in jedem tiefer gelegenen Punkte dieses Loths die Geschwindigkeit des Wassers etwas geringer als in den höheren Punkten; die Abnahme der Geschwindigkeit nach dieser Richtung ist aber nicht so bedeutend als in den beiden von dem Stromstriche ausgehenden und nach den Ufern hinlaufenden Richtungen. Denkt man sich ferner in jedem Punkte eines Querprofils die Geschwindigkeit des daselbst durchgehenden Wasserfadens bestimmt und sucht man in einem solchen Profile alle jene Punkte auf, deren Wasserfäden gleiche Geschwindigkeit haben, so stellen die Verbindungslinien dieser Punkte Curven dar, welche sich (wie

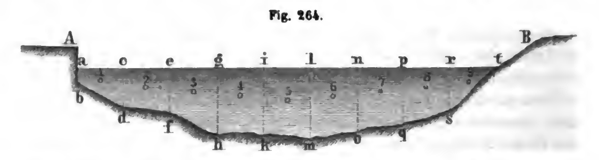
die Linien aib, cde u. s. w. in Fig. 263) um den Schnittpunkt des Stromstrichs (s) ähnlich herumziehen, wie die Jahrringe eines Holzquerschnitts um den Mittelpunkt desselben.

Fig. 263.



Wegen der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit in den einzelnen Wasserfäden eines Querschnitts ist die in der Zeiteinheit abfliessende Wassermenge sehr schwer genau zu bestimmen. In der Praxis begnügt man sich aber mit einem Näherungswerthe, der sich dadurch ergibt, dass man, wie in Fig. 264, mittels lothrechter Linien ab, cd, ef... das ganze Querprofil

Fig. 264.



in trapezförmige Theile abcd, cdef u. s. w. zerlegt, in der Mitte (1,2,3,....) jedes dieser Theile die Geschwindigkeit misst und letztere mit der zugehörigen Trapezfläche multiplicirt. Auf diese Weise erhält man die durch die einzelnen Abtheilungen des Querprofils fliessenden Wassermengen; werden dieselben addirt, so hat man die Gesammtwassermenge, welche in der Zeiteinheit durch das ganze Profil abfliesst. Wenn alle Messungen mit der nöthigen Vorsicht und Umsicht geschehen, und wenn namentlich zur Geschwindigkeitsmessung der in §. 237 beschriebene und gehörig rectificirte Woltman'sche Flügel angewendet wird, so lässt sich die Wassermenge eines Flusses bis auf den hundertsten Theil richtig bestimmen.

Zur Messung der Geschwindigkeit des fliessenden Wassers gibt es eine sehr grosse Anzahl von Werkzeugen; wir werden aber nur diejenigen betrachten, welche sich entweder durch ihre Einfachheit oder durch ihre Leistungen vor den übrigen empfehlen. Zu den ersteren rechnen wir die Schwimmkugel, den Stromquadranten und die Pitot'sche Röhre; zu den letzteren aber einzig und allein nur den Woltman'schen Flügel.

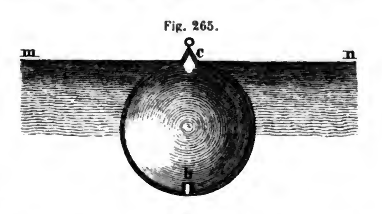
Die Schwimmkugel.

§. 229. Die Benützung eines schwimmenden Körpers zum Messen der Geschwindigkeit des Wassers in Flussbetten und Canälen stützt sich auf die

Voraussetzung, dass sich der schwimmende Gegenstand mit derselben Geschwindigkeit wie das Wasser bewege. Diese Voraussetzung ist aber der Erfahrung zur Folge nur dann richtig, wenn auf den Schwimmer keine anderen Kräfte einwirken als diejenigen, welche von ihm und dem bewegten Wasser ausgehen. Darum muss, wenn mit einer schwimmenden Kugel die Geschwindigkeit des Wassers in der Bahn, welche sie durchläuft, annähernd richtig gemessen werden soll, nicht nur die eigene Bewegung, welche sie beim Einlegen in den Fluss erhält, an der Stelle, wo die Messung beginnt, schon wieder null geworden seyn; sondern auch jeder Luftzug oder Wind, welcher die Bewegung der Kugel verzögern oder beschleunigen könnte, vermieden werden. Diese Forderung lässt sich streng genommen nur dadurch erfüllen, dass man bei merklichem Winde gar nicht misst, annähernd aber dadurch, dass man der Schwimmkugel ein Gewicht ertheilt, welches sie gerade bis auf ihren Durchmesser in das Wasser einsinken lässt. Der Luftzug, welcher nun nicht mehr unmittelbar auf die Kugel wirken kann, kommt alsdann nur noch insofern in Betracht, als er auf die obere Wasserschichte einwirkt. Der ersten Forderung wird Genüge geleistet, wenn man die Schwimmkugel 20 oder 30 Fuss oberhalb der Strecke, in welcher man ihren Lauf beobachtet, einlegt; indem sie diesen Weg durchläuft, hat sie Zeit genug, die Geschwindigkeit des Wassers anzunehmen.

Man macht die Schwimmkugeln entweder aus Holz oder aus Blech; im letzteren Falle am liebsten aus Messing-, oft aber auch aus Kupfer- oder verzinntem Eisenblech. Ihre Durchmesser wechseln zwischen 4 und 12 Zollen. Sind die hölzernen Kugeln so leicht, dass sie nicht ganz in das Wasser einsinken, so beschwert man sie auf einer beliebigen Stelle mit eisernen Kloben, die man einschlägt, oder mit Blei, das in eine nach innen sich erweiternde Höhlung gegossen wird. Die Blechkugeln werden durch Sand, Schrot oder Wasser, die sich durch eine mit Kork zu verschliessende Oeffnung (b) einfüllen lassen, so schwer gemacht, dass sie tief genug einsinken. Gegenüber dieser Oeffnung oder der Beschwerung kann man nach Fig. 265, welche den Durchschnitt einer Schwimmkugel vorstellt, einen kleinen Blechkegel (c) aufsetzen, der über das Wasser vorragt und dazu dient, die Kugel in ihrem Laufe besser beobachten zu können. Eine rein gehaltene Blechkugel oder roth angestrichene Holzkugel ist indessen auch ohne diesen Kegel gut sichtbar. An der Spitze des Kegels oder, in Ermangelung dessen, an der Kugel selbst bringt man gewöhnlich einen kleinen Ring an, um diese bequemer tragen zu können. Manche benützen diesen Ring zum Anbinden einer Schnur, womit man der Bewegung der Kugel folgt und sie

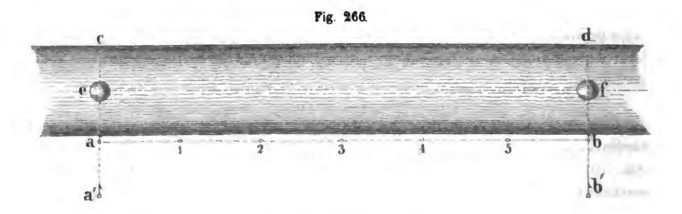
Fig. 265.



am Ende ihrer Bahn an's Ufer zieht, um sie aus dem Wasser zu nehmen. Eine solche Schnur bietet aber oft Anlass zu Störungen, wesshalb es besser ist, sie wegzulassen und bei Geschwindigkeitsmessungen dafür zu sorgen, dass man die Kugel ausserhalb des Messungsbezirks auf eine andere als die eben angegebene Weise wieder auffangen kann.

Der Gebrauch der Schwimmkugel ist sehr einfach. Man steckt an einem Ufer des Flusses, dessen Geschwindigkeit gemessen werden soll, nach dem Augenmasse eine dem Stromstriche parallele Linie von hundert oder mehr Fussen oder Schritten so ab, dass je zwei Stäbe (a,a' und b, b' Fig. 266) in einer zum Stromstriche senkrechten Ebene, d. h. in einem Querprofile stehen. Zwischen diesen Querprofilen (ac, bd) am oberen und unteren Ende der abgesteckten Linie (ab) geht die Geschwindigkeitsmessung vor sich. Es wird zu dem Ende die Kugel 20 oder 30 Fuss oberhalb des ersten Querprofils in die Mitte des Flusses gelegt und von a' aus auf einer Sekundenuhr der Zeitpunkt beobachtet, in welchem sie durch dieses Profil

Fig. 266.



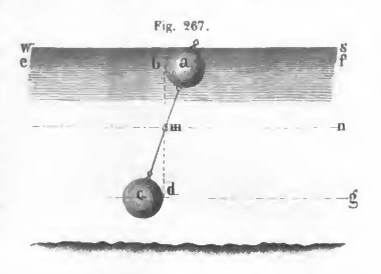
schwimmt. Hierauf begibt man sich etwas schneller als die Kugel schwimmt nach b' und bemerkt hier die Zeit, um welche sie das zweite Profil erreicht. Der Quotient aus dem Zeitunterschied in den durch ab gegebenen Weg (ef) der Kugel ist offenbar die Geschwindigkeit des Wassers in der Bahn, welche die Kugel durchschwamm. War z. B. ab = 132 Fuss und die Zeit, welche die Kugel brauchte, um von e nach f zu gelangen, $z' - z = 41$ Sekunden, so ist die Geschwindigkeit des Sromstrichs $= 132 : 41 = 3{,}22$ Fuss in der Sekunde.

Will man die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Flusses nicht in der Mitte desselben, sondern näher an einem der Ufer finden, so muss man die Kugel in der gegebenen Entfernung vom Ufer und wieder 20 bis 30 Fuss oberhalb des ersten Querprofils in den Fluss legen und schwimmen lassen, übrigens wie vorhin verfahren. Ist das Flussbett regelmässig beschaffen und die Geschwindigkeit des Wassers nicht sehr gross, so wird die Kugel in der Regel in der anfänglichen Entfernung vom Ufer sich fortbewegen und die Geschwindigkeit der daselbst befindlichen Wasserfäden angeben; ausserdem aber geräth sie leicht in die Mitte des Flusses oder dahin, wo die grösste Geschwindigkeit stattfindet, nämlich in den Stromstrich.

Soll durch die Schwimmkugel untersucht werden, ob sich die Geschwindigkeit des Stromstrichs innerhalb einer gewissen Strecke nicht ändert, so braucht man nur in dieser Strecke etwa von 50 zu 50 Fuss (nach Fig. 266 in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5) die Zeiten zu beobachten, in welchen die Kugel die zugehörigen Querprofile durchschwimmt, und zuzusehen, ob die Zeitunterschiede sich wie die Längenunterschiede verhalten oder nicht: in dem einen Falle hat sich die Geschwindigkeit des Stromstrichs nicht geändert, in dem anderen aber ist sie grösser oder kleiner geworden, je nachdem für gleiche Strecken die Zeitunterschiede ab- oder zugenommen haben.

Hat man zur Bestimmung der Wassermenge eines Flusses keinen anderen Geschwindigkeitsmesser als eine Schwimmkugel, so kann man in den einzelnen mit den Ufern parallelen Abtheilungen des Wasserlaufs die mittleren Geschwindigkeiten aus dem schon angegebenen Grunde durch unmittelbare Messung nicht wohl bestimmen, wenn man auch nach Fig. 267 zwei oder mehrere Kugeln (a, c) an einander hängt und gemeinsam schwimmen lässt; man thut daher in diesem Falle gut, sich an die durch die Erfahrung gutgeheissene Regel zu halten, nach welcher in regelmässig beschaffenen Gerinnen die mittlere Geschwindigkeit v′ um 15 Procent geringer angenommen werden darf als die grösste Geschwindigkeit v des Stromstrichs, wornach also

Fig. 267.



$$v' = 0{,}85\ v$$

und die Wassermenge gleich dem Product aus v′ und dem Wasserquerschnitte (q) ist.

Der Stromquadrant.

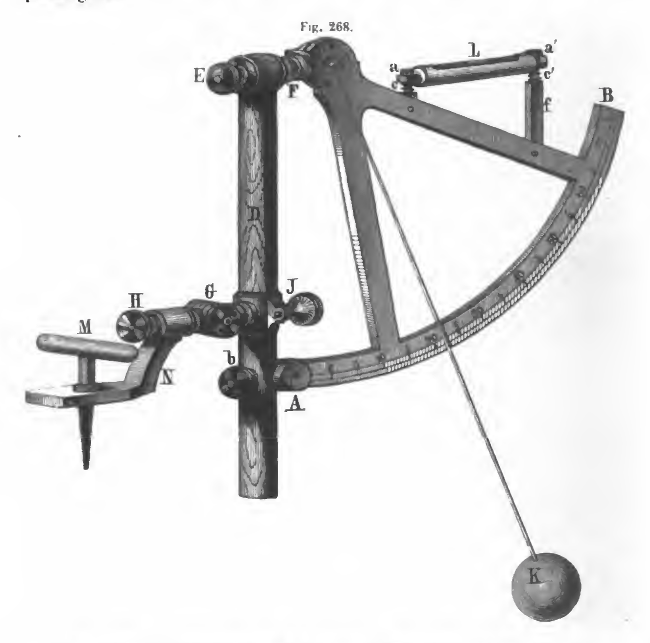
§. 230. Befestigt man an einem Faden eine Kugel, welche specifisch schwerer ist als Wasser, und hält dieselbe in einen Fluss, so wird der Faden in einer dem Stromstriche parallelen Vertikalebene um einen gewissen Winkel von der lothrechten Richtung abweichen, weil die Kugel in Folge des Wasserstosses fortzuschwimmen, wegen ihres Gewichts aber zu sinken sucht. Dieser Winkel wächst unter übrigens gleichen Umständen in bestimmter Weise mit der Geschwindigkeit des stossenden Wassers; kann man ihn daher messen, so ist hierdurch ein Mittel geboten, die Geschwindigkeit eines Flusses zu bestimmen. Die Vorrichtung zum Messen des genannten Winkels hat folgende Bedingungen zu erfüllen:

1) muss sie sich an einer unverrückbaren Stelle (auf einem Stege oder Kahne) festmachen lassen;

2) muss sie einen Gradbogen besitzen, der in die Vertikalebene der Wasserfäden gestellt werden kann; und

3) muss dieser Bogen vertikal so gedreht werden können, dass der Nullpunkt der Theilung in das Loth kommt, welches durch seinen Mittelpunkt geht.

Fig. 268.



Alle diese Bedingungen erfüllt der in Fig. 268 dargestellte Stromquadrant, den wir vor Kurzem für die hiesige polytechnische Schule anfertigen liessen. Der Gradbogen (AB), welcher aus Messing besteht, 8 Zoll Halbmesser hat und unmittelbar in Sechstelgrade getheilt ist, lässt sich an einem hölzernen Schafte (D), der mit einer Schraube (M) auf einem Brette befestigt werden kann, in horizontalem Sinne drehen, wenn die Druckschraube J geöffnet ist; und er kann im vertikalen Sinne sowohl grob als fein bewegt werden. Die grobe Vertikaldrehung geschieht nämlich um das

Zirkelgewinde G, und die feine um die Axe bei A mit Hilfe der Stellschraube E und der ihr entgegenwirkenden Stahlfeder F. Durch diese beiden Drehungen kann die mit dem Gradbogen fest verbundene Röhrenlibelle (L) zum Einspielen gebracht werden; spielt aber bei berichtigtem Instrumente die Luftblase dieser Libelle ein, so liegt der Nullpunkt der Theilung in der Vertikalen, welche durch den Mittelpunkt des Gradbogens geht. Die Kugel (K) war Anfangs aus Elfenbein hergestellt; da aber vielfache Versuche zeigten, dass dieses Materiale für den hier beabsichtigten Zweck ein zu geringes specifisches Gewicht hat, so liessen wir eine hohle aus zwei Theilen zusammengeschraubte Kugel aus Messing giessen und dieselbe nach und nach innen so weit ausdrehen, bis sich ein günstiges Verhältniss zwischen ihrem Gewicht und Umfang herausstellte. Der äussere Durchmesser der Kugel beträgt sehr nahe 3 bayerische Dezimalzolle und ihr Gewicht in der Luft 7630 Gran, im Wasser aber 4635 Gran. Sie hat somit ein specifisches Gewicht von 2,55. Der Faden, womit die Kugel an dem Gradbogen befestigt wird, bestand an unserem Instrumente früher aus einer dünnen Darmsaite, gegenwärtig aber ist er ein Florettfaden. Wir ziehen diesen Faden der Saite desshalb vor, weil sich diese durch die Bewegung längs des Gradbogens in sehr kurzer Zeit auftrennt und dadurch das Ablesen des Neigungswinkels sehr erschwert.

§. 231. **Theorie des Stromquadranten.** Wir denken uns jetzt den eben beschriebenen Quadranten so über ein regelmässig fliessendes Wasser gestellt, dass

1) seine Ebene mit der Richtung des Stromstrichs parallel und lothrecht ist; dass

2) der Halbmesser, welcher durch den Nullpunkt der Theilung geht, vertikal steht; und dass sich

3) die Kugel bei der stärksten Anspannung des Fadens noch ganz unter Wasser befindet.

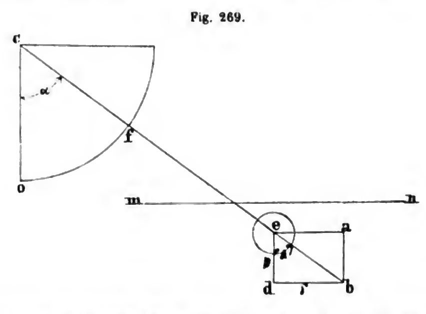
Die erste dieser drei Forderungen ist erfüllt, wenn der angespannte Faden genau an der Ebene des Gradbogens liegt; die zweite, wenn die vorher berichtigte Libelle einspielt; und die dritte, wenn die Kugel sich nicht bis an die Oberfläche des Wassers erhebt. Diese dritte Forderung ist desshalb nöthig, weil man in dem Falle, wo die Kugel sich bis an die Oberfläche des Wassers erhebt, nicht sicher seyn kann, ob sie nicht noch höher steigen und folglich den Winkel α vergrössern würde, wenn der Wasserstand höher wäre. Sollte der Fall eintreten, dass die Kugel an den Wasserspiegel gelangt, so muss der Faden verlängert werden, was durch das Zäpfchen, womit er im Mittelpunkt des Gradbogens festgehalten wird, leicht geschehen kann.

Nach diesen Voraussetzungen führen wir folgende Bezeichnungen ein. Es sey mit Bezug auf die Fig. 269:

α der Vertikalwinkel, welchen der Faden cf mit dem lothrechten Halbmesser co bildet;

p das Gewicht der Kugel im Wasser, welches bekanntlich kleiner ist als in der Luft;
s die Grösse des Wasserstosses auf die Kugel bei der Ablenkung α;
s_1 der Stoss bei der Ablenkung α_1;
v die Geschwindigkeit des Wassers, welche der Ablenkung α und
v_1 die Geschwindigkeit, welche dem Winkel α_1 entspricht.

Fig. 269.



Die Richtung (cf) des Fadens wird offenbar durch die Kräfte p und s bestimmt, von denen die eine lothrecht und die andere wagrecht wirkt. Setzt man aus beiden das Parallelogramm abde zusammen, so ist $s = p \operatorname{tg} \alpha$, $s_1 = p \operatorname{tg} \alpha_1$ und daher

$$s : s_1 = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Aus der Hydraulik ist bekannt, dass sich unter übrigens gleichen Umständen die Stosswirkungen fliessender Gewässer wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten verhalten; es wird demnach in dem vorliegenden Falle auch

$$s : s_1 = v^2 : v_1^2,$$

folglich mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung, und wenn man das Verhältniss von $v_1 : \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1} = k$ setzt, die gesuchte Geschwindigkeit

$$v = k \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (176)$$

Dieser Ausdruck, auf den sich der Gebrauch des Stromquadranten zu Geschwindigkeitsmessungen stützt, setzt eine zuverlässige Bestimmung der constanten Grösse k voraus. Wie dieselbe zu finden ist, lehrt der folgende Paragraph.

§. 232. **Bestimmung der Constanten k.** Um k zu erhalten braucht man nur an geeigneten Flussstrecken die Geschwindigkeiten (v_1, v_2, v_3 ....) des Wassers nahe unter dessen Oberfläche entweder mit der Schwimmkugel oder mit dem Woltman'schen Flügel sorgfältig zu messen und hierauf mit dem Stromquadranten, dessen Constante bestimmt werden soll, an denselben Stellen die jenen Geschwindigkeiten entsprechenden Abweichungswinkel (α_1, α_2, α_3 ....) zu beobachten. Aus je zwei zusammengehörigen

Werthen von v und α kann man nach der vorstehenden Gleichung k berechnen; es werden aber die Werthe, welche man dafür erhält, nicht genau einander gleich seyn, weil die beobachteten Werthe von v und α nicht ganz fehlerfrei gefunden werden können. Darum muss man aus den verschiedenen Werthen von k das arithmetische Mittel nehmen, um die Constante des Instruments annähernd richtig zu erhalten. Wir haben mit unserem Stromquadranten die in der nachstehenden Tabelle enthaltenen Werthe von α und mit dem Woltman'schen Flügel die zugehörigen Werthe von v gefunden.[1]

Versuch. Nr.	Stelle Nr. I.		Stelle Nr. II.		Stelle Nr. III.		Stelle Nr. IV.	
	v_1	α_1	v_2	α_2	v_3	α_3	v_4	α_4
1	1',472	4° 10'	2',052	8° 10'	2',853	14° 28'	3',920	25° 20'
2	1,480	4° 6'	2,104	8° 22'	2,807	14° 23'	3,895	25° 5'
3	1,502	4° 12'	2,033	8° 13'	2,886	14° 10'	3,915	25° 8'
Mittel	1',485	4° 9'	2',063	8° 15'	2',849	14° 20'	3',910	25° 11'
Constante	$k_1 = 5',502$		$k_2 = 5',418$		$k_3 = 5',634$		$k_4 = 5',704$	

Mittelwerth der Constanten für unser Instrument:

$$k = \frac{1}{4}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = 5{,}564 \text{ bayer. Fuss.}$$

Ueber diesen Coefficienten ist noch zu bemerken, dass er nach unseren Versuchen nur für die hier angegebene Geschwindigkeitsgrenze gilt, da für grössere Geschwindigkeiten als 4 Fuss in der Sekunde die Angaben für den Ablenkungswinkel zu sehr schwanken, als dass sich daraus ein zuverlässiger Schluss über die Geschwindigkeit des Wassers ziehen liesse. Ueberhaupt lehren unsere Beobachtungen wiederholt, dass der Stromquadrant zu genauen Messungen sich nicht eignet.

Es ist dieses auch begreiflich, wenn man bedenkt, dass die Strömung des Wassers in einem Gerinne auch da, wo man sie dem äusseren Anscheine nach für gleichförmig erklärt, in dem mathematischen Sinne es doch nicht ist, und dass die Kugel des Quadranten jede auch noch so geringe Störung des Wasserlaufs durch eine Bewegung des Fadens nach der Länge oder zur Seite der Instrumentenebene anzeigt. Da sich nun die Angabe des Quadranten immer nur auf den Augenblick bezieht, in welchem man die Lage des Fadens beobachtet, so kann gerade in diesem Momente die Geschwindigkeit und folglich auch der Ablenkungswinkel sehr merkbar grösser oder kleiner seyn als die mittlere Geschwindigkeit und der ihr zugehörige Winkel. Darum sind nach unserer Meinung diejenigen Geschwindigkeitsmesser die bessten, welche die in einer längeren Zeit vom Wasser

[1] Die Werthe von α_1, α_2, α_3, α_4, welche in der vorstehenden Tabelle enthalten sind, wurden nicht aus je einer Beobachtung, sondern dadurch gefunden, dass man 20 Stellungen des Fadens nach einander ablas und aus diesen Ablesungen das Mittel nahm. Die einzelnen Ablesungen zeigten Schwankungen von 1—2 Graden, eine Folge der ungleichmässigen Bewegung des Wassers.

ausgeübten Stösse in sich aufnehmen und ihre mittlere Wirkung angeben, wie dieses z. B. bei dem Woltman'schen Flügel der Fall ist, der ohne Zweifel das vorzüglichste Instrument seiner Art ist.

Zu dem hier berührten Uebelstande des Stromquadranten kommt noch ein anderer, nämlich der, dass man ihn nur zu Messungen gebrauchen darf, bei welchen die Kugel, während sie dem Stosse des Wassers ausgesetzt ist, nicht tief unter der Oberfläche des letzteren schwebt, damit durch den Stoss auf den Faden keine Biegung desselben eintritt, wodurch die Angabe des Ablenkungswinkels noch weit unsicherer würde als ausserdem. Man hat zwar versucht, die in Rede stehende Biegung des Fadens in Rechnung zu bringen [1]; allein es steht der Aufwand von Mühe, welchen diese Rechnung erfordert, durchaus in keinem Verhältnisse zu dem dadurch erzielten Erfolge.

Wenn wir nun gleichwohl dem Stromquadranten hier eine Stelle angewiesen haben, so geschah es in der Erwägung seiner Einfachheit und des Umstandes, dass er besser als die Schwimmkugel das Messen der Geschwindigkeit an verschiedenen Stellen eines Querprofils gestattet.

Zur Erleichterung der Berechnung der Geschwindigkeiten aus den beobachteten Ablenkungswinkeln fügen wir am Schlusse dieses Buchs eine Tabelle (Nr. XIV) bei, welche sowohl $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$ als auch $\log \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$ für fast alle vorkommenden Werthe von α liefert, und mit der man, sobald k bestimmt ist, die Geschwindigkeit v durch eine einfache Multiplication finden kann.

§. 233. **Prüfung und Berichtigung.** Der Gebrauch des berichtigten Stromquadranten ergibt sich aus dem Vorhergehenden von selbst; es ist daher hier nur noch Einiges über seine Prüfung und Berichtigung beizufügen. Die Prüfung hat sich über folgende Fragen zu erstrecken:

1) ob der Gradbogen richtig getheilt ist und die nöthigen vertikalen und horizontalen Drehungen gestattet;
2) ob der Nullpunkt der Theilung in dem durch den Kreismittelpunkt gehenden Lothe liegt, wenn die Libelle einspielt; und
3) ob die Kugel ein passendes specifisches Gewicht und ihr Faden eine hinreichende Länge hat.

Zu 1. Da wegen des Schwankens der Kugel der Gradbogen nicht fein getheilt zu seyn braucht, so genügt auch eine einfache Untersuchung der Theilung mittels des Zirkels; und was die Drehungen betrifft, welche das Instrument zulassen muss, so sind dieselben in §. 230 aufgezählt und leicht zu beurtheilen. Sollte das Zirkelgewinde (G), um welches die grobe Vertikalbewegung stattfindet, nicht genug Reibung besitzen, um dem Gewicht des Gradbogens das Gleichgewicht zu halten, so darf man nur mit dem Schlüssel, der dazu gehört, die rechtseitige Gewindscheibe stärker anziehen.

Zu 2. Um die Libellenaxe gegen den Halbmesser, der durch den

[1] Man sehe Gerstner's Handbuch der Mechanik, Prag 1832, Bd. 2, S. 307. §. 229 u. ff.

Nullpunkt des Gradbogens geht, senkrecht zu stellen, befestige man den Stromquadranten auf einem erhöhten Brette, stelle die Ebene des Gradbogens vertikal und drehe denselben mit der Schraube E so, dass der Faden, woran die Kugel frei in der Luft hängt, den Nullpunkt der Theilung berührt. Ist hiermit der Halbmesser oc lothrecht gestellt und hat man die Libelle, wenn es nicht ohnehin schon der Fall war, durch ihre Stellschräubchen a, a' zum Einspielen gebracht, so ist die zweite Untersuchung vollzogen.

Zu 3. Es lässt sich nach unseren Erfahrungen behaupten, dass es gut sey, wenn man sich zu einem Stromquadranten mehrere Kugeln von verschiedenem specifischem Gewicht machen lässt und davon die leichteren bei geringeren und die schwereren bei grösseren Geschwindigkeiten verwendet: es wird dann der Ablenkungswinkel α weder bei kleinen Geschwindigkeiten sehr klein, noch bei bedeutenden Geschwindigkeiten sehr gross. Wie viel aber das specifische Gewicht der Kugeln in den einzelnen Fällen betragen soll, ist noch nicht ermittelt; wir glauben jedoch, dass es nur bei Geschwindigkeiten bis zu 2 Fuss in der Sekunde dem des Elfenbeins (1,825) gleich seyn dürfe, für Geschwindigkeiten zwischen 2 und 5 Fuss aber mindestens 2 und für noch grössere Geschwindigkeiten ungefähr 3 betragen sollte. Um zu sehen, welches specifische Gewicht die Kugel hat, braucht man dieselbe bekanntlich nur in der Luft und unter Wasser zu wiegen und mit dem Gewichtsunterschied in das Gewicht zu dividiren, welches die Kugel in der Luft hat.

Ob der Faden des Quadranten lang genug ist, erfährt man an derjenigen Stelle eines Flusses, wo die grösste Geschwindigkeit stattfindet, indem man das Instrument daselbst aufstellt und zusieht, ob die vom Wasser gestossene Kugel nicht an die Oberfläche tritt.

Die Pitot'sche Röhre.

§. 234. So wie der Stromquadrant gibt auch die Pitot'sche Röhre die Geschwindigkeit eines fliessenden Wassers unabhängig von Zeitbestimmungen. Sie bestand ursprünglich bloss aus einer einfachen offenen Glasröhre, welche unten rechtwinkelig umgebogen und mit einem kleinen blechernen Trichter versehen war, den man gegen den Strom hielt, während das Rohr lothrecht stand. In Folge des vom Wasser in der Richtung der Trichteraxe ausgeübten Stosses erhebt sich das in die Röhre eingedrungene Wasser über den Spiegel des an ihr vorbeifliessenden, und diese Erhebung steht erfahrungsgemäss mit der Geschwindigkeit des stossenden Wassers in einem bestimmten mathematischen Zusammenhang; es ist nämlich, wenn h die theoretische und h' die beobachtete Erhebung, v die Geschwindigkeit des Wassers, g die Beschleunigung der Schwere und m irgend einen von der Beschaffenheit der Röhre abhängigen Coefficienten bezeichnet,

$$h' = m h = m \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \text{und hieraus} \quad v = \frac{\sqrt{2gh'}}{\sqrt{m}} = k\sqrt{h'} \; . \quad (177)$$

Fig. 270.

Hat man in einem Canale von bekannter Geschwindigkeit (v) die dieser Geschwindigkeit entsprechende Erhebung (h') mehrmals genau beobachtet, so erhält man nach der letzten Gleichung

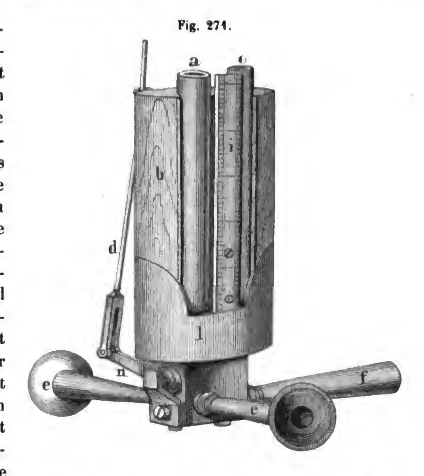
$$k = \frac{v}{\sqrt{h'}} \quad \text{und folglich} \quad m = \frac{2g}{k^2} = \frac{2gh'}{v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

Ist k bestimmt, so lässt sich leicht eine Tafel berechnen, welche die Geschwindigkeit v für irgend eine Erhebung h' enthält; die Messung erfordert somit weiter Nichts als eine richtige Beobachtung von h' und ein Nachsehen in der Tabelle. Aber die Bestimmung von h' ist bei einer einfachen Röhre sehr mühsam und ungenau. Darum wendet man zwei Röhren nebeneinander an, wovon die eine die durch den Stoss gehobene Wassersäule enthält, und die andere durch hydrostatischen Druck die Höhe des äusseren Wasserspiegels anzeigt. Dieser Röhrenverbindung hat Reichenbach jene bequemere und zweckmässigere Einrichtung gegeben, welche unter dem Namen „Reichenbach'scher Strommesser" ziemlich verbreitet ist und welche wir hier mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung des Instruments beschreiben wollen.

Die allgemeine Anordnung der verbesserten Pitot'schen Röhre ergibt sich aus Fig. 270, welche eine Seitenansicht im Massstabe von $1/_{10}$ der natürlichen Grösse ist. Die beiden Glasröhren (a, c) befinden sich in einem hölzernen Schafte (b), dessen Querschnitt dem einer biconvexen Linse gleich ist. Zwischen den Röhren ist auf dem Schafte ein messingner Massstab (i) befestigt. Die Röhre a, welche bloss den äusseren Wasserstand anzuzeigen hat, steht mit zwei kleinen Mundstücken (e, e), und die Röhre c, auf welche der Wasserstoss wirkt, mit einem kegelförmigen Ansatzrohre (f) in Verbindung. Die Verbindungscanäle zwischen den Röhren und ihren Mundstücken werden durch einen den Röhren gegenüberliegenden und auf einen Hahn wirkenden Draht (d) geöffnet und geschlossen, indem man diesen Draht auf- oder abwärts schiebt.

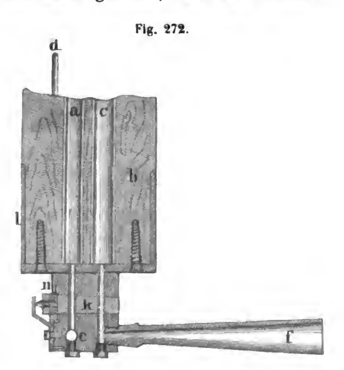
Die besondere Einrichtung der wesentlichsten Theile ist in den Fig. 271 und 272, welche im Massstabe von $1/_3$ gezeichnet sind und wovon die eine den unteren Theil des Instruments perspectivisch, die andere durchschnitten darstellt, zur Anschauung gebracht. Die Röhren (a, c) sind im Innern 4 Linien weit und haben eine Länge von 4 bis 5 Fuss. Wenn auch bei dieser Weite die Capillarität noch einen Einfluss auf die Höhen der Wassersäulen hat, so verschwindet derselbe doch für den Unterschied dieser Höhen, wenn nur die Röhren gleichweit sind. Dass letztere oben offen sind,

Fig. 271.



damit auf beide Wassersäulen der gleiche Luftdruck stattfindet, versteht sich von selbst. Nach unten setzen zwei cylindrische Bohrlöcher in dem Fussstücke l die Röhre a bis zu den Mundstücken e, e und die Röhre c bis zu dem Trichter f fort. Beide Bohrungen werden von einem Hahne (k) durchdrungen, der ein massiver Kegel mit zwei Löchern ist, welche sich durch den Draht d bald in die Richtung der Röhren, bald senkrecht darauf stellen lassen. Wenn man nämlich mit dem Draht den Hebel n abwärts gedrückt hat, so stehen die Röhren mit dem Wasser in Verbindung, und wenn der Draht heraufgezogen ist, so sind die Röhren vom äusseren Wasser abgeschlossen. Hatte man nun bei einer Messung erst den Hahn geöffnet, dann das Instrument so in das Wasser gehalten, dass die Röhren lothrecht standen und der Trichter den Wasserfäden parallel war, hierauf aber den Hahn geschlossen und das Werkzeug aus dem Wasser gehoben, so wird der Massstab i, welcher von Messing und bis auf Linien getheilt ist, die Höhen der Wassersäulen und folglich auch ihren Unterschied, welcher die Erhebung h' ist, anzeigen. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass man den Nullpunkt dieses Massstabs überall hinlegen kann; es ist aber gut, ihn in die Ebene zu legen, welche durch die Axe des Trichters f geht und auf den Röhrenaxen senkrecht steht, weil dann die Ablesung an der Röhre a sofort die Tiefe angibt, in welcher die Geschwindigkeitsmessung stattfand.

Fig. 272.



§. 235. Bei dem Gebrauch der verbesserten Pitot'schen Röhre sind folgende Regeln zu beachten. Das Instrument wird mit den beiden Händen so gehalten, dass die Röhren lothrecht stehen und die Axe des Stromtrichters in die Richtung der ankommenden Wasserfäden fällt. Das letztere ist nahezu der Fall, wenn diese Fäden zu beiden Seiten des Schaftes gleichmässig und ohne Wallung abgleiten.[1] Findet diese Gleichmässigkeit nicht statt, so dreht man den Schaft so lange zur Seite, bis sie hergestellt ist. Beim Hinabsenken ist der Hahn offen. Hat man das Instrument wenigstens eine Minute lang in der bezeichneten Stellung ganz ruhig gehalten, so schliesst man mit der linken Hand, die sich neben dem Stelldraht befindet, durch Aufziehen dieses Drahtes rasch den Hahn. Hiebei darf die lothrechte Stellung der Röhren und die Tiefe der Einsenkung nicht im mindesten verändert werden. Eine Minute Zeit muss man aufwenden, damit sich die Glasröhren durch die engen Trichter so füllen können, wie es der Gleichgewichtszustand der in dem Wasser thätigen Kräfte fordert; die lothrechte Stellung muss innegehalten werden, weil sonst die Wassersäulen zu gross ausfallen und falsche Resultate liefern; und bei dem Schliessen des Drahts muss die Höhenlage des Instruments unverändert bleiben, weil sonst die Wasserstände nicht der Stelle entsprechen, für welche die Geschwindigkeitsmessung beabsichtigt war. Auch beim Ablesen der Wasserstandshöhen ist das Instrument lothrecht und ruhig zu halten, weil sonst, wie man sich leicht klar machen wird, jede der beiden Säulen entweder zu lang oder zu kurz, oder die eine zu lang und die andere zu kurz erscheinen kann. Das Halten des Instruments wird durch Anlehnen desselben an den Steg, oder das Schiff, worauf der Beobachter steht, unterstützt. Es versteht sich jedoch von selbst, dass auf grösseren Flüssen oder Strömen das Schwanken des Schiffes durch Fahrbäume und Seile vermieden und das Instrument selbst über die Spitze des Schiffs hinaus und unter dessen Bodenfläche hinabgesenkt werden muss, wenn der Einfluss der Stauung möglichst gering werden soll. Endlich hat man dafür zu sorgen, dass in Flüssen, deren Wasser nach anhaltendem Regen oder Thauwetter gröberes Materiale oder Schlamm führt, nicht früher gemessen werde als bis das Wasser hell geworden ist; dass man Messungen, bei welchen sich Gras, Blätter, Reisig, Grundeis u. dergl. vor den Stromtrichter gelegt hatten, als nicht geschehen betrachte; und dass der Hahn nach jedem Versuche vollkommen geschlossen und vor jeder neuen Messung völlig geöffnet werde.

Zum bequemeren Gebrauche der Reichenbach'schen Strommesser wird von dem Ertel'schen Institute in München, das die Anfertigung dieser Instrumente besorgt, jedem Exemplare derselben eine Tabelle beigegeben, welche die zu den beobachteten Höhenunterschieden gehörigen Geschwindigkeiten unter der Annahme enthält, dass der Coefficient $m = 1$ und folglich $k = \sqrt{2g}$ sey. Diese Annahme ist jedoch nur annähernd richtig. Wir

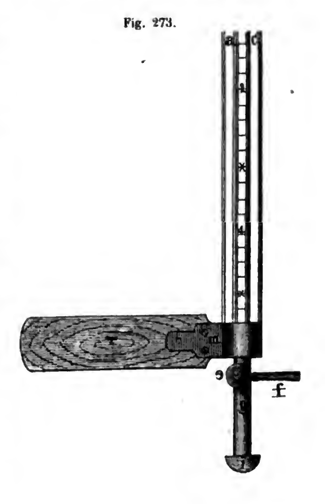
[1] In dem folgenden Paragraphen haben wir ein Mittel angegeben, wodurch sich diese Richtung einfacher und sicherer bestimmen lässt.

fügen desshalb im Anhange ebenfalls eine Tabelle (Nr. XV) bei, welche zur Auffindung der Geschwindigkeiten dient; dieselbe liefert aber nicht unmittelbar die Geschwindigkeiten selbst, sondern nur die Quadratwurzeln der beobachteten Erhebungen (h′), welche alsdann noch mit dem Coefficienten k zu multipliciren sind, der für jedes Instrument einen besonderen Werth hat und dessen Bestimmung nach §. 234 geschieht.

§. 236. **Mängel und Verbesserungen der Pitot'schen Röhre.** Wenn auch die von Reichenbach verbesserte Pitot'sche Röhre gegen die ursprüngliche Einrichtung viele Vorzüge hat, so lässt sie doch noch Mehreres zu wünschen übrig. Denn erstens leidet sie wie der Stromquadrant an dem Uebelstande, dass sie nur jene Wirkung des Wasserstosses anzeigt, welche im Augenblicke des Röhrenschlusses stattfindet und welche nach einer früheren Bemerkung von der mittleren Wirkung auffallend verschieden seyn kann; zweitens ist es schwer, die Pitot'sche Röhre nach der Einrichtung von Reichenbach lothrecht genau in der Höhe zu erhalten, in welcher die Geschwindigkeitsmessung stattfinden soll; und endlich drittens kann man es bei aller Uebung und Vorsicht kaum dahin bringen, das Instrument aus freier Hand so zu halten, dass die Axe des Ansatzrohres f (Fig. 270 bis 272) stets in der Richtung der Stromfäden und folglich auch in der Richtung des Stosses liegt.

Was nun den ersten der hier erwähnten Mängel betrifft, so lässt sich derselbe nicht beseitigen, da er im Principe des Instruments liegt; der zweite kann hingegen dadurch verbessert werden, dass man, wie in Fig. 273 angedeutet, den Schaft mit einem verschiebbaren und bei i drehbaren Fusse versieht, der bis auf die Sohle des Flussbetts reicht; und der dritte Mangel verschwindet nach unserer Erfahrung, wenn man am unteren Ende des Schaftes ein Steuerruder r von etwa $1^1/_2$ Fuss Länge und 4 Zoll Breite anbringt, in der Weise, wie dieses beim Woltman'schen Flügel der Fall ist. Dieses Steuerruder sucht sich immer in die Vertikalebene der Wasserfäden zu stellen und übt desshalb, so lange es diese Richtung nicht hat, einen Seitendruck aus, der sich in den Händen desjenigen, welcher das Instrument behufs der Messung in den Fluss hält, fühlbar macht. Gibt man nun diesem Drucke nach, bis er ver-

Fig. 273.



schwunden ist, so steht das Steuerruder und mit ihm die Axe der Ansatzröhre in der Richtung des Stosses, wie es seyn soll.

Ein mit Fuss und Steuerruder versehener Reichenbach'scher Strommesser liefert nach den Versuchen, welche wir damit angestellt haben, und worüber wir an einem anderen Orte ausführlicher zu sprechen gedenken, bessere Resultate als die in §. 234 beschriebene Pitot'sche Röhre; gleichwohl aber kommt die Genauigkeit der Messung jener nicht gleich, welche mit dem Woltman'schen Flügel zu erreichen ist. [1]

Der Woltman'sche Flügel.

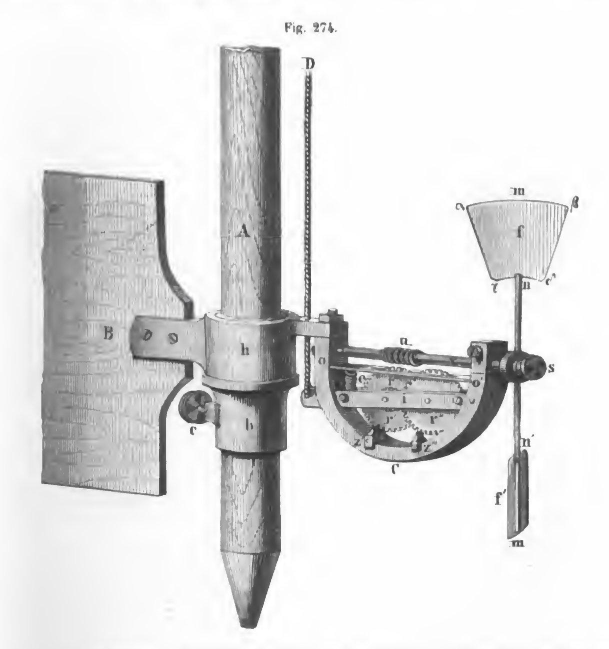
§. 237. **Einrichtung.** Mit diesem Namen bezeichnet man jene Erfindung des ehemaligen Wasserbaudirectors Woltman in Hamburg, welche die Geschwindigkeit eines fliessenden Wassers durch die Umdrehung zweier oder mehrerer an einer Axe befestigter Flügel, auf welche der Stoss des Wassers wirkt, anzeigt. Keines der bisher betrachteten Instrumente gibt die Geschwindigkeit eines Flusses an einer beliebigen Stelle mit solcher Zuverlässigkeit wie der Woltman'sche Flügel, der wohl auch hydraulischer oder hydrometrischer Flügel genannt wird.

Um zunächst eine allgemeine Vorstellung von dem Wesen dieses Geschwindigkeitsmessers zu geben, denke man sich in einem Flusse eine drehbare horizontale Axe, welche dem Stromstriche parallel ist, aber nach dessen Richtung nicht ausweichen kann. Senkrecht zu dieser Axe stehe ein Metallstäbchen, das an den Enden mit zwei trapezförmigen ebenen Messingplättchen von mehreren Quadratzoll Flächeninhalt versehen ist. Diese Plättchen oder Flügel mögen mit der vorhin gedachten Axe Winkel von 45^0 bilden, während sie selbst senkrecht gegen einander stehen. Sie sind fest mit ihrem Stäbchen verbunden, so wie dieses fest mit der Axe. Werden nun diese Flügel von den Wasserfäden, gegen welche sie ebenfalls eine Neigung von 45^0 haben, gestossen, so können sie diesem Stosse nur nachgeben, indem sie sich um die Horizontalaxe drehen und folglich um diese einen Kreis beschreiben. Die Bewegung der Flügel steht zur Bewegung des Wassers in einer gewissen mathematischen Beziehung, da die Geschwindigkeit, mit welcher sie dem Stosse nachgeben, so lange zunimmt, bis die Wasserfäden ungehindert über sie abfliessen können. Es wird weiter unten gezeigt, dass bei der vorhin angegebenen Neigung der Flügel von 45^0 gegen die Axe und den Stromstrich das Ausweichen derselben mit derselben Geschwindigkeit geschieht, welche das Wasser hat. Nehmen aber diese Flügel die Geschwindigkeit des Wassers an, so ist klar, dass sie in einer gegebenen Zeit denselben Weg machen, welchen jeder der auf sie wirkenden Wasser-

[1] In Dinglers polytechnischem Journale vom Jahre 1858 (Bd. 147, S. 328) ist eine von Darcy in Paris »verbesserte Pitot'sche Röhre« abgebildet, welche grosse Uebereinstimmung mit dem Reichenbach'schen Strommesser zeigt und auch das Steuerruder besitzt, welches wir drei Jahre früher (1855) an letzterem angebracht haben. Es ist hier nicht der Ort, die vermeintliche Verbesserung zu kritisiren, wohl aber der deutschen Erfindung die Priorität vor der französischen zu wahren.

fäden zurücklegt. Es ist folglich gleich, ob man den Weg dieser Wasserfäden oder den der Flügel misst. Der Weg der Flügel ist aber gleich der Anzahl der Umdrehungen multiplicirt mit dem Werthe einer Umdrehung. Letzterer kann leicht ermittelt werden; denken wir uns vorläufig, dieser Werth sey der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser der Abstand der Schwerpunkte der Flügelflächen ist. Nunmehr brauchen wir Nichts mehr zu messen als die Zahl der Umdrehungen in einem beobachteten Zeitabschnitte. Es ergibt sich folglich die Nothwendigkeit, mit der schon erwähnten Horizontalaxe einen Zählapparat in Verbindung zu bringen, welcher die Zahl der Umdrehungen misst.

Fig. 274.



Die besondere Einrichtung des Woltman'schen Flügels, welche in Fig. 274 dargestellt ist, erfordert nach dieser allgemeinen Aufzählung der zu erfüllenden Bedingungen folgende Bestandtheile:

1) eine hinreichend starke Stange (A), an welcher sich der Flügel in beliebiger Höhe feststellen und in das Wasser halten lässt;

2) ein Steuerruder (B), welches die Horizontalaxe (x) in die Richtung des Stromstrichs stellt, indem es in Folge der Einwirkung des Wassers das Instrument um die Stange A dreht;
3) ein Lager (C) sowohl für die Hauptaxe der Flügel als für die Axen der Rädchen (r, r', r''), welche den Zählapparat bilden;
4) eine horizontal liegende Axe (x), um welche sich die an einem senkrecht dagegen gestellten Stäbchen befestigten Flügel (f, f') drehen können;
5) ein oder mehrere Paare von Flügeln (f, f') nebst Stäbchen zu deren Befestigung an der Hauptaxe (x); und endlich
6) eine Schnur (D), wodurch der Zählapparat mit der Hauptaxe in und ausser Verbindung gesetzt werden kann.

Die Stange A erhält eine der Tiefe, in welcher zu messen ist, entsprechende Länge und Dicke; für die meisten Fälle reichen 10 Fuss Länge und 2 Zoll Dicke. Unten kann man sie mit Eisen beschlagen und den eisernen Schuh spitzig oder stumpf machen. Damit man den Flügel oder vielmehr dessen Hauptaxe in die rechte Höhe stellen kann, bringt man auf der Stange eine Eintheilung an, welche entweder von halb zu halb oder von viertel zu viertel Fuss fortschreitet.

Das Steuerruder B ist von Holz und wird etwa $1\frac{1}{2}$ Fuss lang, 4 Zoll breit und $\frac{1}{4}$ Zoll dick gemacht; es ist mit der Hülse h, wodurch das Instrument an die Stange A gesteckt wird, fest verbunden. Die Hülse h ist etwas weiter als die Stange A dick, damit sich der Flügel so drehen kann, wie es das Steuerruder verlangt. Durch die Büchse b, welche sich mit der Schraube c an der Stange A feststellen lässt, wird das Instrument in der richtigen Höhe erhalten. Manche Mechaniker bringen oberhalb der Hülse h noch eine zweite mit b übereinstimmende Büchse an; sie kann aber, wie die Erfahrung lehrt, entbehrt werden, da das Instrument vermöge seines Gewichts sich nicht über b erhebt, wenn auch die Schnur D angezogen ist.

Das Axenlager C, welches mit der Hülse h fest verbunden ist, hat zunächst die Hauptaxe x aufzunehmen und derselben mit einem Minimum von Reibung eine sichere Drehung zu gestatten; ausserdem dient es einem Hebel (i) zur Unterlage, welcher die Axen zweier gezahnter Rädchen (r', r'') trägt, wovon das erstere die einzelnen Umdrehungen der Flügel und das letztere die ganzen Umdrehungen des erstern Rädchens anzeigt.

Die Hauptaxe x, um welche sich die Flügel drehen, enthält in der Mitte eine unendliche Schraube u, welche so eingerichtet ist, dass jede ganze Drehung das Rädchen r' gerade um einen Zahn vor- oder rückwärts bewegt. Hat das Rädchen r' wie hier 100 Zähne, so entsprechen einer ganzen Umdrehung desselben 100 Umdrehungen der Axe x oder der Flügel f, f'. Würden bei einer Messung innerhalb des beobachteten Zeitraums nie mehr als 100 Umdrehungen der Flügel vorkommen, so brauchte der Apparat nur ein Rädchen; da aber bei grossen Geschwindigkeiten in kurzer Zeit 100 Umdrehungen erschöpft sind, so muss ein zweites Rädchen r'' die

ganzen Umdrehungen des ersten zählen. Verbindet man desshalb mit r' ein noch kleineres Rädchen r, welches 20 Zähne hat und in r'', das dem r' gleich ist, eingreift, so wird sich r'' um 20 Zähne oder den fünften Theil seines Umfangs bewegt haben, wenn r' eine ganze Drehung gemacht hat, und es werden einer ganzen Drehung von r'' fünf ganze Drehungen von r' und folglich 5 mal 100 oder 500 Umdrehungen der Flügel entsprechen. Zum Ablesen auf den Rädchen r' und r'' dienen die auf dem Lager C befestigten Zeiger z' und z''.

Die Flügel (f, f') haben eine trapezförmige Gestalt, welche sich als ein an den Ecken abgestumpfter Ausschnitt eines Kreisrings darstellt. Die Grösse dieses Ausschnitts richtet sich nach der Länge der Flügelruthe n n'. Beschreibt man mit dieser Länge als Halbmesser einen Kreis, so liefert dieser den äusseren Bogen $\alpha\beta$; nimmt man ferner die Flügelbreite m n zwischen einem Drittel und der Hälfte der Ruthenlänge n n' an, so ergibt sich der concentrische innere Bogen $\gamma\delta$; und theilt man endlich die so bestimmte Ringfläche durch Halbmesser in 9 oder 10 gleiche Theile, so ist die Form und Grösse eines Flügels der Hauptsache nach bestimmt. Jeder Flügel ist an der Ruthe, wie bei f' zu sehen, festgelöthet und es werden beide Flügel mit der Oeffnung in der Mitte der Ruthe so an die Hauptaxe gesteckt, dass die glatte Metallfläche dem ankommenden Wasser zugewendet ist. Eine Schraube s hält die Flügelruthe an der Axe fest. Statt zweier Flügel kann man auch 4 anwenden, indem man statt einer Ruthe zwei sich senkrecht kreuzende und festverbundene Ruthen an die Hauptaxe befestigt.

Die Schnur D dient dazu, den Zählapparat von dem Augenblicke an in Gang zu bringen, wo die Zeitmessung beginnt, und ihn in dem Moment ausser Gang zu setzen, wo die Zeitmessung aufhört. Unsere Figur zeigt den Zählapparat im Zustand der Ruhe; die Flügel können sich im Wasser drehen, ohne dass diese Drehungen gezählt werden. In dem Augenblick aber, wo die Schnur aufwärts gezogen wird und das Rädchen r' in die Schraube u eingreift, kommt der Zählapparat in Gang und verharrt darin, bis die Schnur auf ein gegebenes Zeichen wieder nachgelassen wird. Damit das Rädchen r' in Folge dieses Nachlassens ganz sicher ausser Verbindung mit der Schraube u kommt, ist zwischen dem Hebel i und dem festen Arme o o' eine Spiralfeder e angebracht, welche, sobald es die Schnur erlaubt, den Hebel i und damit die gezahnten Rädchen in die Lage herabdrückt, welche Fig. 274 darstellt.*

§. 238. **Gebrauch.** Wir setzen voraus, dass in geringer Höhe über dem Wasserspiegel des Flusses, dessen Geschwindigkeiten an verschiedenen Stellen bestimmt werden sollen, ein Steg gebaut sey, von dem aus die Beobachtung geschieht, und dass man bereits die Tiefen des Flusses gemessen und hiernach den Abstand des Instruments vom Fusspunkte der Flügelstange bestimmt habe. Nun stelle man die Rädchen r' und r'' so, dass jeder Zeiger z' und z'' auf Null zeigt und lasse von einem Gehilfen das Instrument an der bestimmten Stelle so in den Fluss halten, dass die Stange

A an dem Steg anliegt und lothrecht steht, während die Schnur D lose in der linken Hand ruht. Nachdem etwa eine halbe Minute Zeit verflossen ist, in der sich die Hauptaxe x durch das Steuerruder in die Richtung des Stromes gestellt hat und die Flügel die dem Flusse entsprechende Geschwindigkeit erlangt haben, gibt man in dem Augenblicke, wo der Zeiger der Sekundenuhr, die man selbst hält und beobachtet, eine leicht zu merkende Stelle (z. B. bei 15, 30, 45, 60 Sekunden) erreicht hat, dem Gehilfen ein Zeichen, worauf dieser sofort die Schnur D anzieht. Nach Verlauf von 30 oder 60 Sekunden folgt ein neues Zeichen und in demselben Augenblicke das Nachlassen der Schnur. Der Flügel wird nun aus dem Wasser gehoben und die Umdrehungszahl an den Zeigern z" und z' abgelesen. Sind in der Zeit von t Sekunden u Umdrehungen gemacht worden und entspricht einer Umdrehung die Weglänge k, so ist die Geschwindigkeit des Wassers

$$v = k \frac{u}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (179)$$

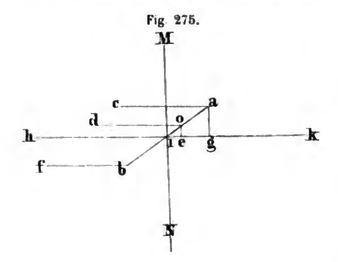
Bei einer zweiten Beobachtung braucht man die Zeiger z' und z" nicht wieder auf Null zu stellen, sondern nur ihren Stand am Anfange und Ende der Beobachtung aufzuzeichnen und die Differenz beider als Zahl der Umdrehungen zu nehmen.

Es versteht sich von selbst, dass, wenn man an einer und derselben Stelle und unter sonst gleichen Verhältnissen etwas verschiedene Geschwindigkeiten des fliessenden Wassers findet, das arithmetische Mittel aus denselben als die gesuchte Geschwindigkeit anzunehmen ist.

Hat man in einem grossen Flusse Geschwindigkeiten zu messen, so muss ein Kahn durch Fahrbäume und Seile an der bestimmten Stelle festgehalten werden, auf dem Schiff selbst aber ein Vorsprung angebracht seyn, welcher gestattet, das Instrument mehrere Fusse vor dem Schiffsschnabel lothrecht in das Wasser zu halten. Je weiter man über das Schiff hinaus treten kann, desto geringer ist der Einfluss, welchen die Stauung vor demselben auf das Messungsresultat ausübt.

§. 239. **Theorie.** Wir haben in §. 237 das Wesen des Woltman'schen Flügels unter der Annahme erklärt, dass die Flügelebenen gegen die Wasserfäden unter einem Winkel von 45° geneigt seyen; diese Neigung brauchen sie aber nicht durchaus zu haben, sondern ist nur eine von denen, welche sie haben können. Nehmen wir jetzt an, die Richtung der Wasserfäden bilde mit jeder Flügelebene den Winkel α und suchen wir eine mathematische Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v des Wassers und der Geschwindigkeit c der Flügel.

Fig. 275.



Stellt MN die Vertikalprojection der Ebene vor, in welcher sich die Flügelruthe bewegt und welche somit die Wasserfäden senkrecht durchschneidet; bezeichnet ferner die Linie a b den Schnitt eines Flügels durch eine Vertikalebene, welche den Wasserfäden parallel ist; und stellt endlich h k einen in dieser Ebene liegenden Wasserfaden vor: so wird vom Anfange der Bewegung an die Geschwindigkeit der Flügel zunehmen, bis sie so gross ist, dass die Wasserfäden ungehindert über die Flügelebene hinfliessen können, d. h. der Flügel wird in der Ebene MN oder in einer damit parallelen Ebene den Weg a g machen, während der Wasserfaden den Weg i g macht. Da diese Wege in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, so verhalten sie sich wie die gleichförmigen Geschwindigkeiten c und v, aus denen sie hervorgehen. Berücksichtigt man aber, dass $ag : ig = \operatorname{tg} \alpha$, so wird

$$v = c \cot \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (180)$$

und dieses ist die gesuchte Relation zwischen dem Anstosswinkel α und den Geschwindigkeiten des Wassers und des Flügels.

Hieraus ergibt sich auch der Beweis für die im Eingange des §. 237 aufgestellte Behauptung, dass für $\alpha = 45^0$ die Geschwindigkeit des Flügels der des Wassers gleich werde; denn setzt man $\alpha = 45^0$, so ist $\cot \alpha = 1$ und folglich

$$v = c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

was zu beweisen war.

Die beiden letzten Gleichungen gelten offenbar nur für bestimmte Punkte jedes Flügels und unter der Voraussetzung, dass die Reibung der Instrumentenbestandtheile so gering sey, dass sie vernachlässigt werden darf. Die Punkte, für welche unter dieser Voraussetzung jene Gleichungen richtig sind, sind die Mittelpunkte des Drucks und alle jene Punkte der Flügelflächen, welche dieselben Abstände von der Hauptaxe haben wie diese Mittelpunkte; mit den Abständen der Punkte nimmt selbstverständlich die Geschwindigkeit in denselben zu und ab.

Wollte man nun ohne Rücksicht auf Reibung den Werth k' bestimmen, welcher einer ganzen Umdrehung des Flügels entspricht, so hätte man k' dem Umfang eines Kreises gleich zu setzen, dessen Halbmesser ϱ der Abstand der Mittelpunkte des Drucks von der Hauptaxe ist. Somit würde $k' = 2 \varrho \pi$, und wenn man mit μ einen auf die Reibung bezüglichen Coefficienten bezeichnet,

$$v = \mu \, k' \cot \alpha \, . \, \frac{u}{t}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (182)$$

seyn. Man bedient sich jedoch dieser Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit des Wassers nicht, sondern bestimmt den Werth von

$$\mu \, k' \cot \alpha = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (183)$$

als eine dem Instrumente angehörige Constante durch Versuche, wodurch die zur Berechnung der Geschwindigkeit dienende Formel die bereits in Nr. 179 gegebene einfache Gestalt annimmt.

§. 240. **Bestimmung von k.** Es gibt zwei Wege, den Werth von k

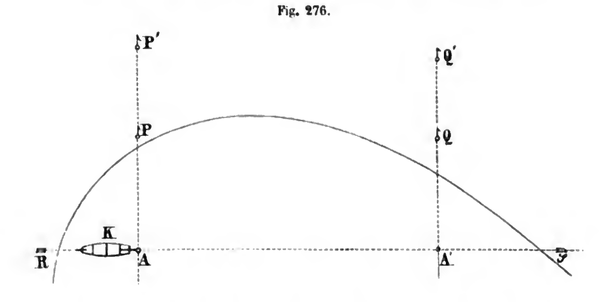
zu ermitteln, von denen der eine ein fliessendes Wasser von bekannter Geschwindigkeit, der andere ein ganz ruhig stehendes Wasser voraussetzt.

1) In einem langen hölzernen Gerinne von durchaus gleichem und rechteckigem Querschnitte und kleinem Gefälle fliesst das Wasser mit grosser Regelmässigkeit. Darin messe man mit einer Schwimmkugel, deren Durchmesser dem der Flügel ungefähr gleich kommt, die Geschwindigkeit (v') des in der Mitte befindlichen Stromstrichs wiederholt und sehr vorsichtig. Alsdann stelle man in der Mitte des Gerinnes den Woltman'schen Flügel so auf, dass er, wie vorher die Schwimmkugel, gerade von der Oberfläche des Wassers bedeckt wird. Hierauf beobachte man mehrere Male hinter einander die Zahl der Umdrehungen, welche einem bestimmten Zeitabschnitt t' entspricht, und suche hieraus das Mittel der Umdrehungen = u'. Sind jetzt die Werthe v', u', t' bekannt, so ist nach den vorstehenden Gleichungen

$$k = \frac{v' \, t'}{u'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (184)$$

2) Steht ein so regelmässiges Gerinne wie das eben beschriebene nicht zur Verfügung, so bediene man sich eines Teiches mit ziemlich tiefem und ruhig stehendem Wasser und eines gut gebauten wenig schwankenden Kahns (K, Fig. 276). Auf diesem befestige man den Flügel so, dass er 5 bis 6 Fuss über den Schnabel hinaus reicht und lothrecht steht. Die

Fig. 276.



Schnur D führe man an der Stange A über eine Rolle, damit der Gehilfe auf dem Kahne den Zählapparat auf ein gegebenes Zeichen in und ausser Wirksamkeit setzen kann, ohne auf den Vorsprung treten zu müssen. Der Kahn muss nach einer geraden Linie gezogen werden. Diese Linie soll ziemlich lang und so abgesteckt seyn, dass man vom Ufer aus den Augenblick bezeichnen kann, in welchem die Stange A die Endpunkte der Linie passirt. Zu dem Ende stelle man am Ufer zwei Stäbe P, Q, welche Anfang und Ende der Geraden bezeichnen, so auf, dass PQ parallel ist mit der Linie RS, nach welcher das Schiff gezogen wird, und errichte zu PQ

zwei Senkrechte PP′ und QQ′. In den Punkten R und S können kurze Pfosten mit Rollen, über welche die Leinen gehen, eingeschlagen seyn. Ist nun der Zählapparat auf Null eingestellt und der Kahn bis an das Ufer bei R zurückgezogen, so führe man ihn in der Richtung RS vorwärts und ziehe die Schnur an, sobald von P′ aus angedeutet wird, dass die Stange A des Instruments in die Linie P′P tritt, und halte diese Schnur fest, bis von Q′ aus das Zeichen kommt, dass die Stange A durch die Linie QQ′ geht. An dem Ufer bei S lese man die Zeiger z′ und z″ ab und wiederhole, nachdem das Schiff bis R zurückgezogen ist, das eben beschriebene Verfahren mehrere Male. Das Mittel aus allen Ablesungen gibt die Anzahl (u) von Umdrehungen, welche nöthig sind, damit der Flügel den Weg PQ = w durchlaufe; es ist folglich der Werth einer Umdrehung oder

$$k = \frac{w}{u} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (185)$$

Diese Bestimmung von k ist von jeder Zeitbeobachtung unabhängig und verdient, obschon sie etwas umständlich ist, um so mehr Beachtung, als ein so regelmässiges Gerinne von hinreichender Länge, wie wir es bei Nr. 1 gefordert haben, selten zu treffen und in einem Flusse die Berichtigung des Woltman'schen Flügels nach einem Schwimmer unstatthaft ist.

Mit welcher Genauigkeit dieses zweite Verfahren ausgeführt werden kann, zeigen folgende Versuche, welche der Verfasser an dem See und den Canälen im englischen Garten bei München ausgeführt hat.

Die Rollen R und S waren an zwei vierkantigen und 3 Fuss über den Boden vorstehenden Pfählen angebracht; ihre Entfernung betrug nahezu 301 Fuss. Die mit RS parallele Linie PQ war 191,2 Fuss lang und es stand der Schnittpunkt A vom Ufer bei R um 50 Fuss und der Schnitt A vom Ufer bei S um 60 Fuss ab. Die Entfernungen AR und A′S müssen desshalb etwas gross genommen werden, damit sich das Schiff und die Flügel schon in gehöriger Bewegung befinden, wenn sie bei A anlangen. Auf dem Kahne war der Länge nach eine dreizöllige Bohle befestigt, welche 5 Fuss über das Schiff hinausragte. Vorne fassten zwei eiserne Griffe die Flügelstange A in lothrechter Stellung; durch Schrauben konnte diese Stange verstellt und so weit in die Höhe gezogen werden, dass man am Ufer bei S die Zeiger ablesen konnte. Es wurden jedesmal 4 Flügel untersucht, welche an eine und dieselbe Axe passten; zwei von diesen Flügeln hatten Anstosswinkel von 45°, ihre Ebenen standen also gegen einander senkrecht, wesshalb wir sie mit „grosser senkrechter“ und „kleiner senkrechter Flügel“ bezeichnen wollen. Die beiden anderen Flügel waren ebenfalls nur der Grösse nach verschieden; der Anstosswinkel betrug bei ihnen 32,4 Grad. Wir nennen den einen den „grossen schiefen“ und den andern den „kleinen schiefen Flügel“, weil die Flügelebenen unter einem Winkel von 64,8 Grad gegen einander geneigt waren.

Hier folgen zunächst die beobachteten Umdrehungszahlen.

Versuch Nr.	Grosser senkrechter Flügel.	Kleiner senkrechter Flügel.	Grosser schiefer Flügel.	Kleiner schiefer Flügel.
	Anzahl der Umdrehungen			
1	62,4	114,5	40,0	67,5
2	62,7	114,3	40,1	68,0
3	62,8	114,0	39,6	67,6
4	62,3	114,6	39,5	67,2
5	62,3	114,2	39,4	67,7
Mittel	62,5	114,4	39,7	67,6

Da die Länge der durchfahrenen Linie A A' = PP' = w = 191,2 Fuss war, so berechnete sich der Werth von k für

den grossen senkrechten Flügel = 3,06 Fuss bayerisch,
„ kleinen „ „ = 1,67 „ „
„ grossen schiefen „ = 4,82 „ „
„ kleinen „ „ = 2,83 „ „

Lag schon in den geringen Unterschieden der Umdrehungszahlen ein hoher Grad von Wahrscheinlichkeit für die richtige Bestimmung der Werthe von k, so wurde diese Wahrscheinlichkeit zur Gewissheit erhoben durch die folgenden Versuche, welche darauf gerichtet waren, an einer und derselben Stelle eines der Canäle, welche den schon genannten englischen Garten durchziehen, die Geschwindigkeit des fliessenden Wassers zu bestimmen. Es ist klar, dass jeder Flügel, wenn seine Constante richtig bestimmt ist und das Wasser regelmässig fliesst, dieselbe Geschwindigkeit angeben muss. Der Canal hatte an der Stelle, wo diese Versuche gemacht wurden, ein gerades Bett von nahezu rechteckigem Querschnitt, und ein fester Steg gestattete eine leichte Messung. Jeder Flügel lief 60 Sekunden lang und machte in dieser Zeit die in der nachstehenden Tabelle verzeichneten Umdrehungen.

Versuch Nr.	Grosser senkrechter Flügel.	Kleiner senkrechter Flügel.	Grosser schiefer Flügel.	Kleiner schiefer Flügel.
	Anzahl der Umdrehungen in 60 Sekunden.			
1	67,4	123,0	42,6	72,4
2	66,8	123,2	42,3	72,0
3	67,3	122,7	42,3	72,5
4	66,7	122,6	42,6	72,8
5	67,3	123,1	42,8	72,7
Mittel	67,1	122,9	42,5	72,5

Berechnet man nach diesen Mitteln und mit den vorhin bestimmten Coefficienten die Geschwindigkeiten, so liefert

der grosse senkrechte Flügel die Geschwindigkeit v = 3,422 Fuss bayer.
„ kleine „ „ „ „ v = 3,423 „ „
„ grosse schiefe „ „ „ v = 3,414 „ „
„ kleine „ „ „ „ v = 3,419 „ „

Eine grössere Uebereinstimmung der Angaben als diese wird wohl Niemand verlangen.

Nun liesse sich immer noch einwenden, dass ein constanter Fehler in dem Instrumente liegen könne, welcher zwar gleiche Angaben gestattet, aber doch alle Angaben entweder zu gross oder zu klein liefert. Um auch diesen Einwand, den wir uns selbst machten, zu beseitigen, bestimmten wir an der zuletzt genannten Canalstrecke die Geschwindigkeit des Wassers mit einer 8zölligen Schwimmkugel und fanden dieselbe im Mittel = 3,48 Fuss, also nur um Weniges grösser, als sie die vier Flügel angaben. Wir konnten somit die Constanten der letzteren als völlig richtig ansehen und mit gutem Gewissen den hydrotechnischen Messungen zu Grunde legen, welche wir zu jener Zeit an verschiedenen Orten auszuführen hatten.

Zweite Abtheilung.

Die Lehre von den Messungen

oder

dem geometrischen Aufnehmen und Abstecken.

Theorie der Messungen.

§. 241. Die Aufgaben, welche mit den in der ersten Abtheilung dieses Buchs betrachteten Messinstrumenten gelöst werden können, sind ebenso zahlreich und mannichfaltig als die Anforderungen, welche von Seite der Staatsverwaltung, des Verkehrs, der Technik und der Wissenschaft an die Messkunst gestellt werden. Aus dieser Mannichfaltigkeit das Gleichartige herauszufinden und zusammenzustellen, und dieses selbst wieder so zu ordnen, dass eine klare Uebersicht aller Abtheilungen des Gebiets der Vermessungskunde gewonnen wird, ist die nächstgelegene Aufgabe der Lehre von den Messungen; ihre Hauptbestimmung aber ist, den geordneten Inhalt der Messkunst wissenschaftlich darzustellen.

Durch die Operationen der Messkunst können zwei verschiedene Zwecke erreicht werden: der eine besteht darin, die gegenseitige Lage von Punkten auf und unter der Erdoberfläche und die Geschwindigkeiten der Flüsse so zu bestimmen, dass sich darnach Land- und Stromkarten, Situations- und Nivellementspläne, Terraindurchschnitte und Grubenrisse herstellen lassen; der andere aber zielt dahin ab, eine auf Karten und Plänen oder sonstwie vorgezeichnete Lage von Punkten so auf oder in das Terrain überzutragen, dass die natürlichen Projectionen der Terrainpunkte unter sich und gegen ihre Umgebung dieselbe relative Lage haben wie die gleichnamigen Projectionen der im Bilde gegebenen Punkte. Jene Operationen bezeichnet man kurz mit dem Worte Aufnehmen, diese aber mit dem Ausdrucke Abstecken. Das Aufnehmen und Abstecken macht den Inhalt [1] der zweiten Abtheilung der Vermessungskunde aus, und in der Lehre von der geometrischen Aufnahme und Absteckung besteht die Theorie der Messungen.

Zergliedert man die Lösungen aller Aufgaben der Messkunde, so zeigt sich, dass selbst die zusammengesetztesten nur aus der verschiedenartigen Verknüpfung einer mässigen Anzahl von Elementaraufgaben bestehen, und dass sich diese Aufgaben wiederum in vier Gruppen abtheilen lassen, nämlich

[1] Die meisten Lehrbücher der Messkunde ziehen nur das Aufnehmen in den Kreis ihrer Betrachtungen und lassen das Abstecken ganz weg.

1) in Horizontalmessungen, welche bloss die Aufnahme und Absteckung von natürlichen Horizontalprojectionen bezwecken;

2) in Vertikalmessungen, deren Zweck im Aufnehmen und Abstecken von Höhen besteht;

3) in Grubenmessungen, welche eine Verbindung von Horizontal- und Vertikalmessungen für bergmännische Zwecke sind; und

4) in Wassermessungen, welche sich aus Horizontal- oder Vertikalmessungen und Zeitbeobachtungen zusammensetzen und hydrotechnischen Zwecken dienen.

Diese vier Gruppen von Messoperationen mit entsprechenden Unterabtheilungen, worin das Aufnehmen und Abstecken gehörig gesondert sind, bilden das Gerippe der Lehre von den Messungen.

Erster Abschnitt.

Horizontalmessungen.

A. Messung der Linien.

§. 242. Mit dem Ausdrucke „Messung der Linien" bezeichnen wir alle Verrichtungen, durch welche gerade und krumme Linien auf dem Felde abgesteckt und aufgenommen werden. Diese Verrichtungen bestehen in mittel- oder unmittelbaren Messungen und den damit verbundenen Rechnungen oder geometrischen Constructionen, und sind theils nach der Form der Linien, theils nach ihrer Ausdehnung, theils nach den Hindernissen, welche die Beschaffenheit des Bodens mit sich bringt, theils nach den Hilfsmitteln, welche zur Messung verwendet werden können, theils nach der Einsicht und Geschicklichkeit des Geometers verschieden von einander. Ihre Theorie wird desshalb am zweckmässigsten in der Form von Aufgaben, welche für gegebene Voraussetzungen bestimmte Forderungen stellen, abgehandelt. Wenn man diese Aufgaben mit Rücksicht auf die im Leben und in der Natur bestehenden Verhältnisse zweckmässig wählt und ihre Lösungen vervielfältigt und so einrichtet, dass daraus hervorgeht, wie in einzelnen Fällen mit den dargebotenen Hilfsmitteln der beabsichtigte Zweck auf eine einfache und zuverlässige Art erreicht werden kann: so lassen sich in einer verhältnissmässig geringen Zahl von Aufgaben so viele Verfahrungsweisen, Regeln und Winke geben, dass sich jeder denkende Geometer in allen möglichen Fällen leicht selber zu helfen weiss.

1. Das Abstecken gerader Linien.

§. 243. Nach §. 81 besteht das Abstecken einer geraden Linie in der Aufstellung einer entsprechenden Anzahl von Fluchtstäben oder Signalen,

deren lothrechte Axen in einer Vertikalebene liegen, und in §. 82 ist gezeigt, wie man in den einfachsten Fällen eine gerade Linie mit Stäben absteckt. Wir setzen daher hier als bekannt voraus, dass man zwischen zwei gegebenen Punkten von geringer Entfernung einen dritten Punkt angeben könne, der mit jenen in einer Geraden liegt, und dass man eine durch zwei Punkte bestimmte Gerade nach beiden Seiten hin zu verlängern wisse, wenn das Terrain keine Schwierigkeiten in den Weg legt. Das früher beschriebene Verfahren zur Absteckung gerader Linien lässt sich aber nicht mehr anwenden, wenn die gegebenen zwei Punkte, welche die abzusteckende Linie bestimmen, so liegen, dass man von einem zum andern nicht mehr sehen kann, und es ist nun zu zeigen, wie man die Schwierigkeiten, welche sich dem Visiren von einem Punkte zum andern entgegenstellen, überwindet.

§. 244. Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten von mässiger Entfernung, welche aber so liegen, dass sich von dem einen zum andern keine Absehlinie herstellen lässt, soll ein dritter Punkt in gerader Linie abgesteckt werden.

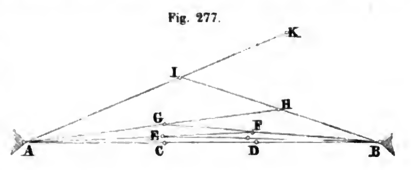
Der Grund warum man von dem einen gegebenen Punkte A nach dem anderen B oder von diesem nach jenem keine Absehlinie herstellen kann, liegt entweder darin, dass sich zwischen den beiden Punkten ein Bergvorsprung oder ein Hügel befindet, oder darin, dass man sich hinter A und B nicht aufstellen kann, weil diese Punkte durch lothrechte Mauerkanten, durch Thurmspitzen oder andere ähnliche natürliche Signale bezeichnet sind. Ob nun das eine oder das andere Hinderniss stattfindet, ist für die Lösung der vorliegenden Aufgabe gleich. Das Verfahren, welches dieselbe fordert, ändert sich nur mit den dazu gestatteten Hilfsmitteln, welche entweder bloss aus Absteckstäben, oder aus einem Prismenkreuze mit Absteckstäben, oder endlich aus einem Spiegelkreise und Stäben bestehen.

1) Lösung der Aufgabe ohne andere Hilfsmittel als Absteckstäbe.

Wenn man nur Absteckstäbe zur Verfügung hat, so erfordert die Lösung der vorliegenden Aufgabe mindestens einen Gehilfen. Hat man diesen, so stecke man noch mehrere theils durch A theils durch B gehende gerade Hilfslinien ab, bis man endlich zwei erhält, welche ein Stück gemeinschaftlich haben. Ist dieses der Fall, so liegen die beiden Punkte, welche den gemeinsamen Theil der beiden Hilfsgeraden bezeichnen, in der geraden Linie A B.

Um dieses Verfahren auszuführen, stelle man sich (nach Fig. 277) in einem beliebigen Punkte K auf, von dem aus man A erblickt und richte durch blosses Absehen den Gehilfen I in die Gerade A K ein. Hiebei muss der Gehilfe den Punkt I so wählen, dass man von

Fig. 277.



ihm aus nach B sehen kann. Es wird nun von I aus der Stab H in die Linie BI, von H aus der Stab G in die Linie AH, von G aus der Stab F in die Linie BG, von F aus E in AF u. s. f. eingerichtet, bis man endlich zwei Punkte C und D erhält, welche sowohl in der Geraden AD als in der Geraden BC liegen. Da diese zwei Linien das gerade Stück CD gemein haben, so liegen sie selbst und mit ihnen C und D in einer einzigen geraden Richtung, und zwar in der, welche durch A und B geht. Die Aufgabe ist somit gelöst.

Man begreift leicht, dass diese Lösung jederzeit umständlich, in vielen Fällen unsicher und manchmal sogar unausführbar ist. Sie wird unsicher, wenn der Raum zwischen den Linien CEGI und DFHK im Verhältniss zur Länge AB nur schmal ist, und wird unausführbar, wenn der bezeichnete Raum in einen nach A und B hin rasch abfallenden Bergrücken übergeht. Diese Unsicherheit in dem einen und die Unausführbarkeit in dem andern Falle verschwinden, wenn man mit dem Prismenkreuze arbeitet, dessen Anwendung wir nun näher erörtern wollen.

2) Lösung der Aufgabe mit Anwendung des Prismenkreuzes.

Diese Lösung besteht nach der im §. 110 gegebenen Anleitung zum Gebrauche des Prismenkreuzes darin, dass man, um nach Fig. 278 den Punkt E zwischen A und B einzuschalten, von einem beliebigen Punkte E′ ausgehend und die beiden Objectivebenen des Instruments gegen A und B, die Ocularebenen aber gegen das Auge wendend, so lange fortschreitet, bis man an eine Stelle gelangt, in welcher sich die Bilder von A und B in den beiden Prismen decken. Steckt man an dieser Stelle unterhalb des Prismenkreuzes einen Stab lothrecht in den Boden, so bezeichnet dieser den gesuchten Punkt E.

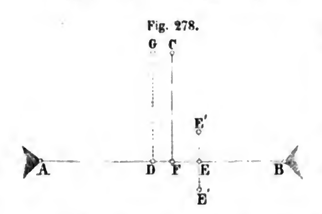


Fig. 278.

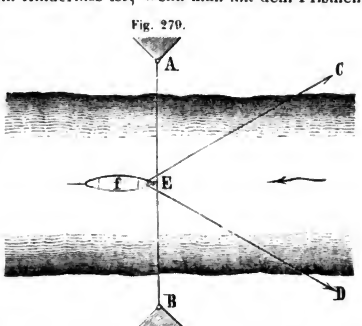
Will man sich von der richtigen Lage dieses Punktes überzeugen, so braucht man das eben beschriebene und für eine Seite von AB ausgeführte Verfahren nur von der anderen Seite von AB her zu wiederholen und zuzusehen, ob das Instrument auch in dieser entgegengesetzten Lage den Punkt E angibt oder nicht. Erhält man denselben zum zweiten Male, so ist diess ein Beweis nicht bloss für die richtige Operation, sondern auch für die gehörige Berichtigung des Prismenkreuzes; ergibt sich aber durch die zweite Messung ein anderer Punkt, so deutet dieser lediglich auf eine unvollständige Berichtigung des Instruments hin, welche desshalb zu ergänzen ist. Jedenfalls liegt aber in einem solchen Falle der gesuchte Punkt E in der Mitte zwischen den zwei Punkten, welche die beiden Absteckungen ergeben haben.

Gewährt das Terrain hinreichenden Raum, so kann man zur Prüfung

der Lage des Punktes E einen Stab D in die Linie EB einstecken und von E aus untersuchen, ob dieser Stab auch in der Linie EA steht: ist dieses wirklich der Fall, so muss nothwendig auch E ein Punkt der Geraden AB seyn, weil das gerade Stück DE den beiden durch A und B gehenden Geraden AE und BD gemein ist.

Da man zur Ausführung der Absteckung des Punktes E nur so viel Raum bedarf als nöthig ist, um in einer Querrichtung zu AB darauf vor- oder rückwärts zu gehen, so ist klar, dass die Einschränkung dieses Raumes auf einen schmalen Streifen kein Hinderniss ist, wenn man mit dem Prismenkreuze arbeitet, während dieselbe die in Nr. 1 beschriebene Absteckung unmöglich macht. Ebenso ist klar, dass auf einem Strome die Aufsuchung eines Punktes E in der geraden Linie AB mit Hilfe eines Fahrzeugs f, welches von sich oder von den Ufern aus bewegt und geleitet wird, leicht ausgeführt werden kann, was nicht der Fall wäre, wenn man die Absteckung bloss mit Stäben bewirken wollte.

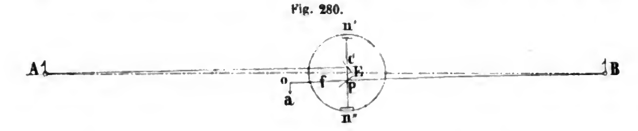
Fig. 279.



3) Lösung der Aufgabe mit Hilfe des Spiegelkreises.

Da der in den §§. 159 bis 163 beschriebene Spiegelkreis von Pistor und Martins zur Messung von Winkeln geeignet ist, welche genau 180° betragen, so muss derselbe auch zur Aussteckung solcher Winkel, d. h. zur Einschaltung eines Punktes E in die gerade Linie zweier anderer Punkte A und B dienen. Für diese Absteckung ist aber erst das Instrument dadurch vorzubereiten, dass man dem Oculare des Fernrohrs das in Fig. 174 ge-

Fig. 280.



zeichnete Reflexionsprisma vorschraubt und den in Fig. 168 mit N' bezeichneten Nonius auf den Theilstrich 180° des Limbus genau einstellt.

Nach dieser Vorbereitung fasst man den Spiegelkreis an seinem Griffe, hält ihn wagrecht vor den Kopf und richtet das Fernrohr f, wie Fig. 280 zeigt, mit dem bei a befindlichen Auge nach dem Punkte B, wodurch der drehbare Spiegel c von dem Punkte A Licht erhält, das in Folge der

bekannten Einrichtung des Instruments den Weg Acpoa macht, bis es in's Auge gelangt.

Geht man nun mit dem also gehaltenen Spiegelkreise gegen die Linie AB so lange vor- oder rückwärts, bis sich die bei a gesehenen Bilder von A und B decken, so bezeichnet die Axe des Instruments den gesuchten und in AB liegenden Punkt E. Von der richtigen Lage dieses Punktes kann man sich wie vorhin bei Nr. 2 überzeugen.

Das Verfahren zur Absteckung des Punktes E ist hier im Grunde dasselbe wie bei dem Prismenkreuze, aber es verursacht im Vergleiche mit jenem viel mehr Mühe, nicht nur weil die beiden Bilder von A und B, welche der Spiegelkreis liefert, dunkler sind als jene des Prismenkreuzes, sondern auch weil das Gesichtsfeld jenes Kreises ungleich kleiner ist als das an unserm Instrumentchen, und weil endlich der Spiegelkreis eine viel ruhigere Haltung des Beobachters erfordert als dieses.

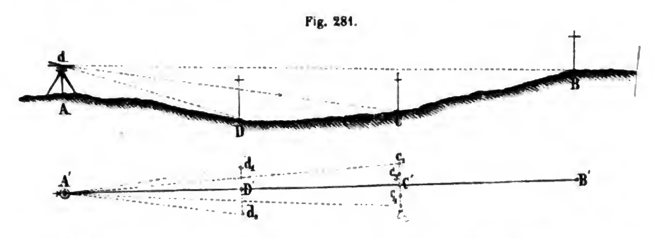
§. 245. Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten von grosser Entfernung, welche so liegen, dass sie von einem ihrer Verbindungslinie angehörigen Standpunkte aus mit Fernrohren gesehen werden können, sollen zwei oder mehrere Punkte in gerader Linie abgesteckt werden.

Die Lösung dieser Aufgabe erfordert ein Instrument, das mit einem Messfernrohre versehen ist und so aufgestellt werden kann, dass sich die Absehlinie beim Auf- und Niederkippen des Rohrs in einer Vertikalebene bewegt: also einen Theodolithen oder ein theodolithenartig eingerichtetes Nivellirinstrument, wie dergleichen in Fig. 245 und Fig. 248 abgebildet und in den §§. 216 bis 218 beschrieben sind. Ferner fordert die Lösung dieser Aufgabe Gehilfen, welche Signalstangen lothrecht aufzustellen wissen und die Zeichen verstehen, welche ihnen der Geometer gibt. Ist dieser von seinen Gehilfen zu weit entfernt, so dass sie dessen Zeichen mit blossen Augen nicht erkennen können, so muss einer derselben mit einem Handfernrohre (einem sogenannten Feldstecher) versehen werden, damit er die Winke, welche der Geometer mit einer Messfahne gibt, deutlich erkennen und den übrigen zur Darnachachtung mittheilen kann. Da das Abstecken langer gerader Linien in neuerer Zeit häufig vorkommt und für die Ausführung grosser Erdwerke von bedeutender Wichtigkeit ist, so wollen wir die vorliegende Aufgabe für mehrere bestimmte Fälle lösen.

1) Die gegebenen Punkte A und B liegen so, dass man auf einem von ihnen (A) den Theodolithen aufstellen und nach dem anderen (B) ungehindert visiren kann. In diesem Falle stelle man das Instrument centrisch über A und so auf, dass die Alhidadenaxe lothrecht ist und folglich die Drehaxe des Fernrohrs sich stets in einer Horizontalebene bewegt. Durch diese Aufstellung wird bewirkt, dass in jeder Lage des Fernrohrs dessen Absehlinie in einer Vertikalebene liegt, welche durch den Punkt A geht. Stellt man nun das Fernrohr genau auf B ein und schliesst die Bewegung der Alhidade ab, so kann sich die Absehlinie nur mehr in der abzusteckenden Vertikal-

ebene bewegen. In Fig. 281 soll die Linie ADCB den Schnitt dieser Ebene mit dem Terrain und die Gerade A′D′C′B′ die gesuchte Horizontalspur derselben Ebene vorstellen.

Fig. 281.



Will man nun den Punkt C finden, so lasse man die Gehilfen an einer Stelle, welche nach vorläufiger Schätzung diesem Punkte entspricht, eine Signalstange aufstellen und sehe zu, ob dieselbe in der Vertikalebene AB steht oder nicht. Wird nämlich bei hinreichend gesenktem Fernrohre die Mitte des unteren Stangenendes von dem Fadenkreuze gedeckt, so befindet sich die Stange an der rechten Stelle und braucht dieselbe dann nur noch genau lothrecht gestellt zu werden; erscheint aber das Fadenkreuz rechts oder links von der Stange, so liegt, da das Fernrohr ein astronomisches ist, der gewählte Punkt beziehungsweise links oder rechts von der Geraden AB und muss desshalb die Stange auf ein gegebenes Zeichen des Geometers in dem ersten Falle nach der rechten, in dem zweiten aber nach der linken Seite hin versetzt und ihre Stellung abermals geprüft werden. Dieses Versetzen und Prüfen nimmt man so lange fort vor, bis die rechte Stelle gefunden ist, d. h. bis das Fadenkreuz die Stange von oben bis unten nach der Mittellinie deckt. Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass die Versetzung der Signalstange, bis die richtige Stelle gefunden ist, nach einem gewissen Systeme geschehen muss, wenn man möglichst bald zum Ziele gelangen will. Dieses System besteht darin, dass jeder neue Standpunkt in der Mitte der beiden nächst vorhergegangenen Standpunkte zu nehmen ist. War c_1 der erste und c_2 der zweite Standpunkt des Signals, so ist für den dritten c_3 der Abstand $c_3 c_2 = c_3 c_1$, für den vierten c_4 der Abstand $c_4 c_3 = c_4 c_2$ u. s. f. zu nehmen, bis man endlich den gesuchten Punkt C′ erhält, welcher den Abstand $(c_4 c_3)$ der beiden letzten Punkte halbirt. So wie der Punkt C, wird auch der Punkt D abgesteckt, wobei sich von selbst versteht, dass man in dem Falle, wo die nähere Signalstange die fernere decken könnte — und das ist bei ebenem Terrain stets der Fall — den entfernteren Punkt (C) früher als den näheren (D) abzustecken hat.

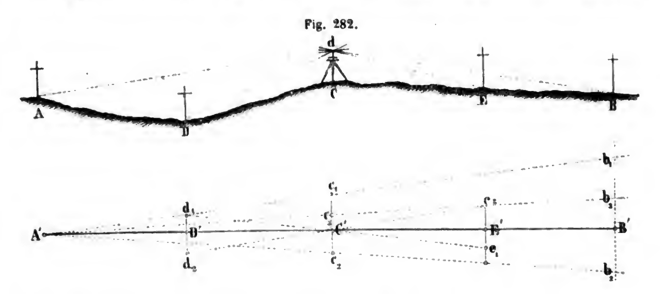
2) Die gegebenen Punkte A und B liegen so, dass man von einem zum anderen nicht sehen, wohl aber zwischen beiden eine Stelle finden kann, welche nach jedem von ihnen zu visiren gestattet. Diesem Falle

entspricht auch der, in welchem auf keinem der gegebenen Punkte der Theodolith aufgestellt, aber von einem Zwischenpunkte aus nach beiden visirt werden kann.

Unter den gegebenen Verhältnissen kommt es vor Allem darauf an, auf dem Terrainbezirke, welcher zwischen A und B so liegt, dass man von ihm aus beide Punkte sehen kann, einen Punkt C so zu bestimmen, dass er in der Vertikalebene AB liegt. Hat man diesen Punkt, so lassen sich in den Abtheilungen AC und BC der Geraden AB leicht noch andere Punkte durch das Verfahren abstecken, welches unter Nr. 1 beschrieben wurde.

Wir nehmen an, dass zur Absteckung des Punktes C ein guter Theodolith gegeben sey. Diesen stelle man vorläufig in einem Punkte c_1 auf, den man nach dem Augenmasse für einen Punkt der Linie AB hält. Nachdem der Kreis horizontal steht, stelle man das Fernrohr genau auf einen der gegebenen Punkte, etwa auf A ein und schlage hierauf, ohne übrigens

Fig. 282.



an dem Stande des Instruments das Geringste zu ändern, das Fernrohr durch. Zeigt sich hiebei, dass die Visirlinie links von B bei b_1 vorbeigeht, so muss der Standpunkt des Theodolithen in der Richtung $c_1 c_2$ nach rechts versetzt werden. Angenommen, man hätte jetzt den Punkt c_2 gewählt, so wiederholt man daselbst das Verfahren, das eben in c_1 ausgeführt wurde, und wenn nun die Visirlinie des durchgeschlagenen Fernrohrs rechts von B bei b_2 vorbeigeht, so stellt man den Theodolithen auf den Punkt c_3, welcher in der Mitte von $c_1 c_2$ liegt, und fährt mit diesem Verfahren so lange fort, bis man endlich einen Punkt C erhält, welcher so liegt, dass von ihm aus das Fernrohr in seiner ersten und zweiten Lage genau auf A und B zeigt.

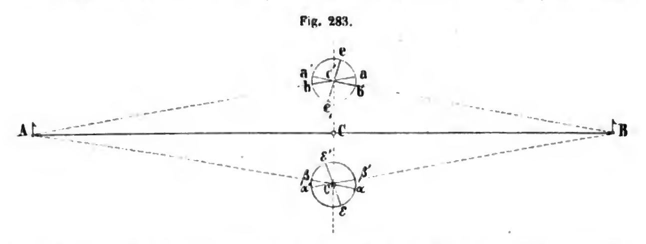
Dieses Verfahren setzt, wie man leicht einsieht, voraus, dass die Absehlinie des Fernrohrs zur Drehaxe desselben ganz genau senkrecht stehe: man muss sich also von dieser Beschaffenheit des Fernrohrs erst überzeugt haben, wenn man sich sofort auf die eben gemachte Bestimmung des

Punktes C verlassen und keine unbrauchbare Arbeit liefern will. Aber selbst dann, wenn Absehlinie und Drehaxe senkrecht gegen einander stehen, ist noch eine Prüfung der Absteckung des Punktes C rathsam. Dieselbe kann auf verschiedenen Wegen vorgenommen werden.

Ein Verfahren besteht darin, dass man das Fernrohr des noch unverändert stehenden Theodolithen wieder genau auf A einstellt, die beiden Nonien des Horizontalkreises abliest, die Alhidade genau um 180^0 dreht und zusieht, ob jetzt abermals das Fadenkreuz genau auf den Punkt B zeigt oder nicht. Wird B gedeckt, so kann man sicher seyn, dass C richtig gefunden ist, weicht aber das Fadenkreuz von B ab, so ist eine der beiden Messungen unrichtig und es muss in diesem Falle eine zweite Untersuchung entscheiden, wo der Fehler liegt.

Diese Untersuchung, welche auch sogleich als zweites Verfahren zur Prüfung der ersten Absteckung angewendet werden kann, beruht auf folgender Betrachtung. Stellt in Fig. 283 der Punkt C′ den eben gefundenen

Fig. 283.



Punkt C vor, von dem vermuthet wird, dass er falsch sey, und bezeichnet derselbe zugleich die Alhidadenaxe des Theodolithen, e e′ aber die Drehaxe und ab die auf A gerichtete Absehlinie des Fernrohrs, so wird, wenn nach dem Durchschlagen des Rohrs die Absehlinie a′b′ auf B geht, der Punkt C′ um eine gewisse leicht zu berechnende Grösse CC′ von der Linie AB abstehen und zwar auf der oberen Seite von AB, wenn die Visirlinie mit der Drehaxe gegen AB hin den spitzen Winkel AC′e′ einschliesst. Würde aber die Alhidade mit dem Fernrohr, das jetzt die Lage a′b′ hat, um 180^0 gedreht werden, so dass die Absehlinie nunmehr von b′ nach a′ hingienge und folglich der stumpfe Winkel AC′e, den die Absehlinie mit der Drehaxe macht, gegen AB läge: so hätte sich durch das oben beschriebene Verfahren statt C′ ein Punkt C″ ergeben, welcher von AB ebenfalls um die Grösse CC′ abstände, aber auf der unteren Seite dieser Geraden sich befände. Der richtige Punkt C läge alsdann in der Mitte von C′C″.

Auf Grund dieser Betrachtung wird man also, nachdem die erste Messung mit der Lage ee′ der Drehaxe des Fernrohrs gemacht wurde, eine neue Bestimmung des Punktes C vornehmen, bei welcher diese Drehaxe die entgegengesetzte Lage εε′ hat. Zeigt sich hiebei, dass wieder der frühere

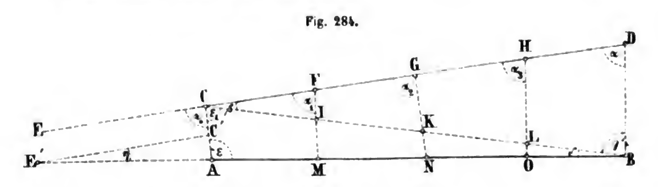
Punkt C erhalten wird, so sind die erste und dritte Messung richtig; weicht aber der neue Punkt C″ von dem ersten C′ ab, so liegt der gesuchte Punkt C in der Mitte von C′C″, womit auch die zweite Messung übereinstimmen wird, wenn man sie für diesen Punkt wiederholt. Hat man den Punkt C gefunden, so kann man von ihm aus die Punkte D und E nach Nr. 1 abstecken.

§. 246. **Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten von sehr grosser Entfernung, welche durch verschiedene Hindernisse so getrennt sind, dass man längs ihrer Verbindungslinie nicht visiren kann, sollen einige Punkte in gerader Linie abgesteckt werden.**

Die Lösung dieser Aufgabe ist im Allgemeinen schwierig und umständlich, kann aber oft durch kluge Benützung der Localverhältnisse sehr vereinfacht werden. Wir wollen zunächst einige günstige Umstände voraussetzen.

1) Es sey möglich, neben der gesuchten Geraden AB eine andere Gerade CD abzustecken, deren Endpunkte mit den gegebenen Punkten A und B verbunden werden können.

Fig. 284.



Dieser Fall kommt sehr oft und manchmal so vor, dass die Hilfslinie sogleich durch einen der Endpunkte A oder B selbst gelegt werden kann. Die Linie CD, welche wir hier als Hilfslinie benützen, kann man durch Rückwärtsverlängern eines angenommenen geraden Stückes (z. B. CF oder DH) nach §. 82, oder durch Einschalten von Punkten (F, G, H) zwischen C und D nach §. 245 abstecken.

Ist dieses geschehen, so bezeichne man in der Linie CD einige Punkte F, G, H, welche eine freie Aussicht gegen die gesuchte Linie AB gestatten und so liegen, dass man in den von ihnen ausgehenden Richtungen FM, GN, HO Entfernungen abmessen kann. Hierauf wird die Linie CD mit ihren Zwischenpunkten F, G, H der Länge nach zweimal abgemessen und alle Entfernungen werden auf den Horizont reducirt. Wir wollen annehmen, dass die wagrechte Gerade $CF = a_1$, $CG = a_2$, $CH = a_3$ und CD selbst $= a$ sey. In gleicher Weise werden $AC = c$ und $BD = e$ gemessen und auf den Horizont reducirt. Sind die Richtungen FI, GK, HL, welche freie Aussicht und ungehinderte Messung gegen AB hin gestatten, durch Absteckstäbe oder Signale festgelegt, so misst man ausserdem noch die in der

Fig. 284 angezeigten Horizontalwinkel α_0, α_1, α_2, α_3 und α. Mit diesen gemessenen und folglich bekannten Grössen kann man die Entfernungen MF, NG, OH der Punkte M, N, O, welche in der Geraden AB liegen sollen, berechnen, und ist diese Rechnung gemacht, so braucht man nur die gefundenen Horizontalentfernungen von F, G, H aus genau abzumessen, um die gesuchten Punkte M, N, O der Geraden AB zu erhalten.

Die für diese Absteckung nöthigen Rechnungen werden am einfachsten in folgender Weise zu führen seyn.

Aus CD = a, BD = e, CDB = α und a > e erhält man nach bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie:

$$\text{tg}\ ^1/_2\ (\gamma - \beta) = \frac{a - e}{a + e} \cot\ ^1/_2\ \alpha.$$

Verbindet man den Werth von $\gamma - \beta$, welcher sich hieraus ergibt, mit dem von

$$\gamma + \beta = 180^0 - \alpha,$$

so erhält man die Winkel β und γ, welche zur weiteren Berechnung nöthig sind. Mit diesen Winkeln ist die Länge d der Seite BC sehr leicht zu finden; kennt man aber d, so sind in dem Dreiecke ABC wieder zwei Seiten AC = c, CB = d und der eingeschlossene Winkel ACB = $180^0 - (\alpha_0 + \beta) = \varepsilon_1$ bekannt, folglich kann man mit Hilfe der Gleichung

$$\text{tg}\ ^1/_2\ (\varepsilon - \delta) = \frac{d - c}{d + c} \cot\ ^1/_2\ \varepsilon_1$$

die Winkeldifferenz $\varepsilon - \delta$ berechnen, und da die Winkelsumme

$$\varepsilon + \delta = 180^0 - \varepsilon_1 = \alpha_0 + \beta$$

ist, so lassen sich die Winkel ε und δ selbst und damit auch die Länge der Linie AB finden.

Nun sind die Abstände FM, GN, HO, welche beziehlich e_1, e_2, e_3 heissen sollen, leicht zu berechnen. Denn da jetzt der Winkel ε gefunden ist, so kennt man in dem Dreiecke ACE, das durch Verlängerung der Linien BA und DC entsteht, die drei Winkel und eine Seite (AC), und da der Winkel $\eta = \varepsilon - \alpha_0$ ist, so erhält man

$$CE = \frac{c \sin \varepsilon}{\sin \eta} = i;$$

Da ferner in dem Dreiecke EFM die Seite EF = i + a_1, der Winkel EFM = α_1 und der Winkel FEM = η ist, so findet man

$$FM = \frac{(i + a_1) \sin \eta}{\sin (\alpha_1 + \eta)} = e_1.$$

In gleicher Weise erhält man aus dem Dreiecke EGN die Seite

$$GN = \frac{(i + a_2) \sin \eta}{\sin (\alpha_2 + \eta)} = e_2,$$

und schliesslich aus dem Dreiecke EHO die Seite

$$HO = \frac{(i + a_3) \sin \eta}{\sin (\alpha_3 + \eta)} = e_3.$$

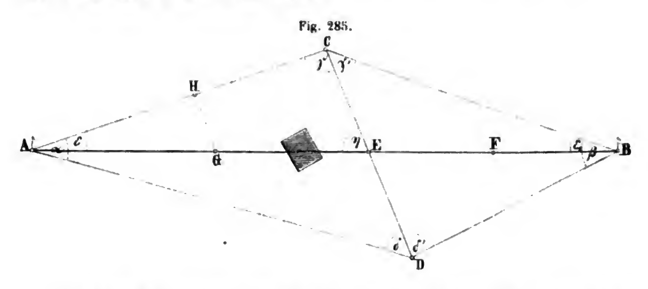
Die Rechnung wird ungleich einfacher, wenn man entweder in der

Lage ist, alle mit α bezeichneten Winkel einander gleich zu machen, oder wenn man die Hilfslinie CD durch A oder B selbst legen kann, was, wie schon bemerkt, oft der Fall ist. Wir halten es jedoch für unnöthig, die damit verbundenen Vereinfachungen hier näher zu erörtern, da sie Jeder, der die vorhergehenden Rechnungen versteht, leicht selber findet.

2) Es sey möglich, die abzusteckende Gerade AB in der Weise mit einer gebrochenen Linie ACDB zu verbinden, wie dieses Fig. 285 zeigt.

Wenn man die drei Geraden AC, CD, DB und die beiden Winkel C und D sehr genau messen würde, so liesse sich aus diesen Grössen allein die Entfernung des Punktes E, welcher der Geraden AB angehört, von den Punkten C oder D berechnen. Würde man diese Entfernung genau abmessen, so wäre E bestimmt und dadurch die jetzige Aufgabe auf den in Nr. 1 betrachteten einfacheren Fall zurückgeführt, in so ferne neben AE die durch A gehende Hilfslinie AC und neben EB die Hilfslinie DB läge. Da es aber immer eine umständliche und mühevolle Arbeit ist, lange Linien sehr genau zu messen, so wollen wir jetzt annehmen, man könne von C und D aus nach A und B hin visiren.

Fig. 285.



In diesem Falle messe man vor allen Dingen die an ihren Endpunkten C und D mit starken Pfählen bezeichnete Hilfslinie CD mit Messlatten sehr genau ab und bemerke hiebei grössere Abschnitte von etwa 500 Fuss durch kleinere Pfähle, um diese später, wenn die Entfernung CE abgemessen werden soll, in der Art benützen zu können, dass nur noch ein kleiner Theil anzusetzen oder abzuziehen ist. Hat man die Horizontalprojection von CD = b gefunden, so messe man in C die Winkel γ und γ', in D die Winkel δ und δ', und in A und B die Winkel α und β. Streng genommen hätte man zwar die beiden letzteren Winkel nicht nöthig; aber es ist gut, sie zu messen, weil sie eine Controle für die Messung der übrigen Winkel bilden.

Beträgt die Summe $\alpha + \gamma + \delta$ oder $\beta' + \gamma' + \delta'$ mehr oder weniger als 180° und liegt der Unterschied im Bereiche der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, so gleiche man je drei zusammengehörige Winkel auf

180° dadurch aus, dass man jeden um den dritten Theil des Gesammtfehlers verbessert, wenn alle Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen sind, wie wir hier annehmen wollen.[1] Mit Hilfe dieser Winkel und der Grundlinie b findet man leicht die Dreieckseiten AD, BD gleich c, c', oder AC, BC gleich d, d', und hierdurch aus den Dreiecken ABC oder ABD die Winkel, welche diese Seiten mit der Geraden AB einschliessen. Wir wollen hier nur zwei von ihnen, nämlich $CAB = \varepsilon$ und $CBA = \varepsilon_1$ bestimmen, da die übrigen (ausser zur Controle der Rechnung) unnöthig sind. Da in dem Dreiecke ABC die Seiten d, d' und der von ihnen eingeschlossene Winkel $ACB = \gamma + \gamma'$ bekannt sind, so hat man, wenn $d > d'$ ist,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon) = \frac{d - d'}{d + d'} \cot \tfrac{1}{2} (\gamma + \gamma').$$

Verbindet man die Winkeldifferenz $\varepsilon_1 - \varepsilon$, welche sich hieraus ergibt, mit der bekannten Winkelsumme

$$\varepsilon_1 + \varepsilon = 180^0 - (\gamma + \gamma'),$$

so erhält man sowohl ε als ε_1. Hat man aber diese Winkel, so liefern die beiden Dreiecke ACE und BCE die gesuchte Entfernung

$$CE = \frac{d \sin \varepsilon}{\sin (\gamma + \varepsilon)} = \frac{d' \sin \varepsilon_1}{\sin (\gamma' + \varepsilon_1)}.$$

Wird diese Länge genau berechnet und abgemesssen, so ist der Punkt E bestimmt. Weitere Punkte der Linie AB sind entweder dadurch zu ermitteln, dass man aus den Dreiecken ACE oder BCE die Neigung η der Seite CD gegen die Gerade AB berechnet und den Winkel η oder seinen Nebenwinkel $180^0 - \eta$ mit Hilfe eines in E aufgestellten Theodolithen an CE anträgt, wodurch sich z. B. der Punkt F ergibt; oder man findet einen Punkt z. B. G dadurch, dass man auf AC eine Abscisse $AH = l$ abmisst und von H aus in senkrechter Richtung zu AC die Ordinate $HG = l \operatorname{tg} \varepsilon$ abträgt.

3) Es lassen sich keine so einfachen Hilfsfiguren wie in Nr. 1 und 2 mehr abstecken.

In diesem Falle bleibt nichts Anderes übrig, als zwischen den gegebenen Endpunkten der gesuchten Geraden ein Netz von Dreiecken abzustecken, dasselbe genau zu messen und aus den gemessenen Grössen zu berechnen, an welchen Stellen die Dreieckseiten von der auszusteckenden geraden Linie geschnitten werden, endlich diese Schnittpunkte auf den zugehörigen Dreieckseiten abzutragen und dauerhaft zu bezeichnen.

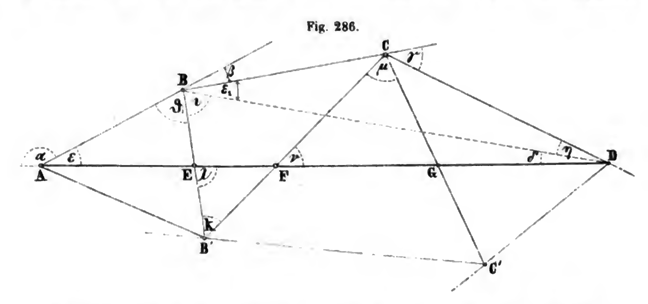
Es seyen (Fig. 286) A und D die gegebenen Punkte und es sollen einige andere Punkte E, F, G der Geraden AD auf dem Felde bestimmt werden.

Zu dem Ende suche man auf dem Terrain zunächst die Dreieckpunkte B, C, B', C' so aus, dass sie nicht nur gute Standorte für den Theodolithen und Aussicht nach je drei oder vier anderen Punkten des Dreiecknetzes

[1] Wären die Winkel mit ungleicher Genauigkeit gemessen, so müsste die Vertheilung des Gesammtfehlers mit Rücksicht auf diese verschiedene Genauigkeit vorgenommen werden. (§. 278.)

gewähren, sondern dass auch die einzelnen dadurch bestimmten Dreiecke keine zu spitzen oder zu stumpfen Winkel erhalten und auf denjenigen Seiten derselben, welche die Gerade AD schneiden, bequem und sicher die erforderlichen Längen abgemessen werden können. Eine der letzteren Seiten, z. B. B′C, wähle man als Grundlinie des Netzes, messe sie mit Messlatten zweimal sehr genau ab, und bezeichne wieder, der späteren

Fig. 286.



Bestimmung des in ihr liegenden Schnittpunkts (F) wegen, grössere Abtheilungen von etwa 500 Fuss durch kleinere Pfähle. Es sey die auf den Horizont reducirte Länge von B′C = g.

Nun messe man mit einem guten Theodolithen in den Netzpunkten A, B, C, D, C′, B′ alle Winkel, welche daselbst gemessen werden können, so genau als möglich, und gleiche je drei zu einem Dreiecke gehörige auf die in der vorigen Nummer angegebene Weise auf 180^0 aus.

Mit Hilfe dieser Winkel und der Seite g lassen sich alle Dreieckseiten berechnen; denn aus dem Dreieck B′CB findet man BC = b und BB′ = e; mit e aber aus dem Dreieck BB′A die Seiten AB = a und AB′ = a′; mit g erhält man aus dem Dreiecke CC′B′ die Seite B′C′ = b′ und CC′ = f; mit f aber aus dem Dreiecke CC′D die Seite CD = c und C′D = c′.

Würde man den Winkel BAE = ε kennen, so liesse sich aus dem Dreiecke ABE die Seite BE = x berechnen, da ausser ε der Winkel ABE und die Seite AB = a bekannt wäre; folglich liesse sich auch der Punkt E der Geraden AD abstecken. Alsdann könnte man auch aus dem Dreiecke EB′F die Seite B′F = y berechnen und folglich auf dem Felde den Punkt F erhalten. Schliesslich erhielte man die Seite CG = z aus dem Dreiecke FCG und damit den Punkt G auf dem Felde.

Der Winkel ε ist aber leicht zu finden. Denn da man in dem Dreiecke BCD die zwei Seiten b, c und den von ihnen eingeschlossenen Winkel BCD = $180^0 - \gamma$ kennt, so findet man zunächst $\eta - \varepsilon_1$ aus der Gleichung

$$\text{tg}\ {}^1\!/_2\,(\eta - \varepsilon_1) = \frac{b - c}{b + c}\ \text{tg}\ {}^1\!/_2\,(180^0 - \gamma),$$

und da ferner die Winkelsumme $\eta + \varepsilon_1 = \gamma$ ist, so sind η und ε_1 als bekannt anzusehen.

Man kennt somit auch den Winkel $ABD = 180^0 - (\beta + \varepsilon_1) = \vartheta + \iota$, und da aus dem Dreiecke BCD die Seite

$$BD = \frac{b \sin \gamma}{\sin \eta} = i$$

folgt, so sind in dem Dreiecke ABD wiederum zwei Seiten $AB = a$, $DB = i$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel

$$ABD = 180^0 - (\beta + \varepsilon_1) = \vartheta + \iota$$

bekannt; desshalb ist auch

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \delta) = \frac{i - a}{i + a} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\vartheta + \iota).$$

Weil aber die Winkelsumme

$$\varepsilon + \delta = \beta + \varepsilon_1$$

ist, so findet man aus den beiden letzten Gleichungen die Winkel δ und ε selbst und damit auch die Seite

$$AD = \frac{i \sin (\beta + \varepsilon_1)}{\sin \varepsilon} = \frac{b \sin \gamma \sin (\beta + \varepsilon_1)}{\sin \varepsilon \sin \eta}.$$

Die Länge $BE = x$ ergibt sich aus dem Dreiecke ABE, in welchem die drei Winkel und eine Seite $AB = a$ bekannt sind; es ist nämlich

$$x = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \vartheta)}.$$

Zieht man x von e ab, so kennt man in dem Dreiecke EB'F eine Seite $B'E = e - x$ und alle Winkel, folglich findet man die Seite B'F oder

$$y = \frac{(e - x) \sin \lambda}{\sin (\varkappa + \lambda)}.$$

Endlich ergibt sich aus dem Dreiecke FCG, in welchem abermals alle Winkel und eine Seite $FC = g - y$ bekannt sind, die Entfernung des Punktes G von C oder

$$z = \frac{(g - y) \sin \nu}{\sin (\mu + \nu)}.$$

Sind die Werthe von x, y, z genau berechnet, so messe man sie auf den Dreieckseiten BB', B'C, CC' von den Punkten B, B', C aus ganz genau ab, und ist dieses geschehen, so hat man die drei Punkte E, F, G der abzusteckenden Geraden AB gefunden.

4) Aussteckung einer sehr langen geraden Linie durch besondere Hilfsmittel, namentlich Lichtsignale.

Wenn man es scheut, das eben beschriebene Verfahren zur Aussteckung einer langen geraden Linie, welches stets sicher zum Ziele führt, anzuwenden, so kann man wohl auch, wenn das Terrain nicht stark durchschnitten ist, von dem nachfolgenden Verfahren Gebrauch machen, welches der Ingenieur Fr. Andriessen beim Baue der rheinischen Eisenbahn ausgeführt und in dem ersten Bande der Zeitschrift des hannover'schen Architekten- und Ingenieurvereins wie folgt beschrieben hat:

„Meine Baustrecke von Köln bis Düren war $5^1/_2$ preussische Meilen lang und bestand nur aus drei geraden Linien, welche durch Uebergangscurven verbunden waren. Die erste Gerade, von Köln bis zum Königsdorfer Tunnel, war 1 Meile lang; die zweite, von dem genannten Stollen bis zur Merzenicher Haide, hatte $2^1/_2$ Meilen Länge; und die dritte vor Düren war ungefähr $^1/_2$ Meile lang.

Wegen der vielen Dünste war es nicht möglich, bei Tage die beiden ersten Geraden mit Sicherheit auszustecken; nachdem ich aber die erste eine Meile lange Gerade bei Nacht ganz genau ausgesteckt hatte, ging ich zu der weit schwierigeren Bestimmung der zweiten geraden Linie von $2^1/_2$ Meilen Länge, deren Endpunkte festlagen, über.

Der östliche Endpunkt dieser Linie war auf einem 20′ hohen Hügel am Königsdorfer Tunnel. Die Aussicht nach der Merzenicher Haide war jedoch auf diese lange Entfernung durch drei hohe Eichenwaldungen so sehr verdeckt, dass nur zwei Stellen mittels Fernrohrs gesehen werden konnten, die eine 4000 Fuss und die andere $1^1/_2$ Meilen von dem östlichen Endpunkte entfernt.

Das westliche Ende der Geraden, auf der Merzenicher Haide gelegen, war hinter der letzten Waldung ganz und gar versteckt und alle Auszüge aus Katasterplänen dienten nur dazu, die Stellung der Zwischenpunkte annähernd zu ermitteln. Eine Linie nach diesen Ermittelungen durch die Eichenwaldungen zu schlagen, war aber zu gefährlich, da jede Eiche 100 Thaler kostete. Ich sah mich also genöthigt, die Nacht zu Hilfe zu nehmen und folgendermassen zu verfahren.

Am westlichen Endpunkte auf der Merzenicher Haide liess ich Tags vorher eine grosse Theertonne aufrichten, die der daselbst befindliche Aufseher um 9 Uhr Abends anzuzünden hatte. Einen zweiten Aufseher stellte ich mit einer hohen Stange, woran eine grosse Laterne hing, auf die $1^1/_2$ Meilen vom östlichen Standpunkte entfernte Stelle, und zwar so viel als möglich in die Richtung der durch das Fernrohr sichtbaren beiden Endpunkte. Dieser Aufseher wurde angewiesen alle zwischen 9 und $9^1/_2$ Uhr sichtbaren Signale, als für ihn giltig, genau zu befolgen. Ebenso ausgerüstet wurde ein dritter Aufseher auf die 4000 Fuss vom östlichen Endpunkte entfernte Stelle, welche nahezu in der gegebenen Richtung lag, gestellt und beauftragt, die zwischen $9^1/_2$ und 10 Uhr erfolgenden Signale zu beachten.

Da bei Nacht alles Winken mit Laternen Nichts hilft, in so ferne die Vergleichungsgegenstände unsichtbar sind, und da auch zwei Laternen, wovon die eine feststeht und die andere verrückt wird, desshalb Nichts nützen, weil man von Weitem nicht entscheiden kann, welche Laterne verrückt wurde: so liess ich neben und hinter mir eine Anzahl Raketen so aufpflanzen, dass sie, angezündet, in schräger Richtung nach Norden oder Süden fliegen oder senkrecht in die Höhe steigen mussten.

Mit diesen Raketen dirigirte ich in den bestimmten Zeiträumen die

beiden Einrichtungslaternen, nachdem ich vorher das Fadenkreuz des Theodolithen, der auf dem östlichen Endpunkte aufgestellt war, nach der Mitte des rothen am Horizonte sichtbaren Scheins der brennenden Theertonne gerichtet hatte. Beim ersten Einrücken der $1\frac{1}{2}$ Meilen entfernten Laterne musste ich drei Raketen links steigen lassen, ehe dieselbe in die Linie kam, dann eine rechts, weil sie ein wenig durch die Linie gerückt war, und darauf noch eine links. Hierauf liess ich das Signal mit den senkrecht steigenden grossen Leuchtkugeln geben, womit der erste Punkt bestimmt war. Die zweite Einrichtungslaterne stand der abzusteckenden Richtung näher, so dass ihre Stellung mit drei entgegengesetzt fliegenden Raketen und einer Leuchtkugel bestimmt werden konnte. Mit gutem Vertrauen liess ich am folgenden Tage die 4000 Fuss lange Linie rückwärts verlängern und die Waldungen durchschlagen. Diese Linie traf genau auf den $1\frac{1}{2}$ Meilen entfernten Punkt und wich von dem westlichen $2\frac{1}{2}$ Meilen entfernten Endpunkte nur $2\frac{1}{2}$ Fuss ab; ein geringer Fehler, welcher leicht zu verbessern war."

2. Das Abstecken senkrechter und paralleler Linien.

§. 247. Aus der Instrumentenlehre ist bekannt, wie man auf freiem ebenen Boden mit Hilfe des Winkelkreuzes oder der Winkeltrommel, mit dem Winkelspiegel oder dem Prismenkreuze, mit dem Spiegelsextanten oder dem Spiegelkreise, endlich wie man mit der Bussole oder dem Theodolithen eine Linie abstecken kann, welche auf einer andern gegebenen Linie in einem gegebenen Punkte derselben senkrecht steht. Von diesen Absteckungen ist hier nicht mehr die Rede, sondern nur von jenen, welche unter ungünstigen Terrainverhältnissen vorzunehmen sind.

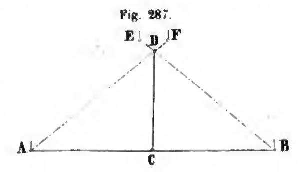
Die hieher gehörigen Aufgaben und ihre Lösungen liessen sich sehr vervielfältigen; es ist aber hier nur eine kleine Auswahl getroffen, um dem Leser die Gelegenheit zu eigenen Erfindungen nicht zu entziehen.

§. 248. **Aufgabe.** Eine gerade Linie und ein Punkt in ihr sind gegeben; man soll in diesem Punkte eine Senkrechte errichten.

1) Man besitze zur Lösung dieser Aufgabe nur eine oder zwei Messketten und mehrere Fluchtstäbe.

Die gegebene Linie sey AB und C der gegebene Punkt (Fig. 287). Hat man zwei Messketten bei der Hand, so kann man auf dem Felde das Verfahren nachahmen, dessen man sich auf dem Reissbrette bedient, um eine Senkrechte zu errichten: man misst nämlich von C aus zwei gleiche Stücke CA und CB, wovon jedes kleiner ist als die Kette, ab, befestigt in A und B je eine Kette und spannt

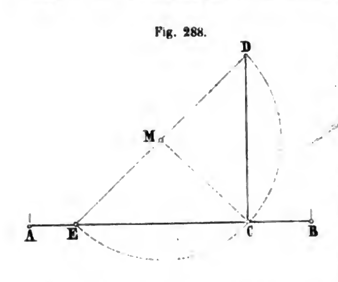
Fig. 287.



dieselbe gegen F und E hin so aus, dass sie sich in gleichen Abständen (DF, DE) von ihren Enden begegnen. Der Schnittpunkt D beider Ketten ist ein Punkt der gesuchten Senkrechten CD. Die Abstände DF und DE können nach Belieben 2, 3, 4, 5 oder mehr Fuss lang gemacht werden.

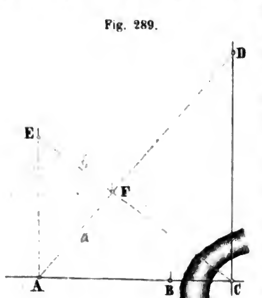
Hat man nur eine Kette, so muss jeder der Abstände CA und CB bedeutend kleiner seyn als die halbe Kettenlänge, und es sind alsdann die beiden Kettenstäbe in A und B festzuhalten, während der Geometer die Kette in der Mitte fasst und sich damit so lange bewegt, bis deren beide Hälften (DA und DB) gleich stark angespannt sind, wodurch sich der Punkt D der abzusteckenden Senkrechten CD ergibt.

Fig. 288.



Noch einfacher ist das in Fig. 288 dargestellte Verfahren. Man lasse nämlich die beiden Kettenstäbe in dem gegebenen Punkte C und einem anderen Punkte E der Geraden AB, welcher etwa 30 Fuss von C entfernt ist, festhalten und bestimme den Punkt M, welcher der Kettenmitte entspricht, durch Anspannen beider Kettenhälften. Lässt man hierauf den Gehilfen von C sich gegen D hin bewegen, seinen Stab in die Richtung EM einstellen und die Kette anspannen, so bezeichnet dessen Kettenstab einen zweiten Punkt D der Senkrechten, welche durch C geht. Denn da nach der Construction ME = MC = MD, so geht durch die drei Punkte E, C, D ein Kreis, dessen Durchmesser ED ist, der Winkel ECD liegt im Halbkreise und ist folglich ein rechter.

Fig. 289.



2) Der gegebene Punkt C der Geraden AB sey unzugänglich, man besitze aber ein Prismenkreuz oder einen Winkelspiegel.

Man errichte nach Fig. 289 in A oder irgend einem anderen Punkte der Geraden AB eine Senkrechte zu dieser. Ist E ein Punkt derselben, so ist dadurch auf dem Felde die Linie CE gegeben. In dieser kann man mit dem Prismenkreuze oder dem Winkelspiegel [1] leicht den Punkt F suchen, welcher einer Geraden AF angehört, die

[1] Wie mit dem Prismenkreuze von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte gefällt wird, ist in Abth. I S. 140 gezeigt worden; der Winkelspiegel wird in gleicher Weise angewendet, erfordert aber, dass man sich durch eine besondere Operation fortwährend davon überzeuge, ob man sich in der gegebenen Geraden bewegt oder nicht.

durch den Punkt A geht und auf CE senkrecht steht. Denkt man sich vorläufig die Senkrechte CD gezogen und AF bis D verlängert, so entstehen mehrere ähnliche und rechtwinkelige Dreiecke, welche dazu dienen, die Länge FD zu berechnen, wenn zwei andere Längen gemessen sind. Es ist nämlich, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DFC und AFE,

$$DF = \frac{AF \cdot CF}{EF},$$

und wegen der Aehnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke ACF und AEF:

$$CF = \frac{AF \cdot AF}{EF}.$$

Stellt man diesen Werth von CF in die erste Gleichung ein und setzt die gemessenen Linien $AF = a$ und $EF = b$, so erhält man

$$DF = \frac{a^3}{b^2} = c.$$

Wird die hieraus berechnete Länge C von F aus in der Richtung AF abgemessen, so erhält man den Punkt D, welcher der gesuchten Senkrechten CD angehört und deren Fusspunkt C unzugänglich ist.

3) Die gegebene Gerade AB und die abzusteckende Senkrechte CD sind sehr lang und es wird der rechte Winkel beider mit grosser Genauigkeit verlangt.

In diesem Falle bleibt nichts Anderes übrig, als die Absteckung mit Hilfe eines Theodolithen vorzunehmen. Dieser wird erst centrisch über dem gegebenen Punkte C aufgestellt und dazu benützt sich zu überzeugen, ob dieser Punkt genau genug in der Geraden AB liegt, was nach §. 245 geschehen kann. Alsdann stellt man das Fadenkreuz des Fernrohrs genau auf den entferntesten Endpunkt (A) der gegebenen Geraden ein, liest beide Nonien ab, zeichnet dic Ablesungen auf, verstellt mit Hilfe derselben das Fernrohr genau um 90° und richtet nun in die Absehlinie, so weit als möglich entfernt, ein Signal D ein. Um sich von der richtigen Stellung dieses Signals zu überzeugen, kann man das Fernrohr nochmals auf A zurückführen, die Nonien wiederholt ablesen und zusehen, ob der Unterschied gegen die Ablesung bei der Einstellung auf D wirklich genau 90° beträgt oder nicht. Dieselbe Untersuchung macht man auch für den Winkel BCD, indem man das Fadenkreuz erst wieder auf D und dann auf B einstellt und in beiden Fällen abliest. Wenn sich keine Abweichung zeigt, oder wenn eine geringe an der Stellung des Signals D verbessert ist, so kann man in die Linie CD nach Bedürfniss noch eine oder mehrere andere Signalstangen nach §. 245 einrichten.

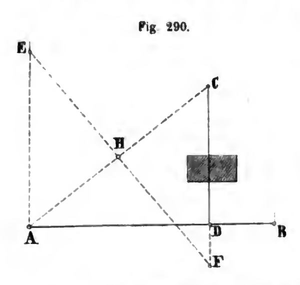
§. 249. Aufgabe. Eine gerade Linie und ein Punkt ausser ihr sind gegeben; man soll von diesem Punkte eine Senkrechte auf die Gerade fällen.

1) Die Lösung dieser Aufgabe mit dem Prismenkreuze oder dem Winkelspiegel ist bereits bekannt und braucht in Bezug auf den Winkelspiegel nur noch durch die Bemerkung vervollständigt zu werden, dass dieser stets

fordert, dass die gegebene Gerade durch mindestens zwei Stäbe, welche beide auf der rechten oder beide auf der linken Seite des Geometers stehen, bezeichnet werde, damit sich der letztere hierdurch überzeugen könne, ob er sich beim Suchen des Fusspunktes der Senkrechten in der gegebenen Geraden bewege oder nicht. Diese Forderung, welche nach §. 244 manchmal schwer zu erfüllen ist, ist für das Prismenkreuz nicht nöthig, wesshalb dasselbe auch in Hinsicht der Lösung der vorstehenden Aufgabe dem Winkelspiegel vorzuziehen ist.

2) Es befinde sich in der Richtung der abzusteckenden Senkrechten CD ein Hinderniss, welches das Visiren erschwert. (Fig. 290.)

Fig. 290.



Eine unmittelbare Lösung durch das Prismenkreuz oder den Winkelspiegel ist hier nicht möglich, während eine mittelbare Lösung keine Schwierigkeiten macht. Man errichte nämlich in A eine Senkrechte AE zur gegebenen Geraden AB, halbire die Linie AC in H und lege durch einen beliebigen Punkt E der Senkrechten AE die Gerade EH und verlängere dieselbe, bis HF = HE wird. Dadurch erhält man den Punkt F, welcher in der gesuchten Senkrechten liegt; will man nun deren Fusspunkt D haben, so braucht man nur mit Hilfe des Prismenkreuzes von F aus eine Senkrechte auf AB zu fällen, womit alsdann die Aufgabe gelöst ist.

Dass der vorhin bestimmte Punkt F wirklich in der Senkrechten CD liegt, geht aus der folgenden Betrachtung hervor. Nimmt man erst an, dass CDF senkrecht steht zu AB, so ist, weil auch AE senkrecht zu AB, das Dreieck CHF dem Dreiecke AEH ähnlich, und es findet desshalb die Gleichung statt:

$$AH \cdot HF = CH \cdot EH.$$

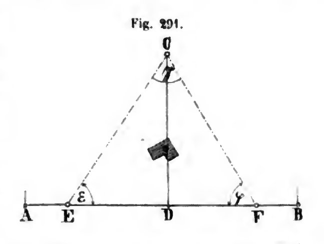
Macht man nun, wie wir gethan haben, AH = CH, so muss, wenn die Gleichung fortbestehen soll, nothwendig HF = EH werden. Umgekehrt ist also zu schliessen, dass, wenn man bei der hier befolgten Operation HF = EH macht, der Punkt F in der gesuchten Senkrechten CD liegen müsse.

3) Der Punkt C ist sehr weit von der gegebenen Geraden AB entfernt und es wird der Fusspunkt D der Senkrechten mit grosser Genauigkeit verlangt. (Fig. 291.)

Wenn diese Bedingungen stattfinden, so wird man in der Linie AB ein gerades Stück EF, welches erstens so liegt, dass man von E und F nach C visiren kann, und das zweitens wo möglich eben so gross als CD, ausserdem aber nicht vielmal kleiner als CD ist, so genau als möglich

abstecken und mit Messlatten ausmessen. Die auf den Horizont reducirte Länge der Linie EF heisse c. Ausser dieser Länge misst man in den Punkten E, F, C auch noch die drei Winkel des Dreiecks EFC mit einem Theodolithen und gleicht dieselben auf die Summe von 180⁰ aus. Sollte der Punkt C unzugänglich seyn, so genügt es, die Winkel bei E und F allein zu messen.

Fig. 291.



Nennt man die den Punkten E, F, C entsprechenden Horizontalwinkel beziehlich ε, φ, γ und heisst x der Abstand des Punktes D von E, so ist $DF = c - x$ und daher

$$x \operatorname{tg} \varepsilon = (c - x) \operatorname{tg} \varphi.$$

Aus dieser Gleichung findet man nach einer ganz einfachen Umformung:

$$x = \frac{c \sin \varphi \cos \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \varphi)} = \frac{c \sin \varphi \cos \varepsilon}{\sin \gamma}.$$

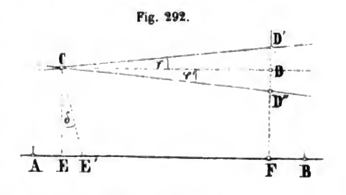
Misst man diese Länge von E gegen F hin genau ab (wobei sich die von der ersten Messung dieser Linie bekannten Ergebnisse mitbenützen lassen), so erhält man den gesuchten Punkt D, von dem aus mit dem Theodolithen die Senkrechte CD theils nach C hin, bis an das Hinderniss zwischen C und D, theils auf der entgegengesetzten Seite von AB abgesteckt werden kann, wenn das Fernrohr erst auf A oder B eingestellt und dann um 90⁰ gedreht wird.

§. 250. Aufgabe. Eine gerade Linie ist gegeben und ein Punkt ausser ihr; es soll durch diesen Punkt eine Parallele zu jener Geraden abgesteckt werden.

1) Absteckung paralleler Linien mit Hilfe von Senkrechten.

Ist AB die gegebene Gerade und C der gegebene Punkt, so hat man vor allen Dingen die Senkrechte CE herzustellen und zu messen, dann aber in irgend einem Punkte der Geraden AB, etwa in F oder in B selbst, eine Senkrechte FD zu errichten und diese der CE gleich zu machen. Das Prismenkreuz wird hier wieder die besten Dienste thun, namentlich dann, wenn die Punkte A und B unzugänglich oder so gelegen seyn sollten, dass man von einem zum andern nicht visiren kann.

Fig. 292.



Bei dieser Absteckung kommt es weniger auf scharfe Bestimmung der rechten Winkel bei E und F, als vielmehr darauf an, dass die Punkte E

und F genau in der Geraden AB liegen, und dass die Senkrechten CE und DF gleich lang sind. Denn nimmt man an, dass in Fig. 292 der Winkel CEF um den kleinen Winkel ECE' $= \delta$ falsch bestimmt worden wäre, während BFD richtig ist, so würde die Wirkung dieses Fehlers darin bestehen, dass man statt des richtigen Abstandes CE $=$ a den unrichtigen CE' $=$ FD' von F aus abtrüge, wodurch statt der Parallelen CD die Richtung CD' erhalten würde, die mit CD einen Winkel φ bildete, dessen Grösse sich aus der leicht aufzufindenden Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{DD'}{CD} = \frac{1 - \cos \delta}{\cos \delta} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2 \sin^2 {}^1\!/_2\, \delta}{\cos \delta} \cdot \frac{a}{b}, \quad . \quad . \quad (186)$$

in welcher CD $=$ EF $=$ b gesetzt ist, bestimmen liesse. Der erste Ausdruck für tg φ kann vereinfacht werden, wenn man ihn im Zähler und Nenner mit cos δ dividirt und

$$\sec \delta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} = 1 + {}^1\!/_2 \operatorname{tg}^2 \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

setzt, was hier ohne Zweifel erlaubt ist. Dadurch erhält man

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \operatorname{tg}^2 \delta}{2 b}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188)$$

Berücksichtigt man ferner, dass φ und δ immer nur kleine Winkel sind, so ist, wenn diese Winkel in Minuten ausgedrückt werden, tg $\varphi =$ φ tg 1', tg $\delta = \delta$ tg 1' und folglich

$$\varphi = \frac{a\, \delta^2 \operatorname{tg} 1'}{2 b} = \frac{a\, \delta^2}{6875\, b}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (189)$$

Nehmen wir jetzt an, die Winkel bei E und F seyen richtig, diese Punkte selbst aber, oder die von ihnen aus abgemessenen Senkrechten EC, FD unrichtig bestimmt, so dass in der Richtung FD statt des Punktes D der Punkt D'' erhalten würde, welcher um das Stückchen DD'' $=$ q a (wobei q wieder ein kleiner Bruch ist) falsch liegt: so erhielte man statt der Parallelen CD die Richtung CD'', welche mit jener einen Winkel φ' bildete, der sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi' = q \frac{a}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (190)$$

ergäbe. Wendet man auch hier die erlaubte Näherungsformel tg $\varphi' =$ φ' tg 1' an, so erhält man unmittelbar den Winkel

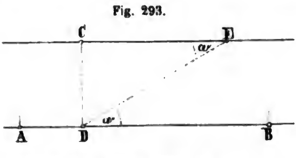
$$\varphi' = 3438\, q \frac{a}{b}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (191)$$

2) Absteckung von Parallellinien mittels der Wechselwinkel.

Diese Winkel können eine beliebige Grösse haben, also auch rechte seyn. Hätte man daher nur ein Prismenkreuz oder einen Winkelspiegel statt eines Theodolithen oder Spiegelkreises zur Verfügung, so müsste man, um die vorliegende Aufgabe zu lösen, von dem gegebenen Punkte C auf die gegebene Gerade AB eine Senkrechte CD fällen und an diese bei C den rechten Winkel ECD $=$ ADC antragen. Wäre E der gegebene Punkt, durch den eine Parallele zu AB gelegt werden sollte, ohne dass man zu ihm gelangen könnte, so würde man, um ausser dem gegebenen noch

einen Punkt C der Parallelen zu erhalten, in einem beliebigen Punkte D der Geraden AB eine Senkrechte CD errichten und auf dieser mit dem Prismenkreuze oder dem Winkelspiegel den Punkt C bestimmen, in welchem sie von einer durch E gehenden und zu ihr senkrechten Geraden EC geschnitten wird.

Fig. 293.

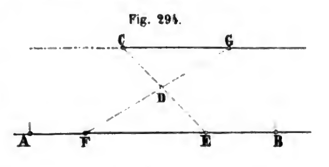


Kann man in dem gegebenen Punkte E und in irgend einem Punkte D der Geraden AB ein winkelmessendes Instrument, z. B. einen Theodolithen aufstellen, so messe man in D den Winkel $BDE = \omega$, stelle hierauf den Theodolithen in E auf, richte das Fernrohr nach D, lese die beiden Nonien ab, drehe mit Hilfe dieser Ablesungen die Alhidade genau um den Winkel ω in der Richtung von D nach C hin und stecke in der neuen Absehlinie das Signal C aus, so ist offenbar EC parallel zu AB. Eine einfache Ueberlegung lehrt, wie man zu verfahren hätte, um den Winkel ω auch mit dem Spiegelsextanten, dem Spiegelkreise, der Bussole oder dem Messtische in D aufzunehmen und an ED anzutragen.

3) Absteckung der Parallellinien mit Hilfe von Dreiecken.

Soll durch C eine Parallele zu AB gelegt werden, so kann man nach Fig. 294 zwei sich schneidende Gerade CE und FD, wovon eine durch C geht und welche beide in der Geraden AB endigen, abstecken, die Stücke $CD = a$, $DE = b$, $DF = c$ messen und hierauf den Punkt G der gesuchten Parallelen CG dadurch bestimmen, dass man FD verlängert und

Fig. 294.

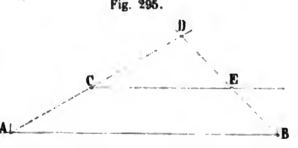


$$DG = x = \frac{ac}{b}$$

macht. Die Richtigkeit dieses Verfahrens bedarf keines Beweises, und es ist klar, dass man statt der Punkte E und F auch die Punkte B und A oder doch einen von ihnen zur Absteckung benützen kann.

Kann oder will man das vorstehende Verfahren nicht anwenden, so lege man wie in Fig. 295 durch C die Gerade CA und verlängere dieselbe bis zu einem Punkte D, der so liegt, dass man von ihm nach dem Punkte B der Geraden AB sehen und messen kann. Ist $AC = m$, $CD = n$, $DB = r$ gemessen, so mache man

Fig. 295.

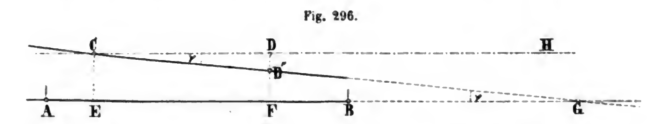


$$DE = z = \frac{n\,r}{m + n},$$

womit die Parallele CE gefunden ist; denn dadurch, dass DE die eben berechnete Länge z erhalten hat, ist das Dreieck DCE dem Dreiecke DAB ähnlich und folglich die CE der AB parallel geworden. Es versteht sich von selbst, dass man statt B jeden anderen gut gelegenen Punkt der Geraden AB benützen, und wenn das Terrain nicht hindert, n = m und folglich $z = \frac{1}{2}\,r$ machen kann.

4) Absteckung der Parallellinien durch Benützung ausserordentlich weit entfernter Gegenstände. Da zwei gerade Linien einen um so kleineren

Fig. 296.



Winkel mit einander bilden, in je grösserer Entfernung sie sich schneiden, so lassen sich durch Benützung eines sehr entfernten Schnittpunkts Linien abstecken, welche nahezu parallel sind. Hat man demnach durch C eine Parallele zu der Geraden AB, in deren Verlängerung ein sehr weit entfernter Gegenstand G, z. B. ein Kirchthurm, ein Haus, ein Baum, ein Signal etc. sichtbar ist, abzustecken, so braucht man nur von C aus den Stab D″ in die Richtung CG einzustellen, und es wird dadurch die Aufgabe um so genauer gelöst seyn, je weiter G von C entfernt ist.

Wie gross die Genauigkeit ist, kann man in jedem einzelnen Falle leicht beurtheilen. Bezeichnet nämlich

a die Entfernung des Punktes C von der Geraden AB = CE,
b den Abstand der Senkrechten CE und D″F von einander,
c die Entfernung des Gegenstandes G vom Punkte E,
d die Abweichung DD″ der wahren Richtung CD von der genäherten CG,
φ den Neigungswinkel dieser beiden Linien (CD, CG), und
q das Verhältniss, in welchem d zu a steht:

so ist nach der Figur

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{b} = \frac{a}{c}, \quad \ldots \ldots \quad (192)$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass φ immer nur ein kleiner Winkel ist,

$$\varphi = 3438 \cdot \frac{a}{c} \text{ Minuten.} \quad \ldots \ldots \quad (193)$$

Will man den Fehler der Absteckung lieber durch den Unterschied d ausdrücken, welcher zwischen den Abständen CE und D″F stattfindet, so dient dazu die Gleichung

$$d = b\,\frac{a}{c}, \quad \ldots \ldots \quad (194)$$

welche aus (192) folgt, und welche selbst wieder das Verhältniss dieses Fehlers zum Abstande a oder

$$q = \frac{d}{a} = \frac{b}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (195)$$

liefert. Wenn also der Abstand D″F nur um den tausendsten Theil seiner Länge falsch werden dürfte, so müsste der Punkt G tausendmal so weit von E entfernt seyn als F; wäre demnach b = 100 Fuss, so müsste CG schon gleich 100 000 Fuss seyn, eine Forderung, die sich nur selten erfüllen liesse.

Unter der Voraussetzung aber, dass C wirklich so gross genommen werden könnte, als eben angegeben, und dass a = b = 100 Fuss wäre, betrüge der Winkel φ, unter welchem die abgesteckte Richtung CG gegen AB geneigt seyn würde, doch immer noch 3,438 Minuten. Hieraus ergibt sich wohl zur Genüge, dass von dem eben besprochenen Näherungsverfahren nur ein sehr beschränkter Gebrauch zu machen ist.

3. Das Abstecken krummer Linien (Curven).

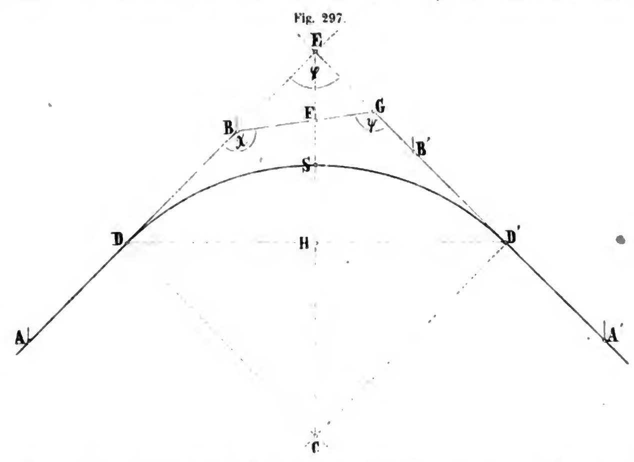
§. 251. Eine der wichtigsten Vermessungsarbeiten der Bau-Ingenieure bildet das Ausstecken derjenigen Curven, durch welche je zwei sich schneidende gerade Richtungen von Strassen, Eisenbahnen oder Canälen mit einander verbunden werden müssen, um hiernach Verkehrswege herzustellen, deren horizontal projicirte Axen stetige Linien sind. Die Curven, welche zur Verbindung der als Tangenten erscheinenden Geraden dienen, sind fast ausschliesslich Kreisbögen und nur in wenigen Fällen Parabeln. Die Bedingungen, unter denen diese Curven auszustecken sind, können sehr verschieden seyn, und es werden sich theils hiernach, theils nach dem Grade der Genauigkeit, welchen die Arbeit besitzen soll, die Methoden der Absteckung richten. Alle diese Methoden setzen voraus, dass man die Berührungspunkte der abzusteckenden Curven vorher bestimmt habe, wesshalb zuvörderst die folgende Aufgabe zu lösen ist.

§. 252. Aufgabe. Zwei gerade sich schneidende Richtungen sind ihrer Lage nach, und die sie verbindende Curve ist durch ihren kleinsten Krümmungshalbmesser gegeben: man soll die Entfernung der Berührungspunkte von dem Schnittpunkte der Tangenten bestimmen.

Sind (Fig. 297) AB, A′B′ die gegebenen Geraden, so hat man vor allen Dingen den Punkt E, in welchem sie sich schneiden, und den Horizontalwinkel φ, den sie daselbst einschliessen, zu bestimmen. Der Schnittpunkt E wird erhalten, indem man sich entweder in der Verlängerung von AB aufstellt und darin so lange vor- oder rückwärts geht, bis man auch in die verlängerte Linie A′B′ gelangt; oder indem zwei bei A und A′ stehende Geometer einen Gehilfen mit einer Signalstange gleichzeitig in die Linien AB und A′B′ einrichten. Steht dessen Stange in den beiden Geraden, so bezeichnet sie offenbar deren Schnittpunkt.

Ist dieser Punkt zugänglich und kann von ihm aus jede der Berührungslinien A B, A'B' auf eine genügend lange Strecke gesehen werden, so hat die Messung des Winkels φ, welche mit dem Theodolithen oder Spiegelkreise geschieht, keine Schwierigkeit und ist dieselbe aus den §§. 136, 152, 162 hinreichend bekannt. Sollte aber der Schnittpunkt E unzugänglich seyn, oder könnte man von ihm aus nur ein kurzes Stück der Linien A B und A'B' übersehen, so müsste man den Winkel φ auf mittelbare Weise

Fig. 297.



dadurch bestimmen, dass man in zwei geeigneten Punkten B und G der Geraden A B und A'B' die Winkel χ und ψ misst und daraus den Winkel

$$\varphi = \chi + \psi - 180^0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (196)$$

berechnet. Die Punkte B und G müssen so liegen, dass man nicht nur von einem zum andern und beziehlich nach A und A' sehen, sondern auch von B bis G messen kann. Denn die Länge der Linie BG = e ist nöthig, um damit die Entfernungen BE = g und GE = b, deren man später zur Absteckung der Berührungspunkte bedarf, zu berechnen. Wir setzen jetzt die Winkel φ und, wo wir sie bedürfen, die Seiten e, b, g als bekannt voraus.

Ist die Verbindungscurve DSD', welche die Geraden A B, A'B' in den Punkten D, D' berührt, ein Kreis, so ist dessen Krümmungshalbmesser eine constante Grösse r, welche hier ebenfalls gegeben ist. Denkt man sich in der Fig. 297 den Mittelpunkt C des Kreises DSD' bestimmt und denselben mit den Punkten D, D', E verbunden, so entstehen zwei congruente rechtwinkelige Dreiecke CDE, CD'E, aus denen sofort die gesuchte Entfernung der Berührungspunkte D, D' von E oder

$$ED = ED' = a = r \cot {}^1/_2\, \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

folgt. Misst man diese Länge a von E aus sehr genau auf den beiden Tangenten EA, EA' ab, so erhält man auf dem Felde die Berührungspunkte D, D', die mit hinreichend starken Pfählen dauerhaft bezeichnet werden. Sollte der Punkt E unzugänglich seyn, so hätte man selbstverständlich nur von B aus die Länge a — g und von G aus die Länge a — b abzumessen, um die Punkte D und D' zu erhalten.

Sind die Geraden AB, A'B' durch eine Parabel DSD' mit einander zu verbinden, so wird der Scheitel S derselben stets in der Linie EF liegen, welche den Winkel φ halbirt, und es wird ihre Gleichung für rechtwinkelige oder Polarcoordinaten entweder bekannt seyn oder aus den gegebenen Bestimmungsstücken leicht gefunden werden können.

Es sey diese Gleichung für ein rechtwinkeliges System:

$$y^2 = px = 2rx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (198)$$

wobei r den kleinsten Krümmungshalbmesser der Parabel bezeichnet, der Ursprung der Coordinatenaxen im Scheitel der Curve liegt und die den Winkel φ halbirende Linie EF die Abscissenaxe vorstellt. Nach einer bekannten Eigenschaft der gemeinen Parabel ist die Ordinate DH des Berührungspunktes D gleich

$$y = 2x \operatorname{tg} {}^1/_2\, \varphi = r \cot {}^1/_2\, \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (199)$$

und demzufolge die Entfernung des Berührungspunktes D vom Schnittpunkte E der Tangenten gleich

$$a' = \frac{y}{\sin {}^1/_2\, \varphi} = \frac{r \cot {}^1/_2\, \varphi}{\sin {}^1/_2\, \varphi}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (200)$$

Wird diese Entfernung von E aus auf den Tangenten EA und EA' abgemessen, so erhält man die gesuchten Berührungspunkte D und D' der abzusteckenden Parabel.

§. 253. **Aufgabe. Es ist der Neigungswinkel (φ) der Tangenten einer Curve und diese selbst durch ihren Krümmungshalbmesser (r) gegeben: man soll die Entfernung des Scheitels (S) der Curve von dem Schnittpunkte (E) der Tangenten berechnen und abstecken.**

In manchen Fällen ist der Scheitel der abzusteckenden Curve für deren Aussteckung selbst nöthig, in allen Fällen aber ist es gut, die Lage desselben zur Controle der Rechnung und Messung gesondert zu bestimmen.

Stellt in Fig. 298 die Curve DSD' einen Kreisbogen vom Halbmesser r vor, und sind D, D' dessen Berührungspunkte an den Tangenten EA, EA', welche zusammen den durch die Linie EC halbirten Winkel AEA' = φ einschliessen, so ist aus bekannten geometrischen Gründen S der Scheitel des Kreises und ES = c die gesuchte Entfernung. Denkt man sich in S eine Senkrechte zu EC errichtet, so stellt dieselbe eine Tangente des Kreises vor und es ist desshalb SY = SY' = DY = D'Y' = d.

Um die Länge d auszudrücken, verbinde man den Schnittpunkt Y mit dem Mittelpunkte C des Kreises DSA', so ist offenbar

$$DCY = SCY = \frac{1}{2}(90^0 - \frac{1}{2}\varphi) = 45^0 - \frac{1}{4}\varphi \quad \ldots \quad (201)$$

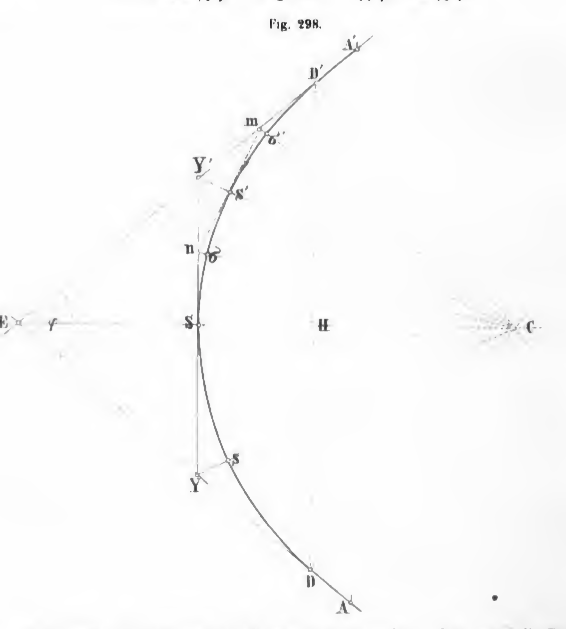
und daher aus den rechtwinkeligen Dreiecken DCY oder SCY:

$$d = r \operatorname{tg}(45^0 - \frac{1}{4}\varphi). \quad \ldots \quad (202)$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks findet man die gesuchte Entfernung des Scheitels S oder

$$c = d \cot \frac{1}{2}\varphi = r \operatorname{tg}(45^0 - \frac{1}{4}\varphi) \cot \frac{1}{2}\varphi. \quad \ldots \quad (203)$$

Fig. 298.



Will man die Tangente YSY' dadurch abstecken, dass man die Punkte Y und Y' von E aus abmisst, so ist

$$EY = EY' = f = \frac{d}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{r \operatorname{tg}(45^0 - \frac{1}{4}\varphi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi} \quad \ldots \quad (204)$$

zu nehmen. Der Schnittpunkt dieser Tangente und der Halbirungslinie EC gibt den Scheitel S, dessen Entfernung von E mit dem berechneten Werthe c übereinstimmen muss, wenn richtig gearbeitet wurde.

Ist die Curve DSD' ein Parabelbogen, so ist die Entfernung des Scheitels S von dem Punkte E durch die Gleichung

$$c' = \frac{1}{2} y \cot \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2} r \cot^2 \frac{1}{2}\varphi. \quad \ldots \quad (205)$$

welche auf der schon in dem Ausdrucke (199) benützten Eigenschaft der Parabel beruht, zu bestimmen, während die Länge EY = EY' oder

$$f = \frac{c'}{\cos {}^1/_2\, \varphi} = \frac{r \cos {}^1/_2\, \varphi}{2 \sin^2 {}^1/_2\, \varphi} \quad \ldots \ldots \quad (206)$$

und die Entfernung der Schnittpunkte Y und Y' oder SY = SY' gleich

$$d' = c' \operatorname{tg} {}^1/_2\, \varphi = {}^1/_2\, r \cot {}^1/_2\, \varphi \quad \ldots \ldots \quad (207)$$

ist. Steckt man mit Hilfe dieser Grössen die Punkte Y, S, Y' ab, so hat man damit nicht bloss den Scheitel der Parabel, sondern auch gleichzeitig deren Axen SC, SY bestimmt.

Die Richtung EC, in welcher sowohl der Scheitel der Parabel als der des Kreises liegt, steckt man am schnellsten und sichersten schon bei der Messung des Winkels φ aus, indem man nach der Bestimmung dieses Winkels und bei unverrücktem Stande des Instruments die Nonien des Horizontalkreises auf Ablesungen einstellt, welche das arithmetische Mittel aus denjenigen sind, welche den Winkel φ lieferten. Sollte der Punkt E unzugänglich seyn, so könnte auch ES nicht unmittelbar gemessen werden; in diesem Falle ist aber eine Controle der Arbeit dadurch gegeben, dass man die von den Punkten B und G (Fig. 297) aus bestimmte Tangente YY' misst und zusieht, ob deren Länge genau = 2d oder 2d' ist, je nachdem der Bogen DSD' einem Kreise oder einer Parabel angehört. Findet diese Uebereinstimmung statt, so liefert der Mittelpunkt von YY' den Scheitel S, und eine Senkrechte in demselben die Halbirungslinie EC.

§. 254. Aufgabe. Es sind die beiden Tangenten und Berührungspunkte eines Kreises von bekanntem Halbmesser gegeben: man soll den zwischen jenen Punkten enthaltenen Kreisbogen abstecken.

1) Absteckung der Curve durch Orthogonal-Coordinaten.

Bei dieser Methode wird jeder Berührungspunkt als Ursprung des rechtwinkeligen Coordinatensystems, jede Tangente als Abscissenaxe und jeder durch einen Berührungspunkt gezogene Halbmesser als Ordinatenaxe betrachtet. Kommt es bei der Absteckung nicht darauf an, dass die Bogenstücke gleich gross werden, so macht man die Abscissenunterschiede gleich; sollen aber die Bogenstücke gleich seyn, so müssen nothwendig die Abscissenunterschiede ungleich werden. Diese Verschiedenheit der Anforderungen veranlasst zwar zwei verschiedene Berechnungsweisen der Coordinaten, aber keineswegs einen Unterschied in der Art der Absteckung der Coordinaten selbst. Wir werden hier zunächst diese zwei Fälle und hierauf noch den Fall behandeln, in welchem der für die Absteckung gebotene Raum sehr beschränkt ist.

a) Die Abscissenunterschiede sollen gleich seyn.

Bezeichnet in Fig. 299 D den Berührungspunkt, DE die Abscissenaxe und DC die Ordinatenaxe, so ist für irgend einen Curvenpunkt p, dessen Abscisse Dm = x ist, die zugehörige Ordinate

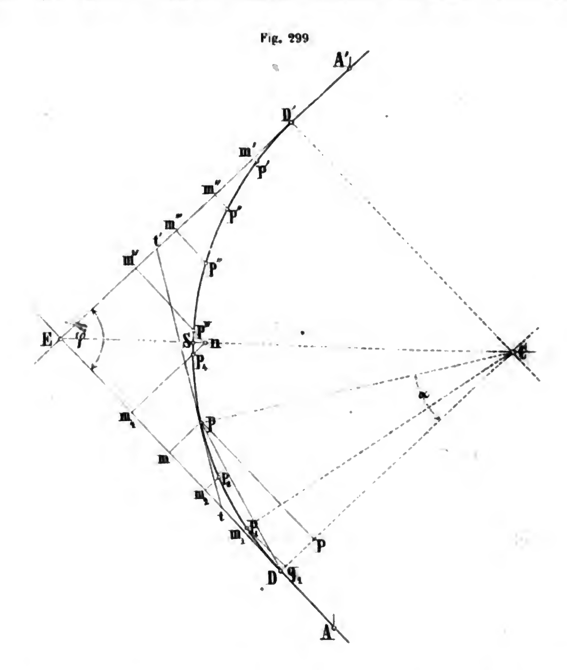
$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (208)$$

Da r gegeben ist, so lässt sich hieraus für jedes x das entsprechende y berechnen. Man wird zu dem Ende

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{(r + x)(r - x)}$$

setzen, mit Hilfe der Logarithmen erst alle Wurzelwerthe herstellen und diese schliesslich von dem Halbmesser r abziehen, vorausgesetzt, dass man keine Tabelle besitzt, in der die gesuchten Ordinatenwerthe schon enthalten sind. Wir haben für unseren früheren Gebrauch eine solche Tabelle theils

Fig. 299



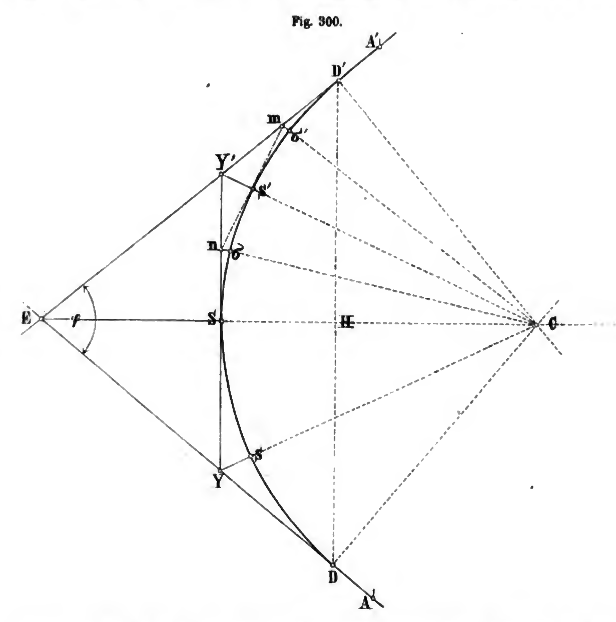
selbst berechnet, theils berechnen lassen, und theilen sie nun im Anhange unter Nr. XVI mit. Darin findet man die Coordinaten für r = 100 Fuss bis r = 7000 Fuss, und für Abscissenunterschiede von 10, 20, 25 und 50 Fuss.

Da in den meisten praktischen Fällen die Grösse des Halbmessers innerhalb gewisser Gränzen beliebig gewählt werden darf, so kann man es fast immer dahin bringen, dass r einen der Werthe erhält, welche in der Tabelle

dafür angenommen sind; man braucht also nur noch in wenigen Fällen die Coordinaten selbst zu rechnen.

Sind die Coordinatenwerthe bekannt, so beginnt die Absteckung der Curve damit, dass man auf den Tangenten DE, D'E von den Berührungspunkten D, D' aus die Abscissen mit der Messkette oder mit Messlatten abmisst und ihre Endpunkte vorläufig bezeichnet. Hierauf errichtet man in diesen Endpunkten mit Hilfe des Winkelspiegels oder Prismenkreuzes Senk-

Fig. 300.



rechte, misst darauf mit Ruthenstäben die berechneten Ordinaten ab und bezeichnet deren Endpunkte durch Pfähle, welche etwa 1 Fuss über dem Boden vorstehen, so sind dieses Punkte des abzusteckenden Kreisbogens. Zeigt sich nach dieser Absteckung, dass die beiden Curvenzweige DS, D'S ohne Unterbrechung ihrer Stetigkeit an dem bereits vorher ausgesteckten Scheitel S in einander übergehen, so kann diese Beobachtung als ein günstiges Zeichen für die Genauigkeit der Arbeit angesehen werden; findet aber dieser stetige Uebergang nicht statt, so hat man vor allen Dingen seine Rechnung zu prüfen, und wenn sich hierin kein Fehler herausstellt die Messung,

Berechnung und Absteckung aller Hilfsgrössen zu wiederholen. Eine weitere Prüfung der ganzen Arbeit besteht darin, dass man die Bogenlängen Dp_1, Dp_2, Dp ... berechnet, und sich durch unmittelbare Messung überzeugt, ob die abgesteckten Bogenlängen mit den berechneten übereinstimmen oder nicht. Wegen Berechnung der Bögen Dp_1, Dp_2, Dp .... bedarf es wohl nur der Bemerkung, dass für irgend einen Punkt p, der x zur Abscisse hat, der zugehörige Bogen gleich ist

$$Dp = \text{arc sin}\left(\frac{x}{r}\right). \quad \ldots \ldots \quad (209)$$

Will man bei grossen Curven die langen Ordinaten, welche in der Nähe des Scheitels abzustecken wären, vermeiden, so theilt man den abzusteckenden Kreisbogen DSD' nach Fig. 300 in vier gleiche Theile, indem man die Zwischentangente YSY' herstellt, und steckt jeden dieser Theile gerade so ab, wie vorher die Curvenzweige DS, D'S. Es versteht sich dabei von selbst, dass für die Bögen Ss, Ss' dieselben Coordinatenwerthe gelten, welche den Bögen Ds, D's' angehören; und dass man die Entfernungen der Scheitelpunkte s und s' von Y und Y' ganz in derselben Weise bestimmt, wie es in §. 253 für S geschehen ist.

b) Die Bogenstücke sollen gleich seyn.

Wenn der Halbmesser r des abzusteckenden Kreisbogens und der Winkel φ seiner Tangenten, somit auch die Lage der Berührungspunkte gegeben ist, so kennt man damit auch die Länge des zwischen diesen Punkten enthaltenen Bogens und kann folglich bestimmen, in wie viele gleiche Theile der letztere getheilt werden soll. Man wählt hier gerne eine gerade Anzahl Theile, damit der Scheitel des Bogens von seinen Nachbarpfählen eben so weit absteht, als jeder Curvenpfahl von dem seinigen.

Nehmen wir an, dass der ganze Bogen in 2n gleiche Theile zerlegt werde, so entspricht jedem Bogenstücke ein Mittelpunktswinkel von der Grösse

$$\alpha = \frac{180^0 - \varphi}{2n} \quad \ldots \ldots \quad (210)$$

und eine Länge

$$l = 0{,}01745\, \alpha\, r, \quad \ldots \ldots \quad (211)$$

wobei jedoch α in Graden auszudrücken ist.

Stellt in Fig. 301 wieder DSD' den abzusteckenden Kreisbogen, D den einen und D' den anderen Berührungspunkt vor, so ist für irgend einen Curvenpunkt p, welcher um den Bogen $Dp = ul$ von D entfernt ist, die Abscisse

$$Dm = x = r \sin(u\,\alpha) \quad \ldots \ldots \quad (212)$$

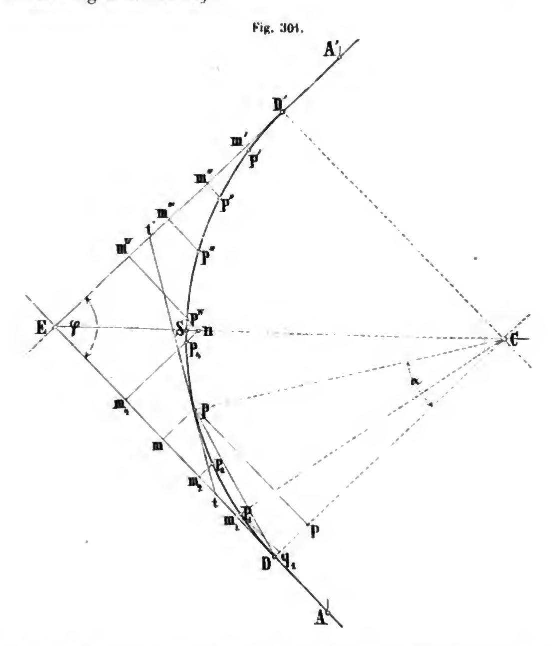
und die Ordinate

$$mp = y = 2r \sin^2(\tfrac{1}{2}\, u\, \alpha). \quad \ldots \ldots \quad (213)$$

Nimmt man nach und nach u gleich 1, 2, 3, 4 u. s. f. bis $u = n$, so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen die den Punkten p_1, p_2, p .... S zugehörigen Coordinatenwerthe x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 u. s. w.; und trägt man dieselben in der sub lit. a angegebenen Weise auf dem Felde

auf, so findet man daselbst die gesuchten Curvenpunkte p_1, p_2, p, p_4 u. s. f. bis zum Scheitel S. Zeigt sich nach der Absteckung, dass der aus den Coordinaten bestimmte Scheitelpunkt mit dem nach §. 253 gefundenen zusammentrifft, und bemerkt man, indem man von Pfahl zu Pfahl vorwärts geht und von jedem nach dem zweitnächsten visirt, keinen Unterschied in den Abständen der nächstliegenden Pfähle von diesen Visirlinien, sind also die Pfeile dem Augenmasse nach alle einander gleich, so kann man mit der Absteckung zufrieden seyn.

Fig. 301.



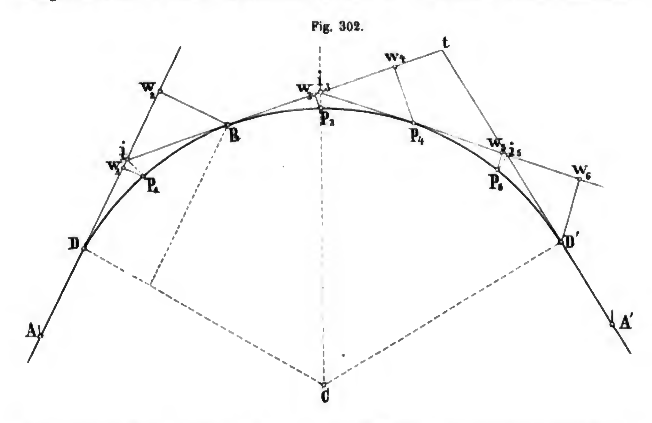
Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass eine Zwischentangente gelegt wird, wenn die Coordinaten in der Nähe des Scheitels zu lang und folglich mühsam abzustecken sind. Wie diese im Scheitel herzustellen ist, wurde schon früher gezeigt; man kann sie aber auch an irgend einem anderen bereits abgesteckten Punkte, z. B. in p, nöthig haben. In diesem Falle darf man nur in p einen Theodolithen centrisch und horizontal aufstellen, von p nach D visiren, die Nonien ablesen und hierauf die Alhidade

um den Winkel $u\alpha$ in dem entsprechenden Sinne drehen, so wird die Visirlinie des Fernrohrs in der Richtung der neuen Tangente stehen. Steckt man nun den Stab t aus, so kann man die Linie tp rückwärts gegen S hin verlängern; lässt sich aber das Fernrohr durchschlagen, so kann man sofort einen Stab t′ in die Tangente, welche man sucht, einrichten. Von p aus geht dann selbstverständlich die Curvenabsteckung in derselben Weise weiter, wie von D gegen p hin.

c) Der freie Raum für die Absteckung ist sehr beschränkt.

Auch wenn man eine Zwischentangente legt, ist der freie Raum, welchen die Absteckung mittels Coordinaten fordert, bei grösseren Curven sehr ausgedehnt und desshalb nicht immer zu haben. In solchen Fällen muss man

Fig. 302.



sich einzuschränken wissen, d. h. man muss Methoden der Curvenabsteckung kennen, welche auf verhältnissmässig schmalem Raume ausführbar sind.

Nachstehend theilen wir zwei solche Methoden mit, welche sich zwar ebenfalls auf die Orthogonalcoordinaten gründen, aber keineswegs so zuverlässig sind, wie die unter (a) und (b) besprochenen Verfahrungsweisen.

α) Betrachtet man nämlich in Fig. 302 die Tangente i_1 t, so ist klar, dass der Punkt i_1, in welchem sie die Tangente Dw_2 schneidet, von p_2 und D gleich weit abliegt, und dass er sich in dem verlängerten Halbmesser Cp_1, welcher den Winkel DCp_2 halbirt, befindet. Der Fusspunkt w_1 der Ordinate $p_1\ w_1$ liegt von i_1 um eine kleine Grösse $w_1\ i_1$ ab, welche sich aus der Ordinate $p_1\ w_1$ und dem Winkel $w_1\ p_1\ i_1 = \frac{1}{2}\ (u\ \alpha)$ leicht berechnen lässt; es ist nämlich

$$w_1\ i_1 = \xi = y\ \mathrm{tg}\ (\tfrac{1}{2}\ u\ \alpha). \quad \ldots \ldots \quad (214)$$

Berechnet man hieraus die Länge ξ und trägt sie an Dw_1 an, so erhält

man einen Punkt i_1, der in der Tangente i_1 t liegt und also zu deren Absteckung dient, wenn man den Punkt p_1 bereits hat. Geht der Winkel $\frac{1}{2}$ u α in α über, indem u = 2 wird, so darf in dem vorliegenden Falle, wo α stets ein kleiner Winkel ist, annähernd

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha \operatorname{tg} 1^0 = 0{,}01745\, \alpha$$

und folglich auch

$$\xi = 0{,}01745\, \alpha\, y \quad \ldots \ldots \ldots \quad (215)$$

gesetzt werden. Bei der Berechnung des Werthes von ξ aus der letzten Gleichung ist zu berücksichtigen, dass α in Graden ausgedrückt werden muss, und dass man alsdann ξ in derselben Längeneinheit erhält, in welcher y gegeben ist. Ist übrigens der Halbmesser des abzusteckenden Kreisbogens sehr gross, so wird ξ so klein, dass man es gegen x vernachlässigen kann.

Hat man nun von D aus einen Kreisbogen von dem Halbmesser r abzustecken, welcher die Tangente Dw_2 in D berührt und dessen Bogenstücke Dp_1, $p_1 p_2$, $p_2 p_3$ u. s. w. einander gleich werden sollen, so berechne man sich vor Allem die Winkel $DCp_1 = \alpha$ und $DCp_2 = 2\alpha$ nach Gleichung (210) und hiemit die Abscissen

$$x_1 = r \sin \alpha \;\; ; \;\; x_2 = r \sin 2\alpha,$$

sowie die zugehörigen Ordinaten

$$y_1 = 2r \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha \;\; ; \;\; y_2 = 2r \sin^2 \alpha.$$

Ferner berechne man mit Hilfe von y_1 die Länge

$$\xi = 0{,}01745\, \alpha\, y_1$$

und stecke die Punkte p_1 und p_2 durch Abmessen dieser Coordinatenwerthe ab, indem man $Dw_1 = x_1$, $Dw_2 = x_2$; $w_1 p_1 = y_1$ und $w_2 p_2 = y_2$ macht. Steckt man weiter in dem Punkte i_1, welcher um die Grösse ξ von w_1 absteht, einen Stab ein, so erhält man die Tangente $i_1 p_2$, auf der man abermals die Abscissenwerthe $p_2 w_3 = x_1$ und $p_2 w_4 = x_2$ abtragen kann, um auf den in w_3 und w_4 errichteten Senkrechten die Ordinaten $y_1 = w_3 p_3$ und $y_2 = w_4 p_4$ abzumessen. Die Tangente $i_3 p_4$, von der aus die Punkte p_5 und D' bestimmt werden, erhält man in derselben Weise wie $i_1 p_2$ und alle folgenden eben so. Es versteht sich von selbst, dass, wenn der Winkel α nach Gleichung (210) bestimmt und die Absteckung stets nach einer Richtung fortgesetzt wurde, der n^{te} Curvenpunkt mit dem Scheitel (S) und der $(2n)^{te}$ mit dem zweiten Berührungspunkte D' zusammentreffen muss. Besser ist es jedoch, wenn man nur den halben Bogen von D aus, die andere Hälfte aber von D' aus vornimmt und zusieht, ob beide Curvenzweige durch den vorher bestimmten Scheitel gehen, ohne sich daselbst zu schneiden.

β) Es sey für den Punkt p_1 in Fig. 303 nach den Gleichungen (210) bis (213):

der Winkel $DCp_1 = \alpha = \dfrac{180^0 - \varphi}{2n}$,
der Bogen $Dp_1 = l = 0{,}01745\, \alpha\, r$,
die Abscisse $Dw_1 = x_1 = r \sin \alpha$,
die Ordinate $p_1 w_1 = y_1 = 2r \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha$.

Zieht man die Sehne $D p_1$ über den Kreis hinaus, macht $p_1 p_2 = D p_1$, so ist der Winkel $w_2 p_1 p_2 = \alpha$; verlängert man $p_1 p_2$ und macht $p_2 p_3 = p_1 p_2 = D p_1$, so wird auch der Winkel $w_3 p_2 p_3 = \alpha$ u. s. f. Würde man die Sehnen $p_1 p_2 = p_2 p_3 = p_3 p_4 \ldots\ldots = s$ kennen, so hätte man

die Abscissen $p_1 w_2 = p_2 w_3 = p_3 w_4 \ldots\ldots = \xi = s \cos \alpha$,

die Ordinaten $p_2 w_2 = p_3 w_3 = p_4 w_4 \ldots\ldots = \eta = s \sin \alpha$,

und es liessen sich folglich die Punkte p_2, p_3, p_4 mit Hilfe dieser Coordinaten leicht abstecken. Nun ist aber die Sehne

$$s = 2r \sin {}^1/_2\, \alpha$$

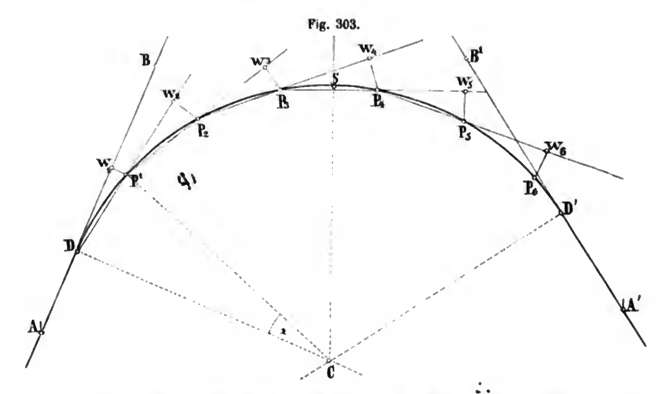
und, wenn man α in Bogenmass ausdrückt und die Sinusreihe bis zur dritten Potenz anwendet:

$$\sin {}^1/_2\, \alpha = \sin\left(\frac{l}{2r}\right) = \frac{l}{2r} - \frac{1}{6}\left(\frac{l}{2r}\right)^3;$$

folglich, nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$s = l\left(1 - \frac{1}{24}\left(\frac{l}{r}\right)^2\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (216)$$

Fig. 303.



Bedenkt man, dass das Verhältniss von l zu r bei Strassencurven höchstens $^1/_7$, bei Eisenbahncurven höchstens $^1/_{20}$ und manchmal sogar $^1/_{100}$ beträgt, so sieht man ein, dass in allen Fällen $s = l$ gesetzt werden darf, da hierdurch die Werthe von ξ und η im ungünstigsten Falle um $^1/_{1000}$ zu gross werden.

Unter dieser Annahme wird

$$\left.\begin{array}{l}\text{die Abscisse } \xi = s \cos \alpha = l \cos \alpha \\ \text{die Ordinate } \eta = s \sin \alpha = l \sin \alpha\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (217)$$

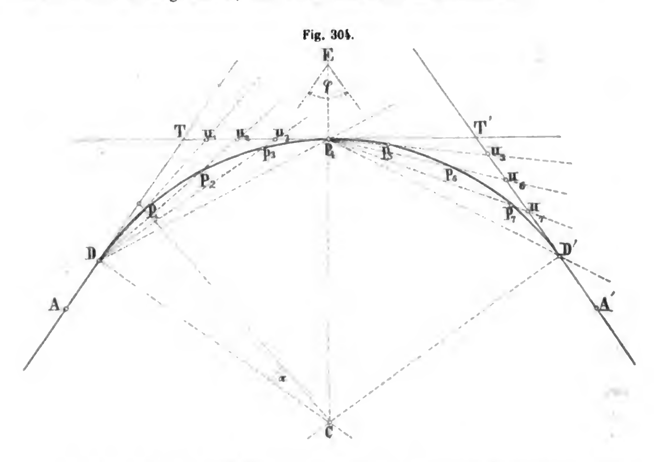
Werden diese Coordinatenwerthe berechnet, so besteht die Absteckung bloss darin, dass man auf der verlängerten Sehne $D p_1$ die Abscisse $\xi = p_1 w_2$

abmisst, in w_2 eine Senkrechte $w_2 p_2 = \eta$ errichtet, hierauf die Sehne $p_1 p_2$ um das Stück $p_2 w_3 = \xi$ verlängert, die Senkrechte $w_3 p_3 = \eta$ macht, und so fortfährt, bis man entweder im Scheitel des Bogens oder am zweiten Berührungspunkte D' angekommen ist.

2) Absteckung der Curven durch Polarcoordinaten.

Stellt die Linie DE in Fig. 304 die eine Tangente des abzusteckenden Kreisbogens DD' und D den Berührungspunkt beider vor; denkt man sich ferner den Bogen in die gleichen Theile $D p_1$, $p_1 p_2$, $p_2 p_3$ u. s. w. getheilt und die Sehnen $D p_1$, $D p_2$, $D p_3$ ... gezogen: so erscheinen letztere als Fahrstrahlen (Radienvectoren), welche in dem Pole D mit der Axe DE beziehlich die Winkel $T D p_1 = \beta$, $T D p_2 = 2\beta$, $T D p_3 = 3\beta$ u. s. w. bilden. Kann man nun diese Winkel nach einander an die Tangente DT antragen und die Längen $D p_1$, $D p_2$, $D p_3$ ... der Fahrstrahlen bestimmen, so wird dadurch die Curve DD' abgesteckt, und zwar mittels Polarcoordinaten.

Fig. 304.



Ist aber wieder wie früher der Winkel φ und der Halbmesser r des abzusteckenden Kreises gegeben, so wird, wenn man den ganzen Bogen DD' in 2n gleiche Theile zerlegt, nach Gleichung (210) der Centriwinkel $D C p_1$ oder

$$\alpha = \frac{180^0 - \varphi}{2n},$$

und folglich der Winkel $T D p_1$, welcher halb so gross als α ist, d. i.

$$\beta = \frac{180^0 - \varphi}{4n}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (218)$$

Die Länge jedes Bogenstückes (Dp_1, $p_2 p_3$, $p_2 p_3$ ...), welche gleich

$$l = 0{,}01745\,\alpha\,r$$

ist, kann nach der Bemerkung zur Gleichung (211) der Länge seiner Sehne gleich gesetzt werden, weil man dadurch nur einen für die Praxis verschwindenden Fehler begeht. Will man die Curvenpunkte p_1, p_2, p_3 ... auf dem Felde bestimmen, so stelle man in D einen Theodolithen centrisch und horizontal auf, stelle das Fernrohr genau in die Richtung DT ein und lese die beiden Nonien des Horizontalkreises ab. Addirt man hierauf zu diesen Ablesungen den einfachen Winkel β und stellt die Nonien auf die neuen Ablesungen ein, so muss die Visirlinie in der Richtung Dp_1 liegen. Winkt man in dieser Richtung einen Stab ein und lässt in derselben die Länge l genau abmessen, so erhält man den Punkt p_1. Addirt man wieder den Winkel β zu den letzten Ablesungen und stellt die Nonien auf diese neuen Ablesungen ein, so hat man das Fernrohr gegen seine erste Stellung um 2β gedreht und es zeigt folglich jetzt die Richtung Dp_2 an. Um den Punkt p_2 zu erhalten, muss von p_1 aus die Länge l so abgemessen werden, dass der zweite Endpunkt p_2 derselben in der Richtung Dp_2 liegt, was am bessten dadurch geschieht, dass man den Abstand der beiden Kettenstäbe der Messkette genau = l macht und von D aus den zweiten Stab einvisirt, während der erste in p_1 steht. Der dritte, vierte, überhaupt jeder folgende Punkt wird genau so wie p_2 bestimmt. Ist richtig gearbeitet worden, so muss man im Verfolge dieser Absteckung mit einem Punkte in dem Scheitel und einem in dem zweiten Berührungspunkte eintreffen.

Da es jedoch immer mit einigen Schwierigkeiten verknüpft ist, die Messkette kürzer oder länger zu machen, als sie vom Anfang an ist, so thut man in dem vorliegenden Falle besser, den abzusteckenden Kreisbogen nicht in 2n gleiche Theile zu theilen, sondern von einem Berührungspunkte (D) aus fort und fort Bogenstücke von der Länge l, welche der Kettenlänge gleich ist, wenn der Krümmungshalbmesser mindestens 500 Fuss beträgt, abzuschneiden, bis man am zweiten Berührungspunkte (D') ankommt, der selbstverständlich nur zufällig mit einem der auf diesem Wege abgesteckten Punkte zusammentreffen wird, wie das auch mit dem Scheitel der Fall ist. Aber man wird im Voraus berechnen können, wie der Scheitel und der zweite Berührungspunkt gegen die nächsten Curvenpunkte liegen müssen.

Wir wollen zu dem Ende die Kettenlänge l' nennen; dann ist der Centriwinkel, welcher einem Bogen von der Länge l' entspricht:

$$\alpha' = 57{,}3\,\frac{l'}{r}\ \text{Grad} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (219)$$

und der Peripheriewinkel, der zu dem Bogen l' gehört:

$$\beta' = 28{,}65\,\frac{l'}{r}\ \text{Grad.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (220)$$

Da nun der ganze Kreisbogen DD' einen Mittelpunktswinkel

$$\gamma = 180^0 - \varphi$$

hat, so erhält man seine Länge

$$L = 0{,}01745\,\gamma\,r$$

und die Anzahl der zwischen D und D' abzuschneidenden Bogenstücke von der Länge l':

$$u = \frac{\gamma}{\alpha'} = \frac{L}{l'}.$$

Versteht man unter ν die Ganzen und unter ε die Bruchtheile, aus denen die Zahl u besteht, so dass also

$$u = \nu + \varepsilon$$

ist, so wird der letzte Curvenpunkt, den man auf die oben beschriebene Weise mit Hilfe der Werthe von l' und β' noch abstecken kann, von dem zweiten Berührungspunkte D' um einen Bogen

$$\lambda = \varepsilon\, l'$$

abstehen, wenn richtig gearbeitet worden ist. Den Abstand λ' des Scheitels vom nächst vorhergehenden Curvenpunkte erhält man dadurch, dass man die Grössen γ', L', u', ν', ε', λ' gerade so auf den halben Bogen $D p_4 = D' p_4$ bezieht, wie vorher γ, L, u, ν, ε, λ auf den ganzen Bogen.

Die eben beschriebene Methode der Curvenabsteckung würde ein sehr günstiges, d. i. ein ebenes und völlig freies Terrain erfordern, wenn man sie mit einem einzigen Standpunkte des Instruments (in D) ausführen wollte. Dieser Standpunkt kann aber sehr leicht verlegt und dadurch das freie Terrain, dessen man bedarf, auf einen schmalen Raum beschränkt werden. Denn nimmt man an, dass die Absteckung bis zu dem Punkte p_4 gediehen ist und dass schon der Punkt p_5 nicht mehr einvisirt werden kann, so lässt sich sicher das Instrument in p_4 aufstellen und nach D zurückvisiren. Dieses thut man auch, liest die Nonien ab und dreht die Alhidade um den Winkel $D p_4 T = p_4 D T = 4\beta$ (oder $= 4\beta'$), so dass die Visirlinie in die Richtung $p_4 T$ kommt, welche nun der neuen Tangente angehört. Schlägt man hierauf das Fernrohr durch, so kann man ausser dem Punkte T, der vorhin abgesteckt wurde, auch noch einen Punkt T' ausstecken, der in der Tangente liegt, und nun die Arbeit in derselben Weise fortsetzen, wie sie in D begonnen wurde. Liesse sich das Fernrohr des Theodolithen nicht durchschlagen, so müsste man es in seinem Lager umlegen, damit die Absehlinie den noch abzusteckenden Punkten zugewendet wird. Gienge aber beides nicht an, so müsste die Alhidade genau um 180° gedreht werden, wodurch die Visirlinie, wenn das Instrument und die Arbeit fehlerfrei sind, wiederum in die Richtung $p_4 T'$ gebracht würde. Es versteht sich übrigens von selbst, dass zu den Ablesungen der Nonien, welche für die Visirlinie $p_4 T'$ gelten, zunächst wieder nur der einfache, dann der zwei-, drei-, vier- und fünffache Winkel β zu addiren ist, und eben so versteht es sich von selbst, dass, wenn die Absteckung in dem Punkte D' begonnen hätte und folglich von der Rechten gegen die Linke fortgeschritten wäre, die Vielfachen des Winkels β von den Ablesungen der Nonien des Horizontalkreises abzuziehen gewesen wären.

3) Vergleichung der vorhergehenden Methoden des Curvenabsteckens.

Ohne Zweifel verdient bei jeder Messung diejenige Methode den Vorzug, welche unter gegebenen Umständen am sichersten und einfachsten zu einer völlig genügenden Lösung der vorgelegten Aufgabe führt. Es ist daher, weil die äusseren Umstände sehr verschieden seyn können, keine Methode als die absolut besste oder schlechteste zu bezeichnen, sondern es kann nur mit Bezug auf gleiche Localverhältnisse von besseren oder schlechteren Methoden die Rede seyn.

Ist das Terrain fest und nicht sehr durchschnitten, so verdienen die unter Nr. 1,a und Nr. 1,b auseinander gesetzten Coordinaten-Methoden entschieden den Vorzug vor jeder anderen Methode, und zwar desshalb, weil die Absteckung eines jeden Curvenpunktes unabhängig von der eines anderen geschieht und daher der Fehler, welcher bei einem Punkte begangen wurde, sich nicht auf alle folgenden Punkte überträgt. Diese Unabhängigkeit der Curvenpunkte von einander kommt bei keiner anderen Methode vor. Denn bei der Methode 1,c,α (Seite 420) hängen die Punkte p_3 und p_4, obwohl sie durch Coordinaten abgesteckt werden, doch von dem Punkte p_2 ab, weil durch diesen die Tangente gelegt wird, auf die sich die Absteckung von p_3 und p_4 gründet; und was von p_3 und p_4 in Bezug auf p_2 gilt, lässt sich auch von p_5 und p_6 in Bezug auf p_4, von p_7 und p_8 in Bezug auf p_6 u. s. w. sagen. Bei der auf Seite 421 unter Nr. 1,c,β dargestellten Methode springt die Abhängigkeit jedes folgenden Punktes von dem vorhergehenden von selbst in die Augen, und auch bei der auf Polarcoordinaten gegründeten Methode (Seite 423) erkennt man diese Abhängigkeit leicht, da jeder folgende Punkt von dem vorhergehenden aus abgeschnitten wird.

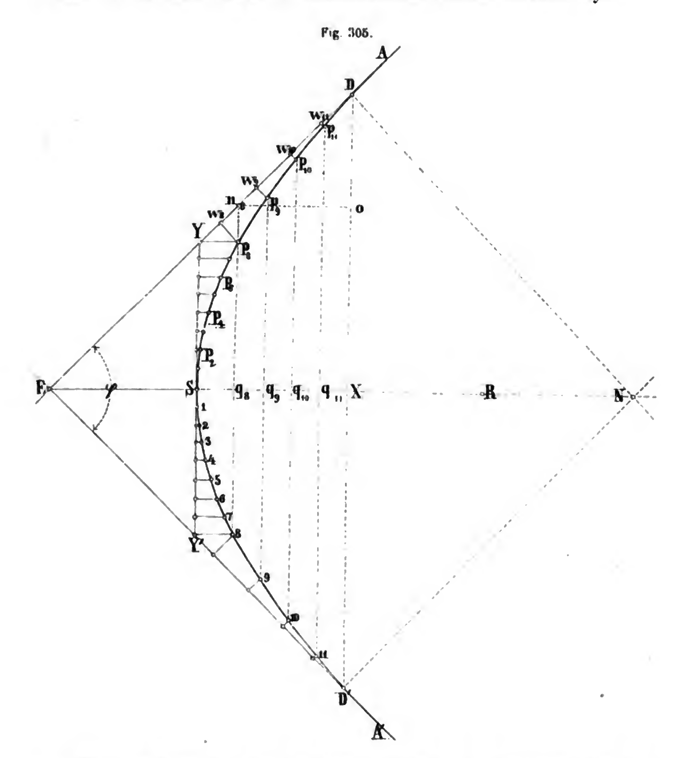
Wenn aber eine Curve entweder auf einem hohen Damme, oder in einem tiefen Einschnitte, oder in einem stark abfallenden, oder von vielen Bäumen, Häusern und dergleichen besetzten Terrain abzustecken ist, so verursacht das Abmessen der Coordinaten nach Nr. 1,a und Nr. 1,b nicht bloss sehr viele Mühe, sondern auch eine Unsicherheit wegen der schiefen Flächen, auf denen horizontale Entfernungen zu bestimmen sind. In solchen Fällen ist es daher besser, sich einer unter Nr. 1,c erklärten Methode oder des in Nr. 2 beschriebenen Verfahrens zu bedienen. Namentlich ist das letztere zu empfehlen, das sich, wenn man ein gutes Winkelmessinstrument besitzt, nicht nur leicht, sondern auch mit hinreichender Genauigkeit, selbst unter schwierigen Terrainverhältnissen, ausführen lässt.

§. 255. **Aufgabe. Es sind die beiden Tangenten und Berührungspunkte einer Parabel von bekanntem Parameter gegeben: man soll den zwischen jenen Punkten liegenden Parabelbogen ausstecken.**

Es wird in allen Fällen genügen, wenn man die vorliegende Aufgabe mit Hilfe eines rechtwinkeligen Coordinatensystems löst und dabei folgende Axen annimmt: für die Bogenstücke zu beiden Seiten des Scheitels die Ordinatenaxe YY' und für die Curvenzweige an den Berührungspunkten die

beiden Tangenten DE und D'E der Parabel. Sind in Fig. 305 die Berührungspunkte D, D', der Scheitel S und die Axenschnittpunkte Y, Y' nach §. 252 und 253 bestimmt, so handelt es sich zunächst um die Berechnung der Coordinaten der Bogenstücke Sp_8 und S8, welche mit Hilfe der Axe YY' abgesteckt werden sollen. Da aber beide Bögen einander gleich sind, so wird fortan nur von einer Hälfte der abzusteckenden Parabel die Rede seyn.

Fig. 305.



Für den Bogen Sp_8 und die Axen SX, SY ist die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2rx,$$

woraus man für irgend einen Punkt p die Abscisse

$$x = \frac{y^2}{2r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (221)$$

erhält. Die Ordinaten $y_1, y_2, y_3, \ldots y_8$ der Punkte $p_1, p_2, p_3 \ldots p_8$ werden so angenommen, dass ihre Unterschiede $y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2 \ldots y_8 - y_7$ einander gleich und so gross werden, wie es der kleinste Krümmungshalbmesser (r) der Parabel erfordert und die Coordinatentabelle Nr. XVI für Kreisbögen andeutet. Die Absteckung der berechneten Coordinatenwerthe geschieht selbstverständlich gerade so wie bei Kreisbögen.

Für den Curvenzweig $D p_8$ und die Axen DE, DN kann man entweder eine neue Gleichung der Parabel entwickeln, oder aber auf folgende Weise die Formeln zur Berechnung der Coordinaten herstellen.

Heissen die Abscissen der Punkte $p_8, p_9, p_{10}, p_{11} \ldots$ nach einander $\xi_8, \xi_9, \xi_{10}, \xi_{11} \ldots$ und die zugehörigen Ordinaten $\eta_8, \eta_9, \eta_{10}, \eta_{11} \ldots$, so ist für p_8:

$$\eta_8 = w_8 p_8 = n_8 p_8 \cos {}^1/_2\, \varphi \text{ und}$$
$$\xi_8 = w_8 D = n_8 D + n_8 p_8 \sin {}^1/_2\, \varphi.$$

Um die Linie $n_8 D$ auszudrücken, denke man sich $n_8 o$ parallel zu SX gezogen und, wie früher geschehen, die Abscisse von D oder $SX = c'$ gesetzt, so ist

$$n_8 o = q_8 X = c' - x_8 = n_8 D \cos {}^1/_2\, \varphi,$$

und hieraus die gesuchte Länge von

$$n_8 D = \frac{c' - x_8}{\cos {}^1/_2\, \varphi} = \varepsilon_8. \quad \ldots \ldots \quad (222)$$

Eben so leicht ist $n_8 p_8$ zu finden; denn da $n_8 p_8 = n_8 q_8 - p_8 q_8 = n_8 q_8 - y_8$ und aus den beiden ähnlichen Dreiecken ESY und $E q_8 n_8$, in welchen $ES = c'$, $SY = d'$ bekannt und $E q_8 = c' + x_8$ ist, $n_8 q_8$ sich ergibt, so erhält man nach einer einfachen Rechnung:

$$n_8 p_8 = d' \left(1 + \frac{x_8}{c'}\right) - y_8 = \delta_8. \quad \ldots \ldots \quad (223)$$

Setzt man die Werthe von δ_8 und ε_8 in die Ausdrücke für η_8 und ξ_8, so gehen dieselben über in

$$\left.\begin{array}{l} \eta_8 = \delta_8 \cos {}^1/_2\, \varphi \text{ und} \\ \xi_8 = \varepsilon_8 + \delta_8 \sin {}^1/_2\, \varphi \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (224)$$

Um η und ξ zu berechnen, wird man demnach zuerst für beliebige Werthe von x die zugehörigen Werthe von δ und ε herstellen und diese in die voranstehenden Ausdrücke einsetzen. Man hat es dadurch zwar nicht in seiner Gewalt, die Abscissenunterschiede $\xi_8 - \xi_9$, $\xi_9 - \xi_{10}$ u. s. w. einander gleich zu machen; es ist aber dafür um so leichter, die Coordinaten irgend eines aus der Gleichung $y^2 = 2rx$ bestimmten Punktes der Parabel für die Axen DE und DN anzugeben.

Beträgt z. B. der kleinste Krümmungshalbmesser (r) am Scheitel einer Parabel 960 Fuss und der Winkel (φ), den die beiden Tangenten DE, D'E bilden, 124° 28', so sind zur Absteckung dieser Curve, deren Gleichung

$$y^2 = (2 \times 960)\, x = 1920\, x$$

ist, folgende Rechnungen nöthig.

Die Entfernung der Berührungspunkte D und D' vom Schnittpunkt E erhält man nach Gleichung (201) gleich

$$a' = \frac{r \cot {}^1\!/_2\, \varphi}{\sin {}^1\!/_2\, \varphi} = \frac{960 \cot 62^0\, 14'}{\sin 62^0\, 14'} = 571',2;$$

der Abstand des Scheitels S vom Punkte E ist nach Gleichung (206) gleich

$$c' = {}^1\!/_2\, r \cot^2 {}^1\!/_2\, \varphi = 133',06$$

und das Axenstück SY = SY' nach Gleichung (207) gleich

$$d' = c \operatorname{tg} {}^1\!/_2\, \varphi = 252',72.$$

Lässt man die auf SY gezählten Ordinaten von 30 zu 30 Fuss wachsen, so erhält man nach Gleichung (221) für den Punkt

p_1 die Ordinate $y_1 = 30'$ und die Abscisse $x_1 = 0{,}468$
p_2 „ „ $y_2 = 60'$ „ „ „ $x_2 = 1{,}880$
p_3 „ „ $y_3 = 90'$ „ „ „ $x_3 = 4{,}218$
⋮ ⋮ ⋮
p_8 „ „ $y_8 = 240'$ „ „ „ $x_8 = 30{,}000.$

Wenn von dem Punkte p_8 an die Absteckung von der Tangente DE aus geschieht, so kann man jetzt die auf der Axe SX gemessenen Abscissen wieder von 30 zu 30 Fuss wechseln lassen, so dass $Sq_8 = x_8 = 30'$; $Sq_9 = x_9 = 60'$; $Sq_{10} = x_{10} = 90'$; $Sq_{11} = x_{11} = 120'$ und $SX = x_{12} = c' = 133',06$ wird. Setzt man diese Werthe von x nach und nach in die Gleichung $y^2 = 2rx$, so erhält man die zugehörigen Ordinaten $y_8 = 240'$; $y_9 = 339',41$; $y_{10} = 415',69$; $y_{11} = 480',00$; $y_{12} = DX = 505{,}44$; und mit Benützung dieser Coordinatenwerthe findet man aus Gleichung (223):

$$\begin{aligned}
\delta_8 &= 252{,}72 + 1{,}9\, x_8 - y_8 = 69',72;\\
\delta_9 &= 252{,}72 + 1{,}9\, x_9 - y_9 = 27',31;\\
\delta_{10} &= 252{,}72 + 1{,}9\, x_{10} - y_{10} = 8',02;\\
\delta_{11} &= 252{,}72 + 1{,}9\, x_{11} - y_{11} = 0',72;\\
\delta_{12} &= 252{,}72 + 1{,}9\, c' - y_{12} = 0{,}00;
\end{aligned}$$

und aus der Gleichung (222):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_8 &= 2{,}1465\,(c' - x_8) = 221',22;\\
\varepsilon_9 &= 2{,}1465\,(c' - x_9) = 156',81;\\
\varepsilon_{10} &= 2{,}1465\,(c' - x_{10}) = 92',43;\\
\varepsilon_{11} &= 2{,}1465\,(c' - x_{11}) = 28',03;\\
\varepsilon_{12} &= 2{,}1456\,(c' - x_{12}) = 0{,}00.
\end{aligned}$$

Nunmehr ergeben sich die gesuchten Coordinaten der Punkte p_8 bis p_{12} nach Gleichung (223) sehr einfach, nämlich

für p_8 die Abscisse $\xi_8 = 282',90$ und die Ordinate $\eta_8 = 32',48$ [1]
„ p_9 „ „ $\xi_9 = 180',86$ „ „ „ $\eta_9 = 12',72$
„ p_{10} „ „ $\xi_{10} = 99',40$ „ „ „ $\eta_{10} = 3',74$
„ p_{11} „ „ $\xi_{11} = 28',54$ „ „ „ $\eta_{11} = 0',33$
„ p_{12} „ „ $\xi_{12} = 0{,}00$ „ „ „ $\eta_{12} = 0{,}00.$

[1] Da der Punkt p_8 schon durch die auf die Axe SY bezogenen Coordinaten x_8, y_8 bestimmt ist, so dienen die auf DE bezogenen Werthe von ξ_8 und η_8 bloss zur Controle der Rechnung und Messung.

Werden die Abscissenunterschiede $\xi_8 - \xi_9$, $\xi_9 - \xi_{10}$ zu gross, um die Curve genau abstecken zu können, so darf man selbstverständlich nur die auf den Hauptdurchmesser SX bezogenen Abscissen (x) um weniger als 30 Fuss, welche wir hier angenommen haben, wachsen lassen.

Soll schliesslich noch der Krümmungshalbmesser (R) der Parabel in dem Berührungspunkte D bestimmt werden, so dient dazu die bekannte Gleichung

$$R = \frac{n^3}{(\frac{1}{2}\,p)^2} = \frac{n^3}{r^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (225)$$

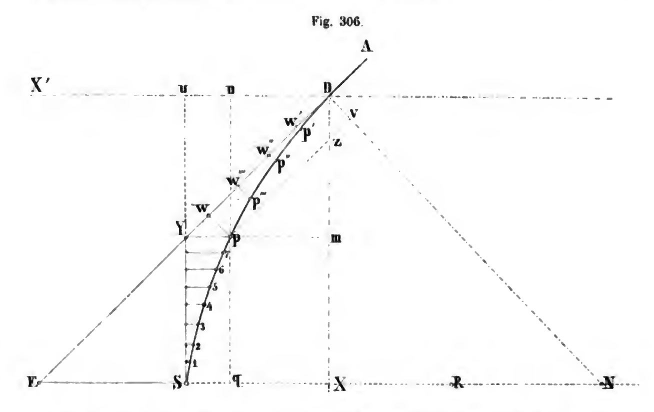
in welcher n die Normale (DN) des Berührungspunktes und r den halben Parameter bezeichnet. Drückt man die Normale durch die Subnormale (welche constant und $= \frac{1}{2}\,p = r$ ist) und den Winkel $\frac{1}{2}\,\varphi$ aus, so wird $n \sin \frac{1}{2}\,\varphi = r$ und demzufolge

$$R = \frac{r}{\sin^3 \frac{1}{2}\,\varphi} = 1385{,}7 \text{ Fuss.} \quad \ldots \ldots \quad (226)$$

Man kann die Formel, welche zur Berechnung der Coordinaten ξ, η dienen, auch so einrichten, dass sie von den Coordinatenwerthen x, y unabhängig werden, was die in Gleichung 224 dargestellten Ausdrücke nicht sind.

Zu dem Ende ist es nöthig, die Gleichung der Parabel für die rechtwinkeligen Axen DE, DN zu entwickeln und daraus die zu gegebenen Werthen von ξ gehörigen Werthe von η zu suchen.

Fig. 306.



Es sey die Gleichung der in Fig. 306 dargestellten Parabel für die Axen SX und SY:

$$y^2 = 2rx,$$

und für irgend einen Punkt des Parabelbogens SD die Abscisse $Sq = x$

und die Ordinate $pq = y$. Will man diese Gleichung auf die rechtwinkeligen Coordinatenaxen DX' und DX, welche beziehlich SX und SY parallel sind, beziehen, so hat man nach den Lehren der analytischen Geometrie, wenn für die neuen Axen die Abscisse des Punktes $p = Dn = x_1$ und die Ordinate $pn = y_1$, ist,

$$x = c' - x_1 \text{ und } y = h - y_1$$

zu setzen, wobei c' die Abscisse und h die Ordinate der neuen Axenecke D in Bezug auf die alten Axen vorstellt.

Durch diese Substitution und mit Rücksicht darauf, dass $h^2 = 2rc'$ ist, erhält man für die Axen DX' und DX die Parabelgleichung:

$$x' = -\frac{1}{2r} y_1{}^2 + \frac{h}{r} y_1. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (227)$$

Soll diese Gleichung auf die rechtwinkeligen Axen DE und DN, welche mit den zweiten zwar den Anfang gemein haben, aber einen Winkel $X'DE = {}^1/_2\, \varphi$ bi'den, übergetragen werden, so ist, wenn die Abscisse $Dw = \xi$ und die Ordinate $wp = \eta$ gesetzt wird:

$$x' = \xi \cos {}^1/_2\, \varphi - \eta \sin {}^1/_2\, \varphi,$$
$$y' = \xi \sin {}^1/_2\, \varphi + \eta \cos {}^1/_2\, \varphi$$

zu nehmen und η oder ξ aus der Gleichung (224) zu entwickeln. Thut man diess, so wird, nach Vornahme der möglichen Vereinfachungen und wenn man $\sin {}^1/_2\, \varphi = s$ und $\cos {}^1/_2\, \varphi = c$ setzt:

$$\eta = \frac{r - c s^2 \xi \pm \sqrt{r(r - 2cs^2 \xi)}}{c^2 s}.$$

Da für $\xi = o$ auch $\eta = o$ seyn muss, so folgt daraus, dass für unseren Zweck nur das untere Vorzeichen der Wurzel passt. Setzt man noch

$$\frac{r}{s c^2} = u, \; \frac{2cs^2}{r} = v \text{ und } \frac{s}{c} = \operatorname{tg} {}^1/_2\, \varphi = t,$$

so geht die vorstehende Gleichung über in

$$\eta = u\left(1 - \sqrt{1 - v\xi}\right) - t\xi; \quad \ldots \ldots \quad (228)$$

woraus man zu jeder Abscisse ξ die zugehörige Ordinate η findet.

§. 256. Aufgabe. Es sind auf dem Felde zwei Kreisbögen von bekannten Halbmessern abgesteckt: man soll die gemeinschaftliche Tangente derselben bestimmen.

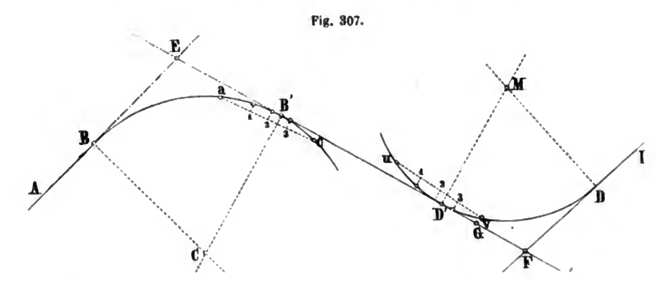
Diese Aufgabe kann auf verschiedene Weisen gelöst werden, und es ist die Verschiedenheit der Lösungen theils durch das Terrain, theils durch die Hilfsmittel der Messung, theils durch den Grad der Genauigkeit, den man erreichen will, bedingt.

1) Liegen die abgesteckten Bögen, oder wenigstens die Theile derselben, welche die gesuchten Berührungspunkte enthalten, auf ziemlich ebenem Boden, so reicht nach unseren Erfahrungen das folgende Verfahren, das sich durch seine Unmittelbarkeit und Kürze empfiehlt, völlig aus.

Man mache nämlich, wie in Fig. 307, an denjenigen Stellen der abgesteckten Bögen, welche die Berührungspunkte muthmasslich enthalten

werden, alle Curvenpunkte durch Absteckstäbe sichtbar; stelle sich hierauf an einer der gegebenen Curven (DD') in einem Punkte auf, der sicher ausserhalb der gesuchten Tangente B'D' liegt, und bewege sich daselbst so lange seitwärts, bis man in eine Linie kommt, welche durch die als äusserste erscheinenden zwei Pfähle der beiden Bögen bestimmt wird. Diese Linie ist entweder schon die gesuchte Tangente, oder weicht doch in keinem Falle viel davon ab. Um sich Gewissheit zu verschaffen, ob man die richtige

Fig. 307.



Linie getroffen habe, oder ob die gefundene noch zu verbessern sey, stecke man jetzt in den beiden Kreisbögen zu beiden Seiten der vorläufig erhaltenen Berührungspunkte noch einige nahe an einander gelegene Curvenpunkte ab und wiederhole mit diesen neuen Punkten das oben beschriebene Verfahren. [1] Die äussersten Stäbe in beiden Curvenästen bezeichnen jetzt mit hinreichender Genauigkeit die gesuchte Tangente (B'D').

Will man eine andere Prüfung dieser Absteckung vornehmen, so verlängere man die gefundene Linie B'D', bis sie die gegebenen Tangenten AB, ID in den Punkten E und F schneidet, messe alsdann die Längen BE, DF und sehe zu, ob B'E = BE und D'F = DF ist. Finden kleine Unterschiede in diesen Längen statt, so ist es wohl erlaubt, dieselben durch Verrückung der Berührungspunkte B', D' auszugleichen, vorausgesetzt, dass man vorher die Linie B'D' mit aller Sorgfalt abgesteckt hat.

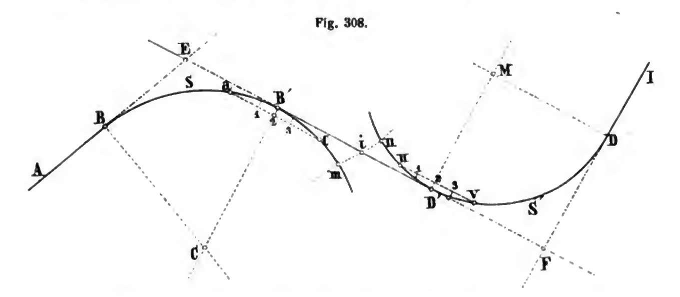
2) Liegen die abgesteckten Bogenstücke, welche durch eine gemeinschaftliche Tangente verbunden werden sollen, so getrennt, dass man beide zugleich nicht übersehen kann, so kann man sich mit Vortheil des Prismenkreuzes bedienen, um die gesuchte Berührungslinie herzustellen.

Nehmen wir an, zwischen den Bogenstücken B'S und D'S' (Fig. 308) liege ein Hügel, der sich in der Richtung CM erstreckt, so kann man auf demselben eine Stelle m aussuchen, welche gestattet, die bei B' und D' wie vorhin aufgestellten Stäbe zu überschauen. Geht man nun mit dem

[1] Zur Absteckung nahe gelegener Curvenpunkte kann man die im Anhange unter Nr. XVII mitgetheilte und daselbst erklärte Hilfstabelle gebrauchen.

Prismenkreuze gegen n hin vorwärts, bis man an einen Punkt i gelangt, in welchem sich die Bilder der äussersten Stäbe in den beiden Gläsern des Prismenkreuzes decken, so ist i ein Punkt der gesuchten Tangente, vorausgesetzt, dass B′ und D′ wirklich die äussersten Punkte der Bögen SB′ und S′D′ sind.

Fig. 308.



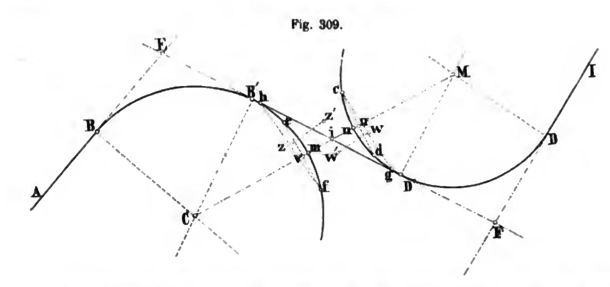
Ob diese Voraussetzung gegründet ist, erfährt man dadurch, dass man links und rechts von B′ und D′ mehrere nahe an einander liegende Curvenpunkte aussteckt, sich abermals in i mit dem Prismenkreuz aufstellt und zusieht, ob dort wieder dieselben zwei Stäbe wie vorhin als die äussersten erscheinen. Sind es zwei andere, so geben diese mit dem neuen Standpunkte, der sehr nahe an i liegen wird, die gesuchte Tangente.

Verlängert man dieselbe bis an die beiden anderen schon gegebenen Tangenten AB und ID, so kann man sich wie in Nr. 1 von dem Grade der Genauigkeit, womit die Tangente EF gefunden wurde, überzeugen und nöthigenfalls noch eine kleine Verbesserung in der Lage der Berührungspunkte und des Punktes bei i eintreten lassen.

3) Ein von dem vorigen verschiedenes Verfahren, das wir ebenfalls oft und mit Erfolg angewendet haben, gründet sich auf folgende Betrachtung über die Lage der gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreisbögen.

Stellt in Fig. 309 die Linie CM die Centrale der beiden Kreisbögen und B′D′ die gesuchte Tangente vor, so schneiden sich beide in einem Punkte i, der zwischen den Punkten m und n liegt, die den kürzesten Abstand der beiden Bögen von einander bezeichnen. Könnte man sich die Linie mn verschaffen, so wäre es leicht, den Punkt i abzustecken, da sich seine Entfernung von m oder n leicht berechnen lässt. Hätte man aber i, so dürfte man von dort aus nur eine Gerade iB′ nach dem äussersten Punkte B′ des Bogens SB′ und eine zweite Gerade iD′ nach dem äussersten Punkte D′ des Bogens S′D′ ziehen, um die verlangte Tangente zu erhalten. Die Controle der Absteckung wäre dadurch gegeben, dass man die Länge iB′ und iD′ aus bekannten Daten berechnete und zusähe, ob diese berechneten Entfernungen mit den wirklichen übereinstimmen oder nicht.

Fig. 309.



Die Richtung der Centralen lässt sich auf dem Felde nicht aus den Mittelpunkten C und M bestimmen, da diese gar nie abgesteckt werden; aber das Stück m n, welches nöthig ist, kann man entweder dadurch finden, dass man die Bogenlängen D n und B m berechnet und abmisst, oder, wenn dieses zu umständlich oder wegen der Terrainverhältnisse zu schwierig seyn sollte, dadurch, dass man sich an der Stelle, wo die Punkte m und n muthmasslich liegen, zwei parallele Sehnen c d, e f aufsucht, deren Mittelpunkte u, v einer Linie angehören, welche zu beiden senkrecht steht. Diese Sehnen findet man leicht. Denn angenommen, man habe erst c g # h f gemacht und c g in w, h f in z halbirt, so zeigen die Senkrechten w w', z z' an, dass c g und f h die gesuchten Sehnen noch nicht sind, und dass die eine gegen c, die andere aber gegen f hin verschoben werden muss. Nach einigen Versuchen bringt man es leicht dahin, dass die in den Mittelpunkten (w, z) der Sehnen errichteten Senkrechten in eine Linie u v zusammenfallen. Von den Punkten u und v aus, wenn sie einmal gefunden sind, erhält man leicht n und m, da man aus den gegebenen Halbmessern R und r der Kreise D D' und B B' und aus der gemessenen Länge der Sehnen c d und e f leicht u n und v m berechnen kann.

Da es nunmehr keine Schwierigkeit hat, die Linie m n aufzufinden, so brauchen wir nur das Stück m i = q derselben zu berechnen, um den Punkt i abstecken zu können. Es ist aber, wenn man die Secante C i mit p und die Centrale C M, deren Länge bekannt ist, mit c bezeichnet, wegen der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkeligen Dreiecke C i B' und M i D':

$$p = \frac{c\,r}{R + r},$$

und da m i = C i — C m ist,

$$q = p - r.$$

Setzt man ferner die Länge der Tangente B' D' = t und das Stück i B' derselben, welches durch $\sqrt{p^2 - r^2}$ gegeben ist, gleich l, so findet man aus den vorhin genannten ähnlichen Dreiecken:

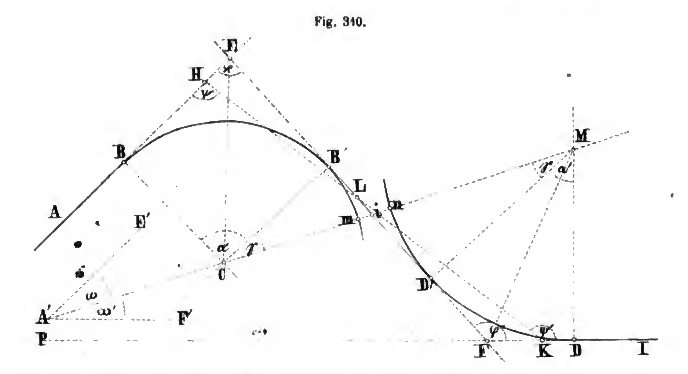
$$t = \frac{l\,r}{R + r}.$$

Treffen die von i aus gemessenen Längen l und t — l mit den durch Visiren gefundenen Punkten B′ und D′ zusammen, so kann man überzeugt seyn, dass die abgesteckte Tangente die richtige ist, ausserdem werden diese Punkte ein wenig verrückt und zwar so, dass sie gleichzeitig die von i aus gemessenen Entfernungen l und t — l darstellen und in den zugehörigen Kreisbögen liegen. Es wird hiebei selten oder gar nie vorkommen, dass diese neuen Punkte merklich ausserhalb der vorhin abgesteckten Tangentenrichtung liegen; sollte es aber der Fall seyn, so ändert sich hierdurch diese Richtung ein wenig ab, was als Verbesserung der ersten Absteckung anzusehen ist.

4) Will oder kann man keines der vorhergehenden Verfahren zur Absteckung der gesuchten Tangente anwenden, so mag man sich des folgenden bedienen, das, wenn es in Folge der Terrainverhältnisse ausführbar ist, sicher zum gewünschten Ziele führt.

Es seyen wieder dieselben Stücke gegeben, welche wir bisher als bekannt angesehen haben, nämlich die Halbmesser R und r, die Länge der Centralen c und deren Neigungswinkel ω und ω' gegen die gegebenen Tangenten AB und ID. Denkt man sich, wie in Fig. 310, die gesuchte Tangente B′D′ gezogen und bis an die gegebenen Tangenten verlängert, so ist der Schnittpunkt E von den Berührungspunkten B und B′, der Schnittpunkt F aber von den Berührungspunkten D und D′ gleich weit entfernt.

Fig. 310.



Kann man nun die Winkel φ und φ' bestimmen, so lässt sich erstens EB′ = EB und FD′ = FD berechnen, zweitens der Punkt E von B aus und F von D aus abmessen, drittens an BE der Winkel φ und an DF der Winkel φ' antragen, und endlich viertens durch Abmessung der Länge EB′ der Punkt B′, so wie durch Abmessung von D′F der Punkt D′

bestimmen, womit die Aufgabe gelöst ist. Um aber den Winkel φ zu finden, bedenke man, dass aus dem Vierecke $BEB'C$

$$\varphi = 180^0 - \alpha$$

und aus dem rechtwinkeligen Dreiecke ABC

$$\alpha = 90^0 + \omega - \gamma$$

folgt. Da sich der Winkel γ aus dem Dreiecke CiB' durch die Gleichung

$$\cos\gamma = \frac{r}{p} = \frac{R + r}{c}$$

ergibt, so erhält man den gesuchten Winkel

$$\varphi = 90^0 + \gamma - \omega.$$

In gleicher Weise findet man den Winkel

$$\varphi' = 90^0 + \gamma - \omega'.$$

Es ist desshalb für den einen Bogen die Länge der Tangente

$$BE = B'E = r \cot {}^1\!/_2\, \varphi$$

und für den zweiten Bogen die Tangente

$$DF = D'F = R \cot {}^1\!/_2\, \varphi'.$$

Misst man diese Längen von B und D aus auf den zugehörigen Tangentenrichtungen ab, so erhält man die Schnittpunkte E und F; stellt man

Fig. 310.

dann daselbst einen Theodolithen auf und macht damit den Winkel $BEB' = \varphi$, sowie den Winkel $DFD' = \varphi'$, so müssen die beiden Winkelschenkel EL und FL in eine Gerade zusammenfallen, welche die gesuchte Tangente ist und deren Berührungspunkte B' und D' erhalten werden, wenn man $EB' = EB$ und $FD' = FD$ macht.

Die Messung ist genügend geprüft, wenn man sich von dem Zusammenfallen der in E und F abgesteckten Richtungen EL und FL, sowie davon überzeugt hat, dass die wirkliche Entfernung der Punkte B'D' mit dem aus der Gleichung

$$t = (R + r) \operatorname{tg} \gamma$$

berechneten Abstande $B'D' = t$ übereinstimmt.

5) Legen sich der Ausführung des eben beschriebenen Verfahrens Schwierigkeiten in den Weg, indem etwa die Schnittpunkte E und F unzugänglich sind, oder indem von ihnen nach B' und D' hin keine Linie abgemessen werden kann, so stecke man die gesuchte Tangente dadurch ab, dass man zuerst eine beliebige Gerade herstellt, welche die beiden gegebenen Tangenten in H und K schneidet; zweitens von diesen Schnittpunkten aus die Winkel ψ und ψ', welche die Gerade HK mit den Tangenten AB und ID bildet, sowie die Längen $HB = e$ und $KD = e'$ genau misst; drittens wie in der vorigen Nummer die Entfernungen $BE = r \cot {}^1/_2\, \varphi$ und $DF = R \cot {}^1/_2\, \varphi'$ bestimmt; viertens die Abstände

$$HE = BE - BH = r \cot {}^1/_2\, \varphi - e = i,$$
$$KF = DF - DK = R \cot {}^1/_2\, \varphi' - e' = i',$$

und aus den Dreiecken HLE und KLF die Seiten

$$HL = f = \frac{(i \sin \varphi)}{\sin (\psi - \varphi)};$$
$$KL = f' = \frac{i' \sin \varphi'}{\sin (\psi' - \varphi')}$$

berechnet; fünftens von H oder K aus den Punkt L durch direkte Längenmessung bestimmt; und endlich dortselbst den Winkel

$$\delta = \psi - \varphi$$

sowohl an LH als LK anträgt. Hierdurch ist die Richtung der Tangente EF gegeben und es wird die Lage derselben sofort dadurch geprüft, dass man sich überzeugt, ob sie die äussersten Punkte B' und D' der beiden Kreisbögen BB' und DD' berührt oder nicht. Sollten die beiden Kreise von der Linie ELF geschnitten oder beide gar nicht getroffen werden, der hierdurch sich kundgebende Messungsfehler aber nur gering seyn: so darf man nur den Winkel δ etwas grösser oder kleiner annehmen, um die gesuchte Richtung genauer zu erhalten.

Will man sich von der richtigen Lage der so erhaltenen Berührungspunkte weiter überzeugen, so berechne man ihre Abstände von L, messe dieselben auf der Geraden EF von dem Scheitelpunkte L aus ab und sehe zu, ob die eingemessenen Endpunkte B' und D' mit den durch Visiren erhaltenen zusammentreffen oder nicht. Die Entfernungen LB' und LD', welche man hiezu bedarf, findet man leicht, denn es ist

$$EL = \frac{f \sin \psi}{\sin \varphi},\quad FL = \frac{f' \sin \psi'}{\sin \varphi'}$$

und folglich nach der Figur

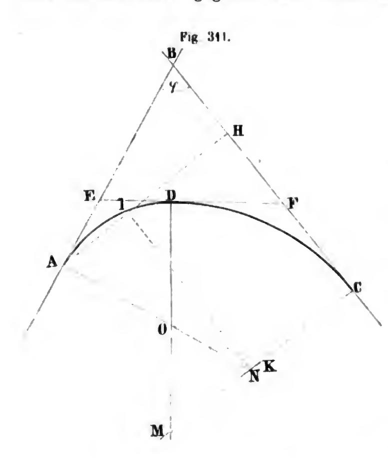
$$LB' = EL - EB' = \frac{f \sin \psi}{\sin \varphi} - (e + i);$$
$$LD' = FL - FD' = \frac{f' \sin \psi'}{\sin \varphi'} - (e' + i').$$

Wir haben die vorstehenden Fälle nur für Kreisbögen durchgeführt; es

wird aber einleuchten, dass sich die hier mitgetheilten Methoden, mit Ausnahme der dritten, auch auf Parabeln anwenden lassen, wenn man nur die vorkommenden Rechnungen entsprechend abändert.

§. 257. **Aufgabe. Zwei unter einem bekannten Winkel (φ) sich schneidende gerade Richtungen (AB, BC) durch zwei Kreisbögen (AD, DC) so zu verbinden, dass sie sich innerlich in einem noch unbestimmten Punkte (D) und die Geraden in gegebenen Punkten (A, C) berühren.** (Fig. 311.)

Diese Aufgabe würde unendlich viele Lösungen zulassen, wenn nicht einer der Halbmesser gegeben wäre. Nimmt man aber $AO = r$ als gegeben an, so kann es sich nur mehr darum handeln, $CM = r_1$ und $AE = ED = t$, $CF = FD = t_1$ zu berechnen, um auf den eben genannten Tangenten die verlangten Kreisbögen von A, D und C, D aus mittels Coordinaten abzustecken.



Verlängert man den Halbmesser AO bis N und bezeichnet in dem Dreiecke MNO die Winkel bei M, N, O mit μ, φ, ω und die gegenüberliegenden Seiten mit m, n, o; zieht man ferner AH senkrecht und N1 parallel zu BC; und setzt man endlich die bekannten Abstände $AB = a$, $BC = b$ und die unbekannte Seite $CN = p$, so finden folgende zwei Gleichungen statt:

$$a \cos \varphi + (r + m) \sin \varphi = b,$$
$$a \sin \varphi - (r + m) \cos \varphi = p,$$

von denen die erste sofort m, die zweite p liefert. Es ist somit in dem Dreiecke MON, da $MO = MD - OD = r_1 - r$ und $MN = r_1 - p$:

$$(r_1 - r)^2 = m^2 + (r_1 - p)^2 - 2m\,(r_1 - p) \cos \varphi,$$

woraus sich der gesuchte Halbmesser r_1 ergibt.

Mit dem Werthe von r_1 findet man den Winkel μ aus der Proportion: $\sin \mu : \sin \varphi = m : n = m : (r_1 - r)$ und den Winkel ω aus der Gleichung: $\omega = 180^0 - (\varphi + \mu)$; mit diesen Winkeln berechnet man aber

$$t = r \operatorname{tg} {}^1\!/_2\, \omega \quad \text{und} \quad t_1 = r_1 \operatorname{tg} {}^1\!/_2\, \mu,$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Wäre dieselbe bloss durch Zeichnung zu lösen gewesen, so würde man $CK = AO = r$ und Winkel $KOM = OKM$

gemacht und MO bis an den Kreis AD verlängert haben, wodurch sich der Berührungspunkt D und der Halbmesser $r_1 = MD = MC$ ergeben hätte, während die Tangentenabschnitte $AE = ED$ und $CF = FD$ einfach durch Construction einer in dem Punkte D auf den beiden Halbmessern MD, OD senkrecht stehenden Geraden EF erhalten worden wären.

4. Das Ausmessen gerader und krummer Linien.

§. 258. Das Ausmessen oder die Bestimmung der Länge einer beliebigen Linie kann entweder mittelbar oder unmittelbar geschehen: unmittelbar durch Anwendung der im vierten Abschnitte der ersten Abtheilung beschriebenen Längenmesser, und mittelbar durch geeignete Messoperationen, welche auf Grund gemessener Linien und Winkel die gesuchte Länge durch Zeichnung oder Rechnung liefern. Die Ausführung der unmittelbaren Messungen mit Messstäben, Messlatten, Ketten und Distanzmessern ist bereits bei der Erklärung des Gebrauchs dieser Instrumente so weit erörtert worden, als es nöthig ist, sich in allen vorkommenden Fällen helfen zu können, wesshalb dieser Abtheilung der Längenmessungen nur noch beigefügt zu werden braucht, wie man mit Messstangen die Länge einer Grundlinie für ein Dreiecknetz, das einer grösseren Landesvermessung zu Grunde liegt, bestimmt. Dagegen müssen die mittelbaren Ausmessungen gerader und krummer Linien, von denen noch keine Rede war, hier vorzugsweise berücksichtigt werden.

§. 259. Aufgabe. Die beiden Endpunkte einer sehr langen geraden Linie, die über festes und ebenes Terrain führt, sind durch steinerne Signale dauerhaft bezeichnet: man soll diese Linie mit Messstangen ausmessen und auf den Horizont reduciren.

Zur Ausführung der hier verlangten Arbeit gehören folgende Verrichtungen:

1) das Abstecken von Zwischenpunkten der gegebenen Geraden;
2) die Herstellung entsprechender Unterlagen der Messstangen;
3) der Vollzug der unmittelbaren Messung der Linie, und
4) die Berechnung der horizontalen Entfernung der gegebenen Endpunkte.

Zu 1. Das Abstecken der Zwischenpunkte, welches zum Zwecke hat, die Unterlagen der Messstangen und diese selbst genau in die Richtung der auszumessenden Geraden zu bringen, geschieht mit Hilfe eines Theodolithen, der centrisch und horizontal über dem einen Endpunkte aufgestellt und auf den anderen Endpunkt eingerichtet wird. Bewegt sich in Folge dieser Aufstellung die Absehlinie des Fernrohrs in der gegebenen Geraden, so ist es nach §. 245 leicht, einzelne Punkte derselben anzugeben.

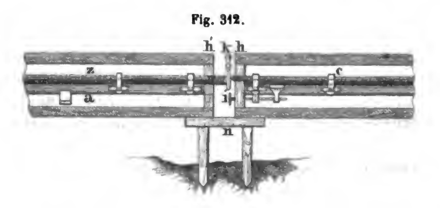
Diese Punkte werden durch starke Pfähle bezeichnet, die man 3 bis 4 Fuss tief in den Boden schlagen, einige Zolle über dessen Oberfläche

horizontal abschneiden und auf dem Kopfe mit Nägeln versehen lässt, welche genau in der Visirebene des Fernrohrs stehen. Man wird diese Pfähle nicht zu weit auseinander stellen, damit sich leicht von einem zum andern eine Schnur ziehen lässt, welche die Mittellinie der Unterlagen und Messstangen bezeichnet. Da es auf langen Strecken schwer ist, die Signale in die Absehlinie einzuwinken, so versteht es sich von selbst, dass man sich die Arbeit des Absteckens der Zwischenpunkte erleichtert, wenn man erst einige Hauptpunkte der ganzen Linie bestimmt und von diesen aus die Zwischenpunkte einrichtet.

Um die Aufstellung des Theodolithen auf den Hauptpunkten jederzeit schnell und sicher vornehmen zu können, ist es gut, wenn man um dieselben drei Pfähle im gleichseitigen Dreieck schlagen, horizontal abschneiden und mit Löchern versehen lässt, in welche die Fussspitzen des Stativs passen. Hierdurch bringt man nicht nur sofort die Alhidadenaxe des Theodolithen in die gegebene Gerade, sondern ist auch vor jeder Verrückung des Instruments sicher.

Zu 2. Die Unterlagen der Messstangen sind entweder fortlaufende Stege von starken Brettern, die an den Enden und in der Mitte unterstützt werden, oder auch bloss kleine Böcke, die (wie in Fig. 312) aus zwei etwa drei Zoll starken und eben so viele Fuss tief in den Boden gerammten Pfählen

Fig. 312.

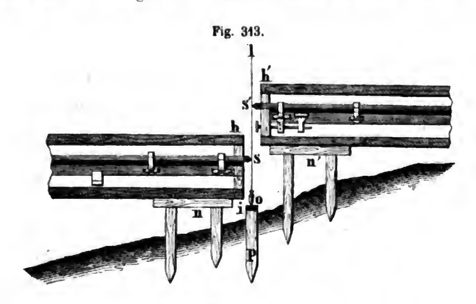


und einem Brettstücke (n) bestehen, das horizontal darauf genagelt ist. Damit die Messstangen, deren hölzerne Kisten (h, h') auf die in der Figur angedeutete Weise über die Böcke zu liegen kommen, eine nahezu wagrechte Lage erhalten, müssen die Böcke (n, n) durch Nivelliren in Ebenen gebracht werden, welche entweder ganz oder nahehin horizontal sind. Hat nun das Terrain eine Steigung gegen den Horizont, welche die Herstellung einer einzigen Horizontalebene zwischen den gegebenen Endpunkten nicht gestattet, so dürfen allerdings die Böcke in mehreren Horizontalebenen liegen, wenn nur die Abstufungen so angebracht sind, dass man durch einen feinen Senkel den Endpunkt des vorhergehenden Massstabs zum Anfange des folgenden machen kann, wie dieses in Fig. 313 angedeutet ist. Was die Höhenlage der Ebene des ersten und letzten Stegs betrifft, so bestimmt sich diese durch die Höhenlage der Endpunkte der auszumessenden

Linie in der Weise, dass es leicht möglich seyn muss, die Kanten der Messstangen in die Lothlinien dieser Punkte einzustellen.

Zu 3. Nach diesen Vorbereitungen geschieht die Messung der Linie in folgender Weise. Die Messstange Nr. 1 — wir wollen vier solcher Stangen annehmen, und zwar von der Bessel'schen Construction Abth. I, §. 168 — wird durch einen Senkel mit ihrer wagrechten Schneide genau auf den Anfangspunkt A eingestellt, und entweder mit Hilfe eines Theodolithen, der auf einem der in Nr. 1 genannten Hauptpunkte steht, oder nach den geraden Linien, welche man vorher schon über die Böcke gezogen hat, in die gerade Linie A B gerichtet. Hierauf legt man die Stange Nr. 2 hinter Nr. 1 so, dass die wagrechte Schneide derselben der vorhergehenden lothrechten gegenüber und von dieser so weit absteht, dass der Abstand durch den geometrischen Keil gemessen werden kann. Auch diese Stange wird wie die erste und alle folgenden genau in die auszumessende gerade Linie eingerichtet. Sind alle vier Stangen aufgelegt, so schiebt man die Keile der Messstangen und Metallthermometer ein, stellt die Libellen wagrecht und liest an Nr. 1 ab: erstens die Angabe der Stellschraube an der Libelle, zweitens den Keil am Metallthermometer, und drittens den Keil zwischen den Stangen Nr. 1 und Nr. 2. Sind dieselben drei Ablesungen auch an der Stange Nr. 2 und am Keile zwischen Nr. 2 und Nr. 3

Fig. 313.



gemacht, so nimmt man die erste Stange weg und legt sie so an Nr. 4 an, wie vorher Nr. 4 an Nr. 3. Hierauf folgt die Ablesung an Nr. 3 mit Wiederholung der Ablesung des Keils zwischen Nr. 2 und Nr. 3. Ist dieses geschehen, so wird die Stange Nr. 2 versetzt und so fortgefahren, wie angefangen wurde, wobei man darauf sieht, dass zur Zeit der Ablesung immer alle vier Stangen in der geraden Linie liegen.

Muss die Messung der Linie in Folge der Tageszeit oder aus anderen Ursachen unterbrochen werden, so ist es nöthig, den Endpunkt des abgemessenen Stückes mit aller Genauigkeit so zu versichern, dass sich an ihn die weitere Messung leicht wieder anknüpfen lässt.

Dieses geschieht dadurch, dass man mit Latten mehrere Messstangenlagen voraus abmisst, an dem so bestimmten Ruhepunkte einen starken Pfahl von Eichenholz fest in die Erde rammt und denselben der Bodenfläche gleich und wagrecht abschneidet. Auf diesem Pfahl wird eine Vorrichtung festgeschraubt, welche gestattet, eine mit einem kleinen Punkte versehene Metallplatte nach zwei sich senkrecht schneidenden Richtungen zu verschieben und, wenn sie die rechte Lage hat, festzustellen. Der Punkt dieser Platte wird in das Loth gebracht, welches von der Schneide der letzten Messstange herabhängt und aus einem ganz dünnen Silberdraht und einem genau abgedrehten Metallkegel besteht. Zum Schutze gegen den Luftzug wird dieses Loth mit einem Glascylinder umgeben, und während der Unterbrechung der Messung ist der Ruhepunkt mit einem hölzernen Kästchen und dieses mit Erde und Steinen bedeckt.

Die Fortsetzung der Messung beginnt mit Einrichtung derselben Stange, welche beim Schlusse die letzte war, in ihre frühere Lage, wobei der Senkel genau wieder einspielen muss. Es ist klar, dass auf diese Weise die Dicke des Silberfadens keinen Einfluss auf die Länge der Linie ausübt, so lange sich die Höhenlage des Stegs nicht ändert. Wird aber diese eine andere, so kommt die Dicke des genannten Fadens mit in Rechnung, weil in diesem Falle die Schneide des vorhergehenden unteren Stabs von der Schneide des folgenden höheren in horizontaler Richtung um die Dicke des Drahtes absteht. (Fig. 313.)

Die Länge der zu messenden Linie wird nie oder doch nur ganz zufällig so beschaffen seyn, dass das Ende der letzten Messstange genau auf den zweiten Endpunkt (B) der Linie trifft; es wird desshalb auch die letzte Stange um mehr oder weniger von diesem Punkte abstehen, und dieser Abstand ist alsdann noch auszumitteln. Dazu dient entweder ein Pariser Fuss, wenn die Messstangen Vielfache der Toise sind, oder ein aliquoter Theil des Meters, wenn die Messstangen darnach abgeglichen wurden, oder auch irgend ein genauer Massstab, welcher sich zwischen dem Endpunkt B der zu messenden Linie und der letzten Messstange auf einer horizontalen Ebene und in der vorgeschriebenen Richtung mit Hilfe von Metallplatten in der Weise abschieben lässt, wie wir dieses in §. 167 (Seite 257 der ersten Abtheilung) beschrieben haben. Der Rest, welcher nach dem Abschieben noch bleibt, wird durch leicht zu erfindende Mittel auf einem feingetheilten Massstabe gemessen.

Zu 4. Die Reduction der gemessenen Linie auf den Horizont erfordert, dass erstens alle Messstangenlängen für eine und dieselbe Temperatur, nämlich die Normaltemperatur des Urmasses ausgedrückt werden; dass man zweitens aus den Angaben der Libellenschrauben die Neigungswinkel der Stangen gegen den Horizont bestimmt; hiemit drittens die Länge (Reductionsgrösse) berechnet, welche von jeder Stangenlänge abzuziehen ist; und dass man endlich viertens alle reducirten Längen mit dem horizontalen Endstücke, das durch besondere Massstäbe gemessen wurde, so wie mit den Faden-

dicken des Senkels, wenn dieser so angewendet wurde, dass die Drahtdicke berücksichtigt werden muss; und endlich mit den zwischen den Messstangen eingeschobenen Keildicken zusammenstellt.

Die Bessel'schen Messstangen sind so abgeglichen, dass, wenn man in den Ausdrücken für ihre Längen, welche auf Seite 264 der ersten Abtheilung enthalten sind, und wonach

$$\begin{aligned} \text{Stange Nr. } 1 &= 1728{,}8152 - 0{,}54033\, a_1 \\ \text{" Nr. } 2 &= 1729{,}5153 - 0{,}55976\, a_2 \\ \text{" Nr. } 3 &= 1729{,}0454 - 0{,}57575\, a_3 \\ \text{" Nr. } 4 &= 1729{,}0909 - 0{,}58103\, a_4 \end{aligned}$$

ist, statt a_1, a_2, a_3, a_4 die beobachteten Keildicken am Metallthermometer in Linien einsetzt, die Längen dieser Stangen ebenfalls in Linien und für die Normaltemperatur der Toise erhalten werden. Wir können somit die Länge jeder Stange für diese Temperatur als bekannt ansehen, da wir alle Grössen zu ihrer Berechnung haben. Ist diese Länge = l, so ist nur zu zeigen, wie man diese reducirt.

Nennt man die Angabe der Stellschraube (m) an der Libelle (Fig. 186) für die horizontale Lage der Messstange h, und weiss man durch Versuche, dass einer ganzen Umdrehung der Schraube der Neigungswinkel φ entspricht, so wird, da alle hier vorkommenden Winkel sehr klein sind, einer anderen Angabe u der Schraube ein Neigungswinkel

$$\psi = (u - h)\, \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (229)$$

entsprechen. Ob dieser Winkel ein Höhen- oder Tiefenwinkel ist, hat begreiflicherweise auf die Reduction gar keinen Einfluss und desshalb braucht auch sein Vorzeichen nicht beachtet zu werden.

Ist die Stange l unter dem Winkel ψ gegen den Horizont geneigt, so ist die Länge ihrer Horizontalprojection $l \cos \psi$ und folglich die Reductionsgrösse

$$v = l - l \cos \psi = 2 l \sin^2 {}^1\!/_2\, \psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (230)$$

Wegen der Kleinheit des Winkels ψ kann man unbedenklich $\sin^2 {}^1\!/_2\, \psi = {}^1\!/_4 \sin^2 \psi$ und daher

$$v = {}^1\!/_2\, l \sin^2 \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231)$$

setzen. Will man jedoch den Winkel ψ nicht erst besonders rechnen, so lässt er sich dadurch sofort in den Ausdruck für v bringen, dass man den Winkel φ durch die Erhebung l ausdrückt, um welche ein Stangenende über das andere käme, wenn die Messstange der Schraube m folgte und diese eine ganze Umdrehung machte.

Unter dieser Annahme ist

$$\sin \varphi = \frac{e}{l} \text{ und } \varphi = \frac{e}{l \sin 1''};$$

da aber auch

$$\sin \psi = \psi \sin 1'' = (u - h)\, \frac{e}{l}$$

ist, so wird, wenn man diesen Werth in die Gleichung (231) substituirt, weiter noch

$$v = \frac{e^2}{2l} (u - h)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (232)$$

An den Bessel'schen Messstangen war die Grösse e für die Stange Nr. 1 = 7,7505 Linien, für Nr. 2 = 7,598 Linien, für Nr. 3 = 7,768 Linien und für Nr. 4 = 7,957 Linien. Berücksichtigt man ferner, dass man für l den mittleren Werth setzen kann, welcher sich aus allen beobachteten Keildicken (a) am Metallthermometer ergibt, so ist für die Berechnung der Reductionsgrösse der Quotient $e^2:2l$ für jede Stange eine constante Grösse c und daher auch

$$\log v = \log c + 2 \log (u - h). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (233)$$

Wie die Endergebnisse der Rechnung zusammenzustellen sind, bedarf keiner Erläuterung; nur die Bemerkung sey noch gestattet, dass man entweder jede einzelne Keildicke, welche den Abstand zweier Messstangen von einander bezeichnet, sofort zu l addirt und folglich auch mit reducirt; oder dass man diese Reduction weglässt und einfach nur die Summe aller Keildicken der Summe aller reducirten Massstablängen beifügt. Die auf den Horizont reducirte Länge der Linie AB stellt offenbar einen grössten Kreisbogen der Erdkugel vor, und es gehört zu demselben ein Halbmesser R, welcher sich wie folgt ergibt. Bezeichnet nämlich r den Halbmesser der Erde bis zum Meeresspiegel, f die Höhe des Ortes A und f' die Höhe des Ortes B über der Meeresfläche, so ist offenbar $\frac{1}{2}$ (f + f') die mittlere Höhe der Linie AB über dem Meere und daher

$$R = r + \tfrac{1}{2} (f + f'). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (234)$$

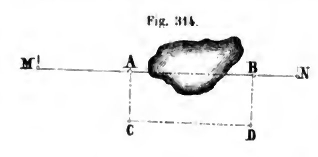
Mit Hilfe dieses Halbmessers kann man den Kreisbogen zwischen A und B auch auf den Meereshorizont reduciren, wovon später die Rede ist.

§. 260. **Aufgabe. Eine gerade Linie, deren Endpunkte fest bezeichnet sind, kann nicht unmittelbar gemessen werden: man soll ihre horizontale Länge mittelbar bestimmen.**

Die Lösung dieser Aufgabe wird nach den obwaltenden Umständen verschieden ausfallen.

1) Die gegebene Linie AB sey nicht sehr lang, man kann sich in jedem Endpunkte aufstellen und von einem zum anderen sehen. (Fig. 314).

Fig. 314.

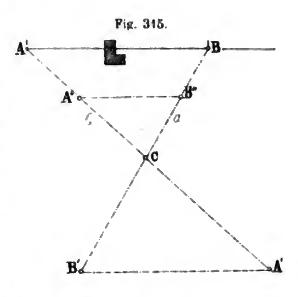


In diesem Falle erhält man die gesuchte Länge am einfachsten, indem man in den Punkten A und B Senkrechte (AC, BD) zu AB absteckt, diese einander gleich macht und die dadurch erhaltene Linie CD, welche der gegebenen parallel und gleich ist, unmittelbar misst. Sollte die Absteckung einer Parallelen zu AB aus irgend welchen Ursachen unmöglich oder doch erschwert seyn, so stelle man sich durch Annahme eines

beliebigen Punktes C ein Dreieck ABC her, messe in demselben die Winkel bei A und B nebst einer der Seiten AC oder CB und berechne aus den gemessenen drei Stücken die gesuchte Seite AB.

2) Die nicht sehr lange gerade Linie AB sey zwar an ihren Endpunkten zugänglich, kann aber von ihnen aus nicht übersehen werden. Wählt man (Fig. 315) einen beliebigen Punkt C, der so liegt, dass von ihm aus nach A und B gesehen und gemessen werden kann, so bestimme man unmittelbar die Seiten CB = a, AC = b und den Winkel ACB = C des Dreiecks ABC und berechne daraus zuerst

Fig. 315.



$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C,$$

hierauf die Winkel A und B selbst, und mit diesen die Seite

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

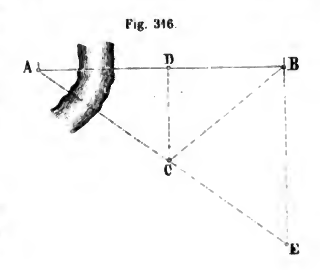
Will oder muss man die Winkelmessung umgehen, so verlängere man die durch den Punkt C bestimmten Seiten AC und BC rückwärts so weit, dass A'C = AC und B'C = BC wird, und messe hierauf die Linie A'B', welche der AB gleich ist.

Sollte die Verlängerung der Seiten AC und BC nicht möglich seyn, so halbire man entweder diese Seiten in A'' und B'', wodurch $A''B'' = \frac{1}{2}$ AB wird, oder theile sie so, dass A''B'' der AB parallel läuft, messe A''B'' = c, BC = a, B''C = d und berechne die gesuchte Länge AB aus der Proportion, welche zwischen dieser und den gemessenen Grössen stattfindet.

3) Ein Endpunkt der Geraden AB sey unzugänglich, man kann ihn aber von dem zweiten Endpunkte aus sehen.

In diesem Falle nimmt man (nach Fig. 316) einen Punkt C beliebig, aber so an, dass man von ihm aus nach A und B sehen und nach B messen kann; misst die Länge der Linie BC = a und die Winkel ABC = B und BCA = C und berechnet hieraus die Seite

Fig. 316.



$$AB = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)}.$$

Einfacher lässt sich die vorliegende Aufgabe dadurch lösen, dass man mit Hilfe des Prismenkreuzes einen Punkt C sucht, der mit A

und B einen rechten Winkel ACB bildet, hierauf eine Senkrechte CD auf AB errichtet, BC = a, BD = e misst und AB aus der Gleichung

$$AB = \frac{a^2}{e}$$

berechnet.

Ausserdem kann man in B und D zwei Senkrechte zu AB errichten und diese durch eine Gerade AE abschneiden, BE = m, DC = n, BD = p messen und aus einer leicht zu bildenden Proportion die unbekannte Seite

$$AB = \frac{mp}{m - n}$$

bestimmen. (Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die Linien BE und DC bloss desshalb senkrecht zu AB genommen wurden, weil dieses der kürzeste Weg ist, sie parallel zu machen; denn nur das Gleichlaufen dieser Linien ist hier nothwendig.)

4) Es sey wieder ein Punkt A der Geraden AB unzugänglich, und von B aus kann man nicht nach A sehen.

Man nehme einen Punkt C so an, dass man nach A und B visiren und nach B messen kann; errichte auf BC eine Senkrechte AD, welche durch den Punkt A geht, messe BC = a, CD = d und den Winkel BCA = C, berechne zunächst die Seite

$$AC = b = \frac{d}{\cos C},$$

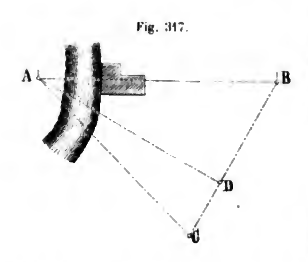


Fig. 317.

hierauf nach der in Nr. 2 dieses Paragraphen angewendeten trigonometrischen Formel die Winkeldifferenz A — B, mit dieser und der bekannten Winkelsumme A + B die Winkel A und B selbst, schliesslich aber

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Sollten sich der Herstellung der Senkrechten AD Schwierigkeiten in den Weg legen, so kann man die Linie AD, so wie sie das Terrain erlaubt, zuerst annehmen, dann eine durch B gehende Senkrechte auf AD fällen, und diese so weit verlängern, bis man an einen Punkt C kommt, von dem aus A und B sichtbar sind und BC unmittelbar gemessen werden kann.

5) Die gegebene Linie AB sey ganz und gar unzugänglich, aber das sie umgebende Terrain gestatte alle erforderlichen Messoperationen.

Hätte man zur Lösung dieser Aufgabe keine anderen Hilfsmittel als Absteckstäbe, Kette und Winkelspiegel oder Prismenkreuz, so nehme man eine beliebige Gerade DE an, errichte zu ihr die beiden Senkrechten AD und BE, halbire den Abstand DE ihrer Fusspunkte in C, suche die

Durchschnitte von AD, BC und von BE, AC in F und G auf und messe schliesslich die Linie FG, so ist die Aufgabe gelöst; denn es ist FG = AB, weil, dem Aufbau der Figur gemäss, das Dreieck FCG das Dreieck ABC deckt.

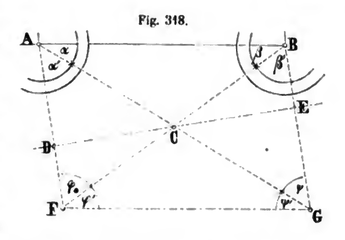


Fig. 318.

Besitzt man einen Theodolithen, Spiegelsextanten oder Spiegelkreis, so kann man von zwei Standpunkten F und G aus die Winkel AFB = φ, BFG = φ' und AGF = ψ', BGA = ψ, sowie die horizontale Entfernung dieser Standpunkte FG = g messen; mit diesen Grössen aus dem Dreiecke AFG die Seiten

$$AF = b \ , \ AG = c$$

und aus dem Dreieck BFG die Seiten

$$BF = d \ , \ BG = e$$

berechnen, und schliesslich die gesuchte Länge AB aus den Dreiecken ABF und ABG, in welchen je zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind, bestimmen. Die vier Werthe, welche sich für AB ergeben, nämlich:

$$AB = \frac{b \sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{d \sin \varphi}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{e \sin \psi}{\sin \alpha} = \frac{c \sin \psi}{\sin(\beta + \beta')}$$

liefern zugleich eine Controle der Messung und Berechnung. Bei nur geringen Abweichungen dieser Werthe kann man das Mittel aus allen für AB nehmen.

Will man zur Bestimmung von AB den Messtisch anwenden, so stelle man denselben in einem beliebigen Punkte F, der nach A, B, G zu visiren und nach G zu messen gestattet, horizontal auf, projicire mit der Lothgabel den Punkt F in f auf das Messtischblatt, visire nach einander die Punkte A, B, G an und ziehe die entsprechenden Visirlinien $f\alpha$, $f\beta$, $f\gamma$. Hierauf messe man die Länge FG auf dem Felde, trage sie verjüngt = fg auf der Linie $f\gamma$ von f aus ab und versetze nun den Messtisch so nach G, dass g lothrecht über G und γf in die Visirebene GF kommt, während das Tischblatt selbst horizontal ist. Visirt man nun nach A und zieht die Linie $g\alpha'$, so erhält man den Schnittpunkt a, und wenn von g nach B visirt und die Linie $g\beta'$ gezogen

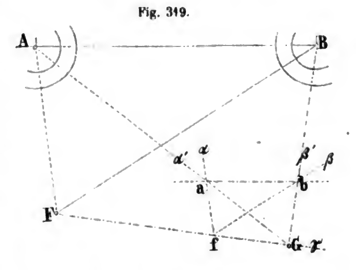


Fig. 319.

wird, so ergibt sich der Schnitt b. Hiemit ist aber das Viereck abgf hergestellt, welches dem ABGF ähnlich ist und die Länge der Seite AB liefert, wenn man ab mit demselben Massstabe misst, nach welchem fg abgetragen wurde.

Dass die Genauigkeit dieses Verfahrens geringer ist als die des vorigen, bedarf wohl keiner weitern Erörterung.

6) Die zu messende Gerade AB sey sehr lang, und es befinden sich zwischen den Endpunkten mehrere Hindernisse, welche das Visiren und eine unmittelbare Messung in der Richtung AB unmöglich machen.

In diesem Falle muss die Linie AB nach einer der in §. 246, Nr. 1 bis 3, angegebenen Methoden abgesteckt werden. Diese Methoden sind aber alle so beschaffen, dass sie nicht bloss die Entfernungen der Zwischenpunkte der Linie AB von gewissen Hilfslinien, sondern auch die Entfernungen dieser Punkte unter einander durch Rechnung finden lassen. Man braucht also nur die für die Absteckung gemessenen Grössen nach Anleitung der zugehörigen Figuren richtig zu verbinden, um die gesuchte Länge AB durch Rechnung zu erhalten. Da aber diese Rechnungen weiter Nichts als die Lösung einfacher trigonometrischer Aufgaben erfordern, so überlassen wir sie lediglich dem eigenen Nachdenken des Lesers.

§. 261. **Aufgabe.** Irgend eine krumme Linie ist auf dem Felde gegeben: man soll dieselbe aufnehmen und ausmessen.

Da eine krumme Linie fortwährend ihre Richtung ändert, so leuchtet von selbst ein, dass sie im Allgemeinen nicht so genau als eine gerade Linie aufgenommen und ausgemessen werden kann. Denn diese Aufnahme und Ausmessung ist nur dadurch möglich, dass man an die Stelle der Curve eine gebrochene Linie setzt, welche mit jener so nahe als möglich zusammenfällt. Diese gebrochene Linie allein wird aufgenommen und ihrer horizontalen Länge nach bestimmt.

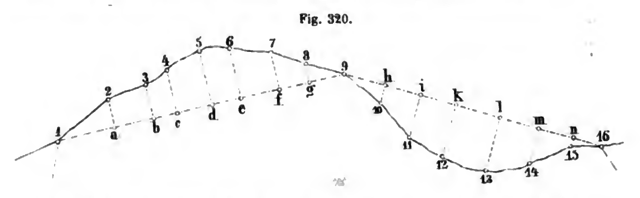
Ist die aufzunehmende Linie nicht bereits abgesteckt, wie es bei regelmässigen Curven für Eisenbahnen oder Strassen der Fall ist, so bezeichne man die aufzunehmenden Punkte 1, 2, 3, 4..... durch numerirte Markpflöcke, welche so weit auseinander stehen, dass die dadurch entstehende gebrochene Linie der vorhin ausgesprochenen Bedingung möglichst genügt.

Hierauf lege man in die krummlinige Figur zwei oder mehr unter sich zusammenhängende gerade Linien (wie z. B. in Fig. 320 die Geraden 1,9 und 9,16) so, dass sie von den aufzunehmenden Punkten nicht zu weit abliegen, und dass sich auf ihnen mit der Messkette oder mit Massstäben leicht messen lässt. Ist dieses geschehen, so mache man einen Handriss von der ganzen Figur und bestimme die gegenseitige Lage der Hilfslinien (1,9 und 9,16), durch Messung ihrer horizontalen Längen und der Winkel (1,9,16), welche sie mit einander bilden.

Schliesslich suche man mit dem Prismenkreuze die Fusspunkte a, b, c, d, e ... der senkrechten Ordinaten der Punkte 2, 3, 4, 5, 6 .., messe die Abscissen 1a, 1b, 1c, 1d .., schreibe die gefundenen Längen in dem

Handrisse bei a, b, c, d, e . . . ein, messe alsdann auch die Ordinaten und trage ihre Längen ebenfalls in die Zeichnung deutlich über.

Fig. 320.



Mit diesen Grössen kann man die krumme Linie 1, 2, 3, 4, 5 . . . 16 annähernd zeichnen und aus der Zeichnung lässt sich ihre Länge entweder abmessen oder berechnen, wenn man es nicht vorzieht, diese Längenbestimmung auf dem Felde unmittelbar zu machen, indem man die Sehnen 1—2, 2—3, 3—4, 4—5, 5—6 . . . misst und addirt.

B. Messung der Winkel und Dreiecke.

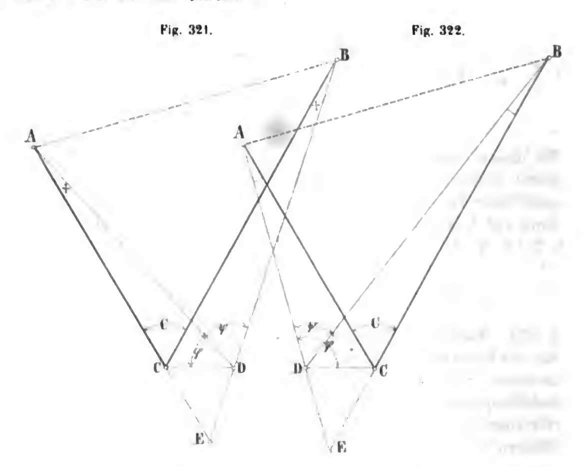
§. 262. Nachdem in der ersten Abtheilung schon gelehrt worden ist, wie man mit der Kreuzscheibe, dem Winkelspiegel, dem Winkelprisma und dem Prismenkreuze rechte Winkel absteckt; mit Hilfe des Messtischapparats die Horizontalprojection schiefer Winkel graphisch darstellt; und mit Theodolithen, Spiegelkreisen und Bussolen beliebige Winkel nach Graden und ihren Unterabtheilungen unmittelbar ausmisst; so hat sich die gegenwärtige Abtheilung in Bezug auf Winkel nur mehr mit den mittelbaren Bestimmungen derselben und mit dem Einflusse der regelmässigen Beobachtungsfehler auf unmittelbare Winkelmessungen, in Bezug auf Dreiecke aber mit deren Aufnahme durch den Theodolithen und den Messtisch, mit der Ausgleichung der gemessenen Dreieckswinkel, mit den Folgen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler und mit der Bestimmung derjenigen Gestalt der Dreiecke zu beschäftigen, welche diesen Fehlern den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Stücke eines Dreiecks gestattet. Die Anlage und Berechnung der Dreiecknetze für grössere Terrainaufnahmen wird in dem Capitel über Landesvermessungen erörtert werden.

1. Mittelbare Winkelmessungen.

§. 263. **Aufgabe. Die Grösse eines Horizontalwinkels, dessen Scheitel unzugänglich ist, durch Messungen in der Nähe dieses Scheitels zu bestimmen.**

Diese Aufgabe kommt bei der Anlage von Dreiecknetzen öfters vor und ist den Geometern unter der kürzeren Bezeichnung: „einen Winkel zu centriren," bekannt. Ist nämlich in den Figuren 321 bis 324 der zu messende

Winkel durch ACB vorgestellt und kann derselbe nicht in C gemessen werden, so wählt man hiezu einen um C herum liegenden Punkt D, misst den Winkel ADB nebst einigen Hilfsgrössen und berechnet daraus den Winkel ACB. Den Inbegriff dieser Arbeiten nennt man das Centriren des Winkels ADB auf den Scheitel C.



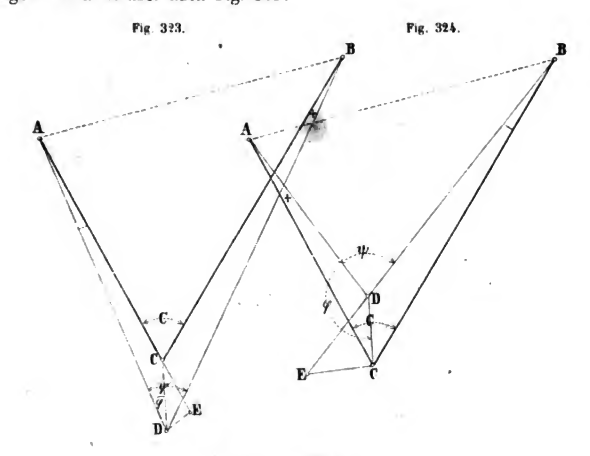
Dieses Centriren fordert, dass die Längen der Winkelschenkel AC = b und BC = a, die Seite CD = e und die Winkel ADB = ψ und CDA = φ bekannt seyen. Bei einer Triangulirung kennt man aber immer die Seiten a und b aus den anstossenden Dreiecken, und die Winkel φ und ψ können unmittelbar gemessen werden, da man den Standpunkt D so wählen wird, dass man ungehindert nach A, B, C visiren kann. Dagegen lässt sich die Grösse der Excentricität e nur selten unmittelbar bestimmen; wesshalb sie in den meisten Fällen mittelbar dadurch gefunden wird, dass man in einem Hilfsdreiecke CDE eine Seite DE nebst den zwei anliegenden Winkeln sehr genau misst und hieraus CD = e berechnet.

Da der Punkt D um C herum jede beliebige Lage haben kann, so wird sich der Ausdruck für den gesuchten Winkel ACB = C je nach der Lage von D verschieden gestalten, wenn man jedem der in die Rechnung eintretenden Winkel einen positiven Werth beilegt; setzt man dagegen fest, dass der Winkel ADB stets mit $+ \psi$, der Winkel ADC stets mit $+ \varphi$, der Winkel CAD aber mit $\pm \alpha$ und CBD mit $\pm \beta$ bezeichnet werde, je nachdem der Schenkel DA und beziehungsweise DB rechts oder links von CA und beziehlich von CB liegt: so fallen alle Ausdrücke für C, wie man

aus den beigedruckten Figuren leicht selber finden wird, in den einen zusammen:

$$C = \psi + \beta - \alpha. \quad \ldots \ldots \quad (235)$$

Man braucht daher auch nur diesen einzigen Ausdruck zu berücksichtigen. Nun ist aber nach Fig. 321:



$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \sin \varphi,$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \sin (\varphi + \psi);$$

folglich, weil α und β immer nur sehr kleine Winkel sind, auch

$$\alpha = \frac{e \sin \varphi}{b \sin 1''} \text{ Sekunden},$$

$$\beta = \frac{e \sin (\varphi + \psi)}{a \sin 1''} \text{ Sekunden};$$

und daher der gesuchte Winkel

$$C = \psi + \frac{e}{\sin 1''} \left[\frac{\sin (\varphi + \psi)}{a} - \frac{\sin \varphi}{b} \right] \text{Sek.} \quad (236)$$

Die Grösse $\beta - \alpha = \delta$, um welche ψ verbessert werden muss, um C zu geben, lässt sich in dem Falle, wo man auch die Winkel $CAB = A$ und $ABC = B$ an der Seite $AB = c$ des Dreiecks ABC kennt, so darstellen, dass sie für die logarithmische Berechnung bequemer wird; denn da nach Fig. 321:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin (B + C)}{\sin B}, \quad \ldots \ldots \quad (237)$$

und nach Gleichung (236):

$$\delta = \frac{e}{a \sin 1''}\left[\sin(\varphi + \psi) - \frac{a}{b}\sin\varphi\right] \text{Sek.}, \quad . \quad (238)$$

so wird mit Rücksicht darauf, dass $\sin(B + C) = \sin(B + \psi)$ gesetzt werden darf, die Verbesserung

$$\delta = \frac{e \sin\psi \sin(B - \varphi)}{a \sin B \sin 1''} \text{Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (239)$$

Das Vorzeichen dieses Ausdruckes für δ hängt nur davon ab, ob der Winkel φ grösser oder kleiner ist als B; ist nämlich $B > \varphi$, so wird δ positiv, ausserdem aber negativ. Nun ist nach den Figuren 321 und 322 der Winkel $\varphi = B$, wenn D auf dem Kreise ABC liegt; ferner ist $\varphi > B$, wenn sich D innerhalb dieses Kreises befindet; und es ist $\varphi < B$, wenn D ausserhalb des Kreises ABC liegt. Es wird somit $\delta = 0$, wenn D ein Punkt des Kreises ABC ist, und es erlangt δ einen positiven oder negativen Werth, je nachdem D ausser- oder innerhalb des genannten Kreises liegt. Die Grösse δ wird aber auch dann noch null, wenn ein Winkelschenkel (a) im Vergleich zur Excentricität (e) unendlich gross ist, oder wenn die beiden Winkelschenkel ausserordentlich lang sind. Würden also die beiden Punkte A und B oder nur einer von ihnen Sterne bedeuten, so fiele die Verbesserung δ, als verschwindend klein, weg.

Manche Geodäten messen den dritten Winkel eines Dreiecks selbst dann ausserhalb des Scheitels, wenn Nichts die centrische Aufstellung des Theodolithen hindert. Als Grund dieses Verfahrens geben sie die grössere Unbefangenheit an, welche der Beobachter besitze, wenn er das von seiner directen Messung erwartete Resultat nicht im Voraus kennt.[1] Wir unterlassen es, ausführlicher zu untersuchen, welches Gewicht auf dieses aus Misstrauen in die eigene oder eine fremde Person entspringende Verfahren zu legen sey, und bemerken bloss, dass uns eine unmittelbare Messung immer lieber ist als eine mittelbare.

Da sich der Winkel C aus A und B durch Rechnung finden lässt, so mag Vielen die Messung bei C als überflüssig erscheinen; bei gewöhnlichen Dreieckmessungen ist dieses allerdings der Fall, aber bei grösseren Triangulirungen soll der Controle der Messung wegen jeder Winkel eines Dreiecks für sich und, wo es angeht, unmittelbar gemessen werden.

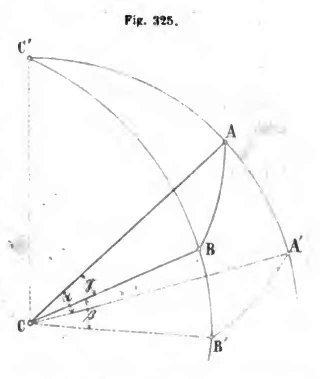
§. 264. **Aufgabe. Ein schiefer Winkel und die Neigung seiner Schenkel gegen den Horizont ist gegeben: man soll die Grösse seiner Horizontalprojection berechnen.**

Die Bestimmung dieser Projection wird von den Geometern mit dem kürzeren Ausdrucke: „einen Winkel auf den Horizont zu reduciren," bezeichnet. Soll der schiefe Winkel ACB (Fig. 325) reducirt werden, so denke man sich durch seinen Scheitel C eine Horizontalebene und durch jeden Schenkel CA, CB eine Vertikalebene gelegt. Diese Vertikalebenen

[1] Dieses Resultat ist ihm aber bekannt, da er schon vorher die Winkel bei A und B gemessen und vorläufig $C = 180^0 - A - B$ berechnet hat.

schneiden sich selbst in der lothrechten Geraden CC' und die Horizontalebene nach den Linien CA', CB', welche die gesuchte Horizontalprojection A'CB' des gegebenen schiefen Winkels ACB vorstellen. Denkt man sich ferner um den Scheitel C eine Kugelfläche vom Halbmesser = 1 beschrieben, so wird diese von der Ebene des schiefen Winkels nach dem grössten Kreise AB, von der Horizontalebene nach A'B', und von den Vertikalebenen nach den Bögen CAA', CBB' geschnitten; es entstehen folglich zwei sphärische Dreiecke, die beide den gesuchten Winkel enthalten, nämlich das gleichschenkelige Dreieck A'B'C' und das schiefwinkelige ABC'. Von dem letzteren sind die drei Seiten bekannt; denn es ist $AB = c = \gamma$ = dem gemessenen schiefen Winkel ACB; $AC' = b = 90^0 - \alpha$ = dem Complement des Neigungswinkels α des Schenkels CA; $BC' = a = 90^0 - \beta$ = dem Complement des Neigungswinkels β des Schenkels CB.

Fig. 325.



Man findet folglich den Winkel $A'CB' = C' = \gamma'$ aus der bekannten Grundformel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

wenn man darin $a = 90^0 - \beta$, $b = 90^0 - \alpha$, $c = \gamma$ und $C = \gamma'$ setzt. Nach dieser Substitution und einer einfachen Umformung ergibt sich schliesslich

$$\cos \frac{\gamma'}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta}} \quad . \quad . \quad (240)$$

Will man den Winkel γ' nicht hieraus berechnen, so setze man in der aus der vorigen Grundformel folgenden Gleichung:

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (241)$$

den bekannten Quotienten

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \gamma} = \cos \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (242)$$

und bestimme mit Benützung des hieraus berechneten Hilfswinkels δ den Winkel γ' aus der Gleichung:

$$\cos \gamma' = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta \cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (243)$$

welche sich sehr einfach entwickelt.

Obwohl die Formeln (240) und (243) zur Berechnung des Winkels γ' aus γ und den Reductionselementen α und β sehr einfach sind, so kann man sich doch in dem Falle, wo α und β sehr kleine Winkel bezeichnen,

noch bequemer einer Näherungsformel bedienen, deren Entwickelung wir hiermit andeuten.

Aus Gleichung (241) folgt ohne Weiteres:

$$\cos\gamma - \cos\gamma' = \sin\alpha \sin\beta - \cos\gamma' (1 - \cos\alpha \cos\beta).$$

Setzt man, was unter der eben gemachten Annahme erlaubt ist, $\sin\alpha = \alpha \sin 1''$, $\sin\beta = \beta \sin 1''$ und das Product

$$\cos\alpha \cos\beta = 1 - {}^1\!/_2 (\alpha^2 + \beta^2) \sin^2 1'',$$

wobei α und β in Sekunden auszudrücken sind: so erhält man zunächst

$$\cos\gamma - \cos\gamma' = [\alpha\beta - {}^1\!/_2 (\alpha^2 + \beta^2) \cos\gamma'] \sin^2 1''.$$

Da aber $\cos\gamma - \cos\gamma' = 2 \sin {}^1\!/_2 (\gamma - \gamma') \sin {}^1\!/_2 (\gamma + \gamma')$ und genau genug $2 \sin {}^1\!/_2 (\gamma - \gamma') = (\gamma - \gamma') \sin 1''$, $\sin {}^1\!/_2 (\gamma + \gamma') = \sin\gamma$ und ${}^1\!/_2 \cos\gamma' = {}^1\!/_2 \cos\gamma$ ist, so folgt schliesslich die Reductionsgrösse

$$\varrho = \gamma - \gamma' = \frac{\alpha\beta - {}^1\!/_2 (\alpha^2 + \beta^2) \cos\gamma}{206265 \sin\gamma} \text{ Sekunden}, \quad . \quad . \quad (244)$$

welche für $\gamma = 90^0$ übergeht in

$$\varrho' = \frac{\alpha\beta}{206265} \text{ Sekunden},$$

und für $\alpha = 0^0\,34'\,22''$ und $\beta = 1^0\,40' = 100' = 6000''$ die Verbesserung $\varrho' = 60''$ liefert.

In den vorausgehenden Entwickelungen wurden α und β als Höhenwinkel und desshalb beide als positive Grössen angesehen; erscheint nun einer oder der andere als Tiefenwinkel, so ist er als negative Grösse zu behandeln und zu berücksichtigen, dass $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$ ist. Werden α und β zugleich negativ, so ändern sich selbstverständlich die Ausdrücke Nr. 240 bis 244 gar nicht.

Sind α und β Höhenwinkel, so können sie eben so wie der Winkel γ mittels des Spiegelkreises oder des Spiegelsextanten unter Anwendung eines Quecksilber- oder Glashorizonts nach §. 152 gemessen werden; als Tiefenwinkel sind sie aber auf andere Weise zu bestimmen, wozu sich im Allgemeinen drei Wege darbieten. Entweder kann man nämlich den Tiefenwinkel in einen Höhenwinkel verwandeln, indem man die Neigung des Schenkels nicht von C, sondern von A oder B aus misst; oder man bestimmt den Tiefenwinkel durch einen Theodolithen; oder endlich man sucht den Höhenunterschied zwischen C und A = p, und zwischen C und B = q durch Nivelliren und die horizontalen Längen CA = m und CB = n durch mittel- oder unmittelbare Messung, und berechnet die absolute Grösse von α oder β aus den Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{m} \text{ und } \operatorname{tg}\beta = \frac{q}{n}.$$

Könnte man den Winkel γ nicht mit einem Theodolithen oder Spiegelinstrumente messen, so liesse sich seine Horizontalprojection γ' dadurch finden, dass man in den Schenkeln CA und CB zwei Punkte D und E absteckt, in dem dadurch gebildeten Dreiecke CDE die drei Seiten c, d, e

und ihre Neigungswinkel oder sofort die Horizontalprojectionen c', d', e' dieser Seiten misst und aus letzteren nach der bekannten trigonometrischen Formel:

$$(d' e')^2 \sin^2 \gamma' = 4 s (s - c') (s - d') (s - e'),$$

in welcher $s = \frac{1}{2} (c' + d' + e')$ ist, den Winkel γ' berechnet.

2. Einfluss der regelmässigen Beobachtungsfehler auf die Winkelmessungen.

§. 265. Keine Messung ist ganz fehlerfrei, wenn sie auch mit den vorzüglichsten Instrumenten und unter den günstigsten äusseren Bedingungen von dem geschicktesten Geometer ausgeführt wurde; denn aus der Unvollkommenheit unserer Sinne und mathematischen Werkzeuge, aus unberechenbaren Einflüssen der Witterung, Beleuchtung, Temperatur etc., oder aus anderen zufälligen Störungen, die der Beobachter kaum wahrnimmt, entspringen immer gewisse, wenn auch ganz kleine Abweichungen von der absolut richtigen Grösse, die wir messen wollen. Diese Abweichungen heissen zufällige oder unvermeidliche Fehler und werden in dem fünften Capitel dieses Abschnitts besonders betrachtet. Es gibt aber auch Messungsfehler, welche durch geschickte Behandlung vorzüglicher Instrumente und geeignete Messoperationen vermieden werden können, oder deren Einfluss auf die Beobachtungsresultate sich berechnen und dadurch ausgleichen lässt. Diese Fehler heissen im Gegensatze zu den zufälligen Fehlern constante oder regelmässige Fehler, weil sie unter denselben Umständen stets in gleicher Grösse auftreten und aus den sie veranlassenden Ursachen berechnet werden können. Von diesen Fehlern ist hier die Rede.

Die regelmässigen oder constanten Fehler, welche bei der Winkelmessung vorkommen, können verschiedene Ursachen haben; zu den am häufigsten auftretenden Fehlerquellen sind aber folgende zu rechnen:

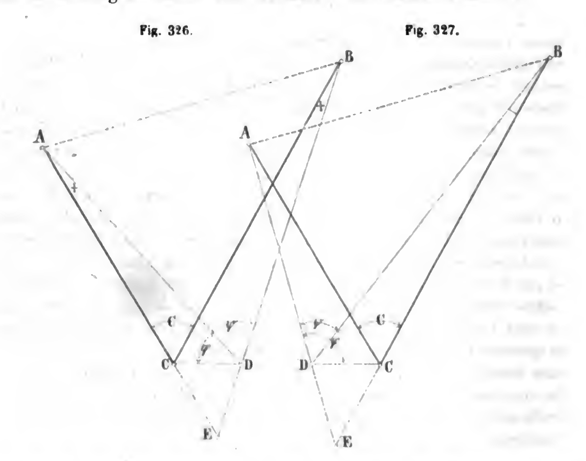
1) die excentrische Aufstellung des Theodolithen oder des Messtisches;
2) die Excentricität der Alhidade des Theodolithen oder der Kippregel;
3) die Excentricität des Fernrohrs am Theodolithen oder an der Kippregel;
4) die schiefe Lage der Limbus- oder Messtischebene;
5) die Neigung der Visirebene gegen das Loth;
6) die unrichtige Lage der anzuvisirenden Punkte.

Bei den nachfolgenden Berechnungen der Einflüsse dieser Fehlerquellen auf die unmittelbaren Winkelmessungen wird vorausgesetzt, dass immer nur eine Quelle vorhanden sey, aus der Fehler entspringen, während alle übrigen als nicht vorhanden angesehen werden. Nach der Grösse ihres Einflusses wird sich selbstverständlich die Sorgfalt zu richten haben, welche auf ihre Vernichtung zu wenden ist.

§. 266. Aufgabe. Die Grösse des Einflusses der excentrischen Aufstellung des Theodolithen oder Messtisches auf die Messung eines Horizontalwinkels zu bestimmen.

Der Messungsfehler, welcher hier behandelt wird, besteht darin, dass beim Theodolithen die Alhidadenaxe und beim Messtische der auf dem Blatte gegebene Scheitelpunkt des Winkels nicht in das Loth des natürlichen Winkelscheitels gestellt wird. Denkt man sich dieses Loth bis zum Horizontalkreise des Theodolithen oder bis zur Messtischebene verlängert, so wird der Abstand seines Schnittpunktes von dem Durchgangspunkt der Alhidadenaxe oder von dem Bildpunkte des Winkelscheitels die Grösse der Excentricität der Aufstellung des einen oder des andern Instruments bezeichnen.

Fig. 326. Fig. 327.

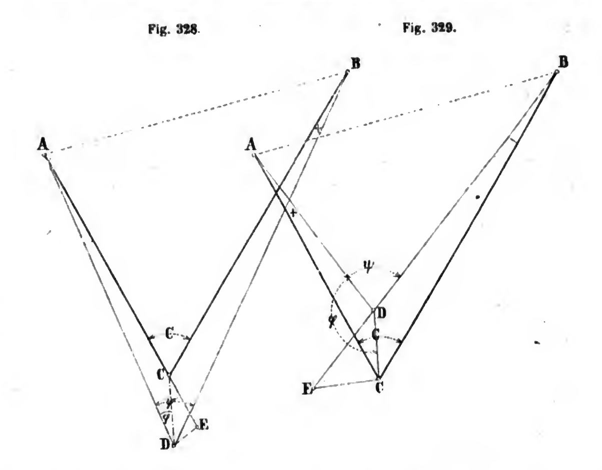


Ist in Fig. 326 der Punkt C die Projection des natürlichen Winkelscheitels und D der Durchgangspunkt der Alhidadenaxe auf dem Horizontalkreise oder der Bildpunkt des Winkelscheitels auf dem Messtischblatte, stellt also die Linie $CD = e$ die Excentricität der Aufstellung des Winkelmessers vor: so wird statt des auf dem Felde gegebenen Horizontalwinkels $ACB = C$ der Horizontalwinkel $ADB = \psi$ gemessen und es besteht folglich der Einfluss der excentrischen Aufstellung des Instruments in dem Unterschiede der Winkel C und ψ, d. h. es ist der gesuchte Fehler

$$\delta = C - \psi = \beta - \alpha, \quad \ldots \ldots \quad (245)$$

wobei α den sehr kleinen Winkel CAD und β den ebenfalls sehr kleinen Winkel CBD bezeichnet.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem in Nro. 235 aus den Figuren 321 bis 324 abgeleiteten, so findet man zwischen beiden eine völlige Uebereinstimmung. Auch hier kann der Punkt D rings um C herum liegen, wesshalb bezüglich der Lage der Reductionswinkel α und β die vier Fälle möglich



sind, welche jene hier wiederholten Figuren darstellen und welche sich in dem obigen Ausdrucke zusammenfassen lassen, wenn man α oder β positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Schenkel DA oder DB rechts oder links von CA oder CB liegen. Mit Bezug auf die in §. 263 enthaltenen Entwickelungen und namentlich nach Gl. (238) erhält man daher

$$\delta = \frac{e}{a \sin 1''}\left[\sin(\varphi + \psi) - \frac{a}{b}\sin\varphi\right] \text{Sek.} \quad (246)$$

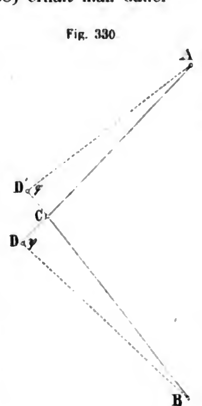
Der Einfluss δ der excentrischen Aufstellung des Instruments wird null:

a) wenn $C = \psi$ oder $\beta = \alpha$ ist, d. h. wenn der Punkt D auf dem Kreise ABC liegt, und

b) wenn die Winkelschenkel im Vergleich zur Excentricität sehr lang sind; und er wird bei unveränderlichem Werthe der Grössen a, b, c am grössten:

a) wenn $\psi = 90^0$ und $\varphi = 0$, d. h. wenn sich der Standpunkt D des Instruments, wie Fig. 330 zeigt, auf dem Schenkel AC befindet und der zu messende Winkel nahezu ein rechter ist, und

b) wenn $\psi = 90^0$ und $\varphi = 90^0$, d. h. wenn sich der Standpunkt D′ auf dem Schenkel CB befindet und der zu messende Winkel ebenfalls nahezu ein rechter ist.



In dem ersteren dieser beiden Fälle wird der Fehler

$$\delta = \delta_1 = + \frac{e}{a \sin 1''} \text{ Sek.}, \qquad (247)$$

und in dem zweiten Falle erhält man

$$\delta = \delta_2 = - \frac{e}{b \sin 1''} \text{ Sek.} \qquad (248)$$

Würde also die Excentricität e einen Dezimalzoll betragen und wäre der Winkelschenkel a = b = 206,2 Fuss = 2062 Dezimalzoll, so erhielte man für beide Fälle den Fehler

$$\delta = \pm \frac{206265}{2062} = \pm 100 \text{ Sek.}$$

Wenn sich ein solcher Fehler auch noch bei einer Messtischaufnahme ertragen lässt, so kann er doch nimmermehr bei einer Winkelmessung mit dem Theodolithen geduldet werden; wesshalb auf die centrische Aufstellung dieser Instrumente, wozu früher Anleitung gegeben wurde, grosse Sorgfalt verwendet werden muss.

§. 267. Aufgabe. Den Fehler in der Winkelaufnahme zu berechnen, welcher aus der Excentricität der Alhidade entspringt.

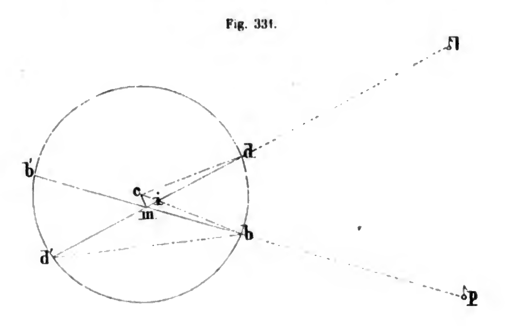
Wird der Horizontalwinkel durch einen Theodolithen gemessen, so ist die Grösse dieses Fehlers bereits aus der Instrumentenlehre bekannt, welche in §. 138 die Entwickelung der Formel

$$f = 412530 \cdot \frac{e}{r} \sin {}^1\!/_2\, \varphi' \cos (\omega - {}^1\!/_2\, \varphi') \text{ Sek.} \qquad (249)$$

enthält, worin mit Bezug auf Fig. 331 folgende Bezeichnungen gebraucht sind:

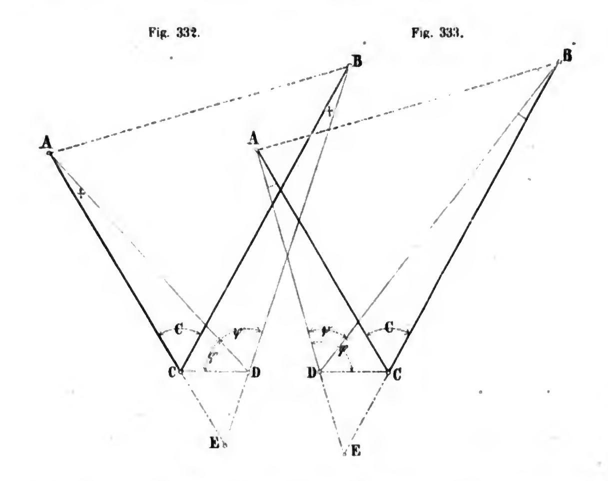
e für die Excentricität (cm) der Alhidade;
ω „ den Neigungswinkel (dcm) der Linien cm und cd;
r „ den Halbmesser (cb, cd) des Limbus, und
φ' „ den am Nonius abgelesenen Winkel (bcd).

Fig. 331.



Der Werth von f kann, wie auf S. 201 der ersten Abtheilung dargethan ist, selbst für eine Excentricität der Alhidade von nur $^1/_{20}$ Linie über 3 Minuten betragen, also sehr gross werden. Dieser Einfluss lässt sich aber einfach beseitigen, wenn am Theodolithen zwei sich gegenüberstehende Nonien angebracht sind und abgelesen werden; wesshalb hier wiederholt auf die Wichtigkeit zweier Nonien am Theodolithen und deren gleichzeitige Benützung aufmerksam gemacht wird.

Bei Messtischaufnahmen tritt die Oberfläche des Tischblattes an die Stelle des Limbus, der Bildpunkt des Winkelscheitels an die Stelle des Kreismittelpunkts, und die Linealkante der Kippregel an die Stelle der Alhidade. Legt man nämlich diese Kante nicht genau an den abgebildeten Scheitelpunkt des Winkels an, so ist eine Excentricität der Alhidade vorhanden und es ist ihre Grösse gleich dem Abstande des gegebenen Scheitelpunkts von dem Scheitel, der sich durch die Aufnahme des Winkels ergibt.



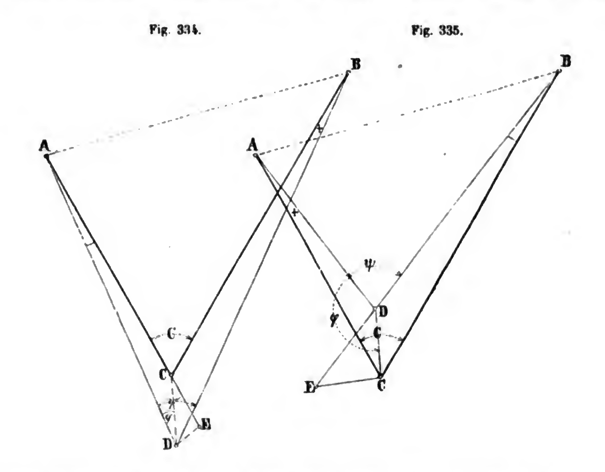
Stellt in den vier Figuren 332 bis 335 der Punkt C den auf dem Messtische abgebildeten Winkelscheitel und ACB den aufzunehmenden Winkel vor, so erhält man, wenn das Lineal nicht in C, sondern entfernt davon angelegt wird, statt des Winkels $ACB = C$ den Winkel $ADB = \psi$. Verbindet man D mit C, so ist CD die Excentricität e des Lineals der Kippregel und $\delta = C - \psi$ der hieraus entspringende Fehler des Winkels C. Nennt man wieder die kleinen Winkel bei A und B beziehlich α und β,

so ist nach den genannten Figuren, und da im Uebrigen die Bezeichnungen und Entwickelungen des §. 263 gelten, hier wie dort der Fehler

$$\delta = \frac{e}{a \sin 1''}\left[\sin(\varphi + \psi) - \frac{a}{b}\sin\varphi\right] \text{Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad (250)$$

Es gelten somit alle Folgerungen, welche im vorigen Paragraph in Bezug auf die excentrische Aufstellung aus dieser Gleichung gezogen wurden, auch für die Grösse des Einflusses der Excentricität der Linealkante. Wenn hiernach die grössten Werthe von δ durch die Ausdrücke Nr. 247 und 248 gegeben sind, so sieht man leicht ein, dass eine geringe Excentricität der Linealkante der Kippregel der Grösse des zu messenden Winkels

Fig. 334. Fig. 335.



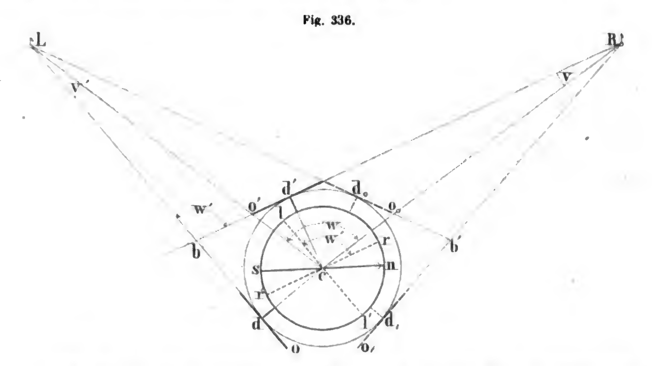
nicht schadet; denn wenn e sogar eine Dezimallinie betrüge und a = b = 206,2 Fuss wäre, so würde δ nur 10 Sekunden ausmachen. Etwas Anderes aber ist es, wenn mit diesem Apparate zusammenhängende Aufnahmen zu machen sind. Würde man hiebei die Linealkante nicht genau an die gegebenen Scheitelpunkte der Winkel anlegen, so entstünden in der gegenseitigen Entfernung einzelner Punkte Fehler, welche der Excentricität des Kippregellineals, mit dem Massstabe der Aufnahme gemessen, gleichkämen: bei der Verjüngung von 1 : 5000 würde somit die Excentricität von $^1/_{10}$ Dezimallinie einem Fehler von 5 Fuss und folglich die Excentricität e = 0,01 Fuss einem Fehler von 50 Fuss entsprechen. Das scharfe Anlegen des Lineals der Kippregel an die voraus bestimmten Winkelscheitel kann somit für Messtischaufnahmen nicht genug empfohlen werden.

§. 268. **Aufgabe. Zu bestimmen, wie gross der aus der Excentricität des Fernrohrs entspringende Fehler eines mit Theodolith oder Kippregel gemessenen Horizontalwinkels ist.**

Denkt man sich durch die vertikale Alhidadenaxe des Theodolithen oder durch die horizontale Linealkante der Kippregel eine Vertikalebene gelegt, welche mit der Fernrohraxe parallel läuft, so ist der Abstand der letzteren Axe von der gedachten Ebene entweder null oder nicht. In dem ersteren Falle hat das Fernrohr des Instruments keine Excentricität, im letzteren aber heisst der Abstand der Fernrohraxe von jener Ebene die Excentricität des Fernrohrs oder der Absehlinie.

Die Wirkung einer solchen Excentricität des Theodolithen kann in folgender Weise beurtheilt und berechnet werden.

Fig. 336.



Es sey in der vorstehenden Figur c die horizontale Projection der Alhidadenaxe, od die gleichnamige Projection der Fernrohraxe und cd = e die Excentricität des Fernrohrs des Theodolithen. Ist mit diesem über c horizontal gestellten Instrumente der Winkel LcR zu messen, so wird das Fernrohr zuerst die Richtung od nach L und hierauf die Richtung o'd' nach R erhalten, wodurch statt des Winkels LcR = w der Winkel LbR = dcd' = w' gemessen wird. Der aus der Excentricität des Fernrohrs entspringende Fehler δ entspricht nun, offenbar dem Unterschiede dieser Winkel und ist daher, wenn man die kleinen Winkel bRc = v und dLc = v' setzt, durch die Gleichung gegeben:

$$\delta = w - w' = v' - v.$$

Haben die Winkelschenkel cR, cL die Längen l, l', und berücksichtigt man, dass l sin v = l' sin v' = e und genau genug

$$v = \frac{e}{l \sin 1''} \text{ Sek. und } v' = \frac{e}{l' \sin 1''} \text{ Sek.}$$

ist: so erhält man sofort, übereinstimmend mit der Formel (94), den Fehler

$$\delta = \frac{e}{\sin 1''}\left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right) \text{Sek.} = 206265\, e \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right) \text{Sek.} \quad . \quad (251)$$

Dieser Fehler wird null, wenn die Winkelschenkel gleich lang sind, und um so grösser, je mehr der Unterschied der Schenkellängen beträgt. Da sein Einfluss bedeutend werden kann und die Vernichtung desselben durch Berechnung umständlich und nicht immer möglich ist (insofern manchmal l und l' unbekannt sind): so ist jeder gute Theodolith so eingerichtet, dass jener Einfluss durch ein entsprechendes Messverfahren auf Null gebracht werden kann; und dieses Verfahren besteht nach der Entwickelung auf S. 172 und der Bemerkung auf S. 201 der ersten Abtheilung darin, dass man den Winkel mit entgegengesetzten Lagen des Fernrohrs zweimal misst, und aus den beiden Messungsresultaten das Mittel nimmt.

Die Excentricität der Visirebene der Kippregel hat, wie leicht einzusehen, keine andere Wirkung, als dass der auf dem Messtischblatte gezeichnete Winkel gegen den in der Natur um die Grösse der Excentricität parallel verschoben erscheint; und diese Verschiebung schadet Nichts, wenn die ganze Aufnahme mit ein und derselben Kippregel durchgeführt wird. Würde dagegen eine Messtischaufnahme mit zwei verschiedenen Kippregeln gemacht, deren Fernrohr-Excentricitäten e und e' sind, so entstünden durch den Anschluss der beiden Theilaufnahmen in den gegenseitigen Entfernungen der nicht mit einer und derselben Kippregel aufgenommenen Punkte Fehler, welche auf der Zeichnung die Grösse e — e' oder e + e' hätten, je nachdem e und e' gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besässen; in Wirklichkeit aber würden die Fehler

$$\delta = m\,(e \mp e') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (252)$$

seyn, wenn m die Verjüngung der Aufnahme bezeichnet.

Ein schlimmerer Feind als die Excentricität der Visirebene ist die schiefe Lage dieser Ebene gegen die Linealkante; da aber der Parallelismus zwischen jener Ebene und dieser Kante nach §. 116 Nr. 5 jeden Augenblick geprüft und hergestellt werden kann, so erscheint es überflüssig, die Folgen eines so leicht zu vermeidenden Fehlers weiter zu untersuchen.

§. 269. **Aufgabe. Man soll den Fehler eines Horizontalwinkels, der bei schiefer Lage der Limbus- oder Messtischebene aufgenommen wird, berechnen.**

Dieser Fehler rührt weniger davon her, dass der durch die Absehlinie des Fernrohrs auf den Limbus oder das Messtischblatt senkrecht projicirte Winkel nicht in einer Horizontalebene liegt, als davon, dass die projicirenden Ebenen nicht vertikal sind und vermöge der Einrichtung des Theodolithen und der Kippregel nicht vertikal seyn können, so lange die Limbus- und Messtischebenen geneigt sind. Könnte man trotz dieser Neigung die anvisirten Winkelschenkel durch Vertikalebenen projiciren, so dürfte die schiefe Lage der Instrumentenebene schon ziemlich gross seyn, wenn ein auffallender Winkelfehler entstehen sollte, wie aus den Formeln des §. 264

hervorgeht, nach welchen in diesem Falle der in Rede stehende Fehler zu beurtheilen wäre.

Um einen klaren Begriff von der Entstehung des zu berechnenden Fehlers zu geben, denken wir uns den gegebenen Naturwinkel W, dessen beide Schenkel in einer gegen den Horizont geneigten Ebene liegen, durch eine in dieser Ebene gezogene und durch den Winkelscheitel gehende gerade Linie in zwei Theile u und v zerlegt und jeden dieser Theile sowie den ganzen Winkel auf eine durch die Theilungslinie gehende Horizontalebene projicirt. Jeder Theilwinkel u und v hat einen wagrechten und einen geneigten Schenkel, und es ist klar, dass die Betrachtungen, welche man für einen derselben anstellt, auch für den anderen gelten. Erfährt man auf diese Weise den Fehler δ in der Horizontalprojection φ des Winkels u, so gilt ein ähnlicher Ausdruck δ' für den Fehler der Projection ψ des Winkels v; der Fehler Δ in der Horizontalprojection Ω des Winkels W, welcher $= u \pm v$ ist, wird somit $= \pm (\delta \pm \delta')$ seyn, je nach der Lage der Winkelschenkel. Die Verbindung der Werthe von δ und δ' ist in einem bestimmten Falle nicht schwierig, und da es hier überhaupt nur darauf ankommt, zu erfahren, ob aus einer schiefen Lage der Limbus- oder Messtischebene bedeutende Messungsfehler entspringen können, so genügt es, hier einen schiefen Winkel u zu betrachten, dessen einer Schenkel horizontal ist.

Zu dem Ende denken wir uns durch diesen Schenkel die unter dem Winkel γ gegen den Horizont geneigte Limbus- oder Messtischebene gelegt und darauf den Winkel u, dessen geneigter Schenkel mit dem Horizont den Winkel α bilden soll, während seine Ebene unter dem Winkel ε dagegen geneigt ist, senkrecht projicirt, wie es durch die Visirebene in der That geschieht. Nennt man diese Projection φ' und die wahre φ, so ist der Fehler des Winkels φ gleich

$$\delta = \varphi' - \varphi,$$

und es kommt nur mehr darauf an, denselben durch die gegebenen Grössen φ, α, γ auszudrücken.

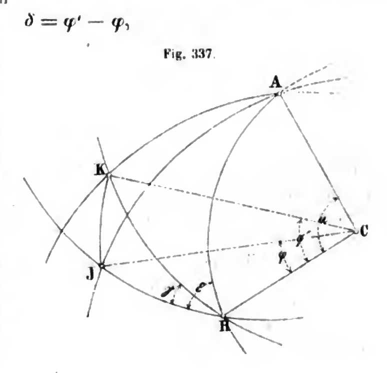


Fig. 337.

Stellt in Fig. 337 der Punkt C den Scheitel, CH den wagrechten und CA den geneigten Schenkel des Winkels ACH = u vor; bezeichnet ferner die Linie CJ die Horizontalspur einer durch CA gelegten Vertikalebene und CK den Schnitt einer zweiten durch CA gehenden und auf der Limbus-

oder Messtischoberfläche senkrecht stehenden Ebene mit dieser Fläche; und denkt man sich endlich um den Punkt C mit dem Halbmesser $r = 1$ eine Kugelfläche beschrieben, welche die Horizontalebene nach dem grössten Kreisbogen HJ, die Limbusebene nach dem grössten Kreise HK und die beiden projicirenden Ebenen nach den grössten Kreisbögen AJ und AK schneidet: so ist

$$\text{arc } AH = \text{ang } ACH = u,$$
$$\text{arc } JH = \text{ang } JCH = \varphi,$$
$$\text{arc } KH = \text{ang } KCH = \varphi',$$
$$\text{arc } JA = \text{ang } JCA = \alpha,$$
$$\text{W. } AHJ = \varepsilon, \ \text{W. } JHK = \gamma,$$

und es folgt aus dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke AJH:

$$\cot \varepsilon = \sin \varphi \cot \alpha, \quad \ldots \quad (253)$$
$$\text{tang } \varphi = \cos \varepsilon \text{ tang } u, \quad \ldots \quad (254)$$

während man aus dem ebenfalls rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke AKH erhält:

$$\text{tang } \varphi' = \cos (\varepsilon - \gamma) \text{ tg } u. \quad \ldots \quad (255)$$

Mit Hilfe dieser drei Gleichungen kann man den Fehler $\delta = \varphi' - \varphi$ vollständig berechnen; denn da α und φ gegeben sind, so sucht man aus Gleichung (253) den Winkel ε, mit diesem erhält man aus Gleichung (254) den Winkel u, und hiermit endlich aus (255) den Winkel φ'. Soll jedoch die Auflösung der beiden ersten Gleichungen umgangen und φ' sofort aus φ, α, γ gefunden werden, so eliminire man aus der letzten Gleichung mit Hilfe der zwei vorausgehenden die Grössen u und ε, wodurch sich ergibt:

$$\text{tg } \varphi' = \cos \gamma \text{ tg } \varphi + \text{tg } \alpha \sin \gamma \sec \varphi. \quad \ldots \quad (256)$$

Nach einer bekannten trigonometrischen Formel ist

$$\text{tg } (\varphi' - \varphi) = \frac{\text{tg } \varphi' - \text{tg } \varphi}{1 + \text{tg } \varphi' \text{ tg } \varphi};$$

entwickelt man also den letzteren Ausdruck durch Substitution des Werthes von $\text{tg } \varphi'$ und setzt:

$$\text{tg } \alpha \sin \gamma - \sin \varphi (1 - \cos \gamma) = p, \quad \ldots \quad (257)$$

so erhält man die zur Berechnung des gesuchten Fehlers dienende Gleichung:

$$\text{tg } \delta = \frac{p \cos \varphi}{1 + p \sin \varphi}. \quad \ldots \quad (258)$$

Setzt man beispielsweise $\varphi = 30^0$, $\gamma = 1^0$, $\alpha = 10^0$, so wird $p = 0{,}00302$ und $\delta = 0^0\ 8'\ 57''$. Betrüge der Winkel φ dagegen 60^0 und läge die eine Hälfte desselben über, die andere unter der Horizontalebene CHJ, so wäre für die zweite Hälfte ebenfalls $\delta' = 0^0\ 8'\ 57''$ und folglich der ganze Fehler $\Delta = \delta + \delta' = 0^0\ 17'\ 54''$.

Für $\varphi = 90^0$ wird $\delta = 0$, und für $\varphi = 0$ erhält man

$$\text{tg } \delta = p = \text{tg } \alpha \sin \gamma. \quad \ldots \quad (259)$$

In dem letzteren Falle liegt der Winkel φ in einer Vertikalebene. Wäre nun der eine Schenkel unter 45^0 gegen den Horizont geneigt, während der andere wagrecht ist, so erhielte man $\text{tg } \delta = \sin \gamma$ oder sehr nahe

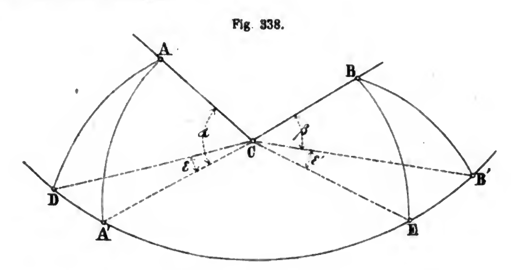
$\delta = \gamma$; d. h. es würde das Instrument bei einer Neigung seines Horizontalkreises von einem Grad auch den Horizontalwinkel φ, welcher null ist, gleich einem Grad angeben.

Man entnimmt hieraus zur Genüge, wie nachtheilig die schiefe Lage der Limbus- oder Messtischebene werden kann, und wie sorgfältig sie demnach zu vermeiden ist.

§. 270. Aufgabe. Den Fehler in der Aufnahme eines Horizontalwinkels zu berechnen, welcher aus der schiefen Lage der Visirebene gegen die Limbus- oder Messtischebene entspringt.

Die Ebene des Limbus oder des Messtisches wird jetzt als horizontal vorausgesetzt, die Visirebene aber bilde in Folge der geneigten Lage der Drehaxe des Fernrohrs mit der vertikalen Alhidadenaxe einen Winkel γ. Der zu messende Winkel heisse ACB und habe zwei über die horizontale Limbus- oder Messtischebene, welche wir uns durch den Scheitel C gelegt denken, erhobene Schenkel.

Fig. 338.



In Fig. 338 stelle die aus C beschriebene Kreisfläche DA'EB' den Limbus oder das Messtischblatt, AC den einen, BC den anderen Winkelschenkel vor, und AC sey unter dem Winkel α, BC unter β gegen den Horizont geneigt. Denkt man sich um den Scheitel C eine Kugel vom Halbmesser $CD = CE = 1$ beschrieben, so wird diese von der Limbusebene nach dem grössten Kreise DA'EB', von den Visirebenen ACD, BCE nach den grössten Bögen AD, BE, und von den Vertikalebenen ACA', BCB' nach den grössten Bögen AA', BB' geschnitten, und es stellt $A'CB' = \varphi$ den richtigen, $DCE = \psi$ aber den falschen Horizontalwinkel vor. Der Schenkel CD, welchen die Visirebene ACD projicirt, ist um den Winkel $DCA' = \varepsilon$ und der Schenkel CE, welcher aus der Visirebene BCE entspringt, um den Winkel ε' fehlerhaft; folglich ist der Gesammtfehler δ in dem vorliegenden Falle $= \varepsilon - \varepsilon'$. Läge dagegen der Schenkel CB unter der Limbusebene, so würde der Fehler $\delta' = \varepsilon + \varepsilon'$ seyn, wie man sich leicht selber klar machen kann.

Betrachtet man die rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke ADA' und BEB', so sieht man sofort, dass dieselben zur Berechnung der Fehlerwinkel ε und ε' geeignet sind. Denn es ist in ADA' der Bogen $A'D = \varepsilon$, arc $AA' = \alpha$, Winkel $AA'D = 90^0$ und Winkel $ADA' = 90^0 - \gamma$, wenn γ der Neigungswinkel der Visirebene gegen das Loth ist; folglich findet man

$$\sin \varepsilon = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma.$$

Im Dreiecke BEB' ist der Bogen $EB' = \varepsilon'$, arc $BB' = \beta$, Winkel $BB'E = 90^0$ und Winkel $BEB' = 90^0 - \gamma$; mithin auch

$$\sin \varepsilon' = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Berücksichtigt man, dass ε und ε' immer nur kleine Winkel sind, und dass desshalb

$$\varepsilon = 206265 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma \text{ Sek. und}$$
$$\varepsilon' = 206265 \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \text{ Sek.}$$

gesetzt werden darf, so wird der gesuchte Winkelfehler

$$\delta = 206265 \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \text{ Sek.}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (260)$$

wobei zu bemerken ist, dass α und β positiv zu nehmen sind, wenn sie Höhenwinkel, und negativ, wenn sie Tiefenwinkel vorstellen. Ist also der Schenkel CB abwärts geneigt, mithin β negativ, so wird

$$\delta = \delta' = 206265 \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \text{ Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad (261)$$

Setzt man in dem letzteren Falle $\alpha = + 20^0$, $\beta = - 20^0$, so folgt für $\gamma = 1^0$ der Fehler $\delta' = \varepsilon + \varepsilon' = 2621$ Sek. $= 44$ Minuten. Dieser Fehler gilt für jeden Horizontalwinkel, also auch für einen, der sehr nahe an Null liegt; woraus zu entnehmen ist, wie vielmal grösser der Fehler als der gemessene Winkel werden kann, und wie nothwendig es ist, durch sorgfältige Berichtigung des Theodolithen und der Kippregel die schiefe Lage der Visirebene zu vermeiden. Da bei Messtischaufnahmen diese Lage auch dann eintritt, wenn das Lineal der Kippregel durch unterliegende Sandkörnchen u. s. w. einseitig erhoben wird, so ist hiebei weiter noch auf die Reinheit des aufgespannten Papiers und beziehungsweise der Tischoberfläche zu achten.

§. 271. Aufgabe. Zu bestimmen, wie gross die wegen der unrichtigen Lage der Zielpunkte entstehenden Fehler der Horizontalwinkel werden.

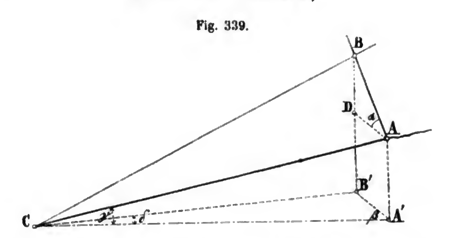
Die Zielpunkte sind durch Signale gegeben, welche aus Stangen, Pfeilern, Pyramiden u. dergl. bestehen. Kommt es nun vor, dass z. B. ein Stangensignal schief statt lothrecht steht und man visirt nicht den Fusspunkt dieses Signals an, so hat man einen unrichtigen Zielpunkt benützt und dadurch einen Fehler in den gemessenen Winkel gebracht. Dasselbe geschieht, wenn eine lothrechte cylindrische Säule oder eine polirte Kugel nicht in der Richtung eines Durchmessers, sondern seitwärts anvisirt wird.

1) Stellt die Linie CA in Fig. 339 einen Winkelschenkel, C den Scheitel des Winkels und den Mittelpunkt des Instruments, AB aber die schiefe Signalstange vor, und geht die Visirlinie nach dem Punkte B statt nach A: so erhält man nicht die richtige Projection CA' des Schenkels CA,

sondern die falsche CB′, wodurch in den Horizontalwinkel ein Fehler A′CB′ $= \delta$ kommt, welcher lediglich von dem Signale AB herrührt. Ist dasselbe unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt und heisst h die Entfernung des Punktes B von A, so ist die Horizontalprojection von AB oder

$$AD = A'B' = h \cos \alpha;$$

Fig. 339.



nennt man ferner l die Länge des Schenkels CA und γ dessen Neigungswinkel gegen den Horizont, so ist $CA' = l \cos \gamma$; und wird endlich der Winkel CA′B′, unter welchem die projicirende Ebene ACA′ gegen die Signalebene ABD geneigt ist, mit β bezeichnet: so kennt man in dem Dreiecke A′B′C drei Stücke und kann folglich den Winkel δ desselben finden. Es wird nämlich genau

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma - h \cos \alpha \cos \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (262)$$

und, wenn man $h \cos \alpha \cos \beta$ gegen das weit grössere Product $l \cos \gamma$ vernachlässigt, näherungsweise

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (263)$$

Berücksichtigt man ferner noch, dass δ nur ein kleiner Winkel ist und folglich $\operatorname{tg} \delta = \delta \sin 1''$ gesetzt werden darf, so ergibt sich schliesslich mit hinreichender Genauigkeit der Fehler

$$\delta = \frac{h \cos \alpha \sin \beta}{l \cos \gamma \sin 1''} \text{ Sek.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (264)$$

In so ferne der Werth dieses Ausdruckes bloss von β abhängt, wird er am grössten, wenn $\beta = 90^0$ ist, d. h. wenn die Visirebene senkrecht zur Signalebene steht; lässt man ihn nur von γ abhängen, so wird er am kleinsten für $\gamma = 0$ und am grössten für $\gamma = 90^0$. Setzt man $\gamma = 0$ und $\beta = 90^0$, so findet man

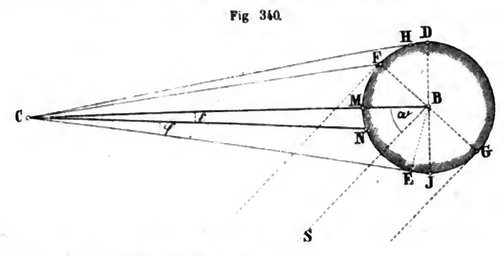
$$\delta = \frac{h \cos \alpha}{l \sin 1''}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (265)$$

woraus zu entnehmen, dass δ mit der Höhe (h) des anvisirten falschen Punktes (B) und mit dem Neigungswinkel (α) der Signalstange wächst, dagegen aber mit der Länge des Winkelschenkels abnimmt.

2) Wenn eine als Signal dienende runde Säule (B, Fig. 340) nicht in

der Richtung der Visirebene (CB) von der Sonne beleuchtet ist, so wird man das Fadenkreuz des bei C befindlichen Fernrohrs nicht auf die Mitte M der sichtbaren Cylinderfläche HE, sondern auf die Mitte N des von der Sonne in der Richtung SB beschienenen und von C aus sichtbaren Theils FE dieser Fläche einstellen und dadurch einen Fehler in den Horizontalwinkel bringen, welcher dem Winkel $MCN = \varepsilon$ entspricht.

Fig. 340.



Um ε zu berechnen bezeichnen wir mit

ω den Winkel der Sonnenstrahlen gegen die Visirebene CB; mit
r den Halbmesser FB der anvisirten Säule; mit
l die Länge des Winkelschenkels CB; und mit
φ den Winkel FCN, welcher gleich dem Winkel NCE ist.

Aus dem als gleichschenkelig anzusehenden Dreiecke CFB folgt

$$\sin(\varphi - \varepsilon) = \frac{r \cos \omega}{l} \quad \text{. . . . .} \quad (266)$$

und aus dem bei B rechtwinkeligen Dreiecke CBE erhält man

$$\sin(\varphi + \varepsilon) = \frac{r}{l} . \quad \text{. . . . .} \quad (267)$$

Da nun $\varphi - \varepsilon$ und $\varphi + \varepsilon$ sehr kleine Winkel sind und daher

$$\varphi - \varepsilon = \frac{r \cos \omega}{l \sin 1''} \text{ Sek.},$$

$$\varphi + \varepsilon = \frac{r}{l \sin 1''} \text{ Sek.}$$

ist, so findet man aus diesen beiden Gleichungen sofort den Winkel

$$\varepsilon = \frac{r \sin^2 \frac{1}{2} \omega}{l \sin 1''} \text{ Sek.} \quad \text{. . . . .} \quad (268)$$

und für den besonderen Fall, dass $\omega = 60^0$, $r = 0',5$ und $l = 1000'$ ist, $\varepsilon = 25,8$ Sekunden. Hieraus folgt, dass dieser Fehler selbst bei minder scharfen Messungen nicht immer übersehen werden darf.

3. Aufnahme der Dreiecke mit dem Messtische.

§. 272. Es ist bereits bekannt, wie man einen gegebenen Punkt des Messtisches centrisch über einem gegebenen Punkt des Feldes aufstellt und

gleichzeitig das Blatt nach einer gegebenen Richtung orientirt und in eine wagrechte Lage bringt; ferner, wie man mit dem Messtische und der Kippregel horizontale Winkel misst. Hier wird gelehrt, wie sich aus drei gemessenen Stücken eines beliebigen Dreiecks auf dem Felde ein diesem ähnliches Dreieck auf dem Messtischblatte zeichnen lässt.

Wenn man bloss nach dem Verhältniss der Seiten eines Naturdreiecks [1] fragt, so genügt ein ähnliches Dreieck auf dem Messtische (ein Bilddreieck) vollkommen, diese Frage zu beantworten; will man aber auch Aufschluss haben über die Grösse der Seiten oder die Fläche des Dreiecks, so muss mindestens eine Seite des Naturdreiecks bekannt und in einem bestimmten verjüngten Massstabe auf dem Messtischblatte aufgetragen seyn, damit man die anderen Seiten mit demselben Massstabe messen kann. [2] Wir nehmen an, dass die Erforschung der absoluten Grössen der Seiten und Flächen stets mit beabsichtigt werde und setzen desshalb immer eine oder zwei Seiten als gegeben voraus.

Bei der Aufnahme der Dreiecke mit dem Messtische kommen eigentlich nur drei verschiedene Fälle vor; es können nämlich entweder zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, oder eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel gemessen werden, um das Dreieck daraus zu construiren. Jeder dieser Fälle wird von den practischen Geometern kurz bezeichnet; diese Bezeichnungen sind aber sehr schwankend und meist nicht gut gewählt. Um jedoch von den gebräuchlichen Ausdrücken die besseren (wenn auch zum Theil in anderem Sinne) zu benützen, bezeichnen wir

a) durch „Vorwärtsabschneiden" die Aufnahme eines Dreiecks aus einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln;

b) durch „Rückwärtsabschneiden" die Aufnahme eines Dreiecks aus einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel; und

c) durch „Seitwärtsabschneiden" die Aufnahme eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

§. 273. Aufgabe. Ein auf dem Felde gegebenes Dreieck mit dem Messtische durch Vorwärtsabschneiden aufzunehmen.

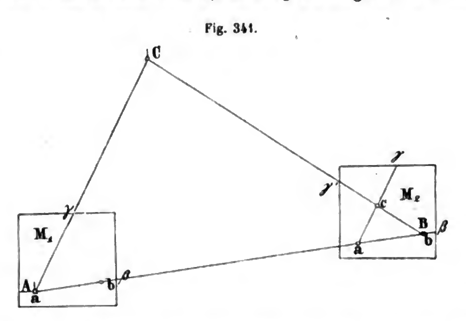
Das Naturdreieck heisse ABC und sein Bilddreieck abc (Fig. 341). Da wir annehmen, dass es sich bloss um die Aufnahme des gegebenen Dreiecks handle, also keine der Seiten des Bilddreiecks auf dem Messtischblatte eine bestimmte Richtung gegen schon vorhandene Linien zu haben brauche: so stellen wir den Messtisch über einem der gegebenen zugäng-

[1] Dieser Ausdruck wird der Kürze halber für »Dreieck auf dem Felde« gebraucht, so wie wir ein Dreieck auf dem Messtische, das einem natürlichen ähnlich ist, das »Bilddreieck« des letzteren nennen.

[2] Man kann zwar das Dreieck auch aufnehmen, ohne sofort die gegebene Seite in einem bestimmten verjüngten Mass aufzutragen; allein dann muss am Ende der Aufnahme deren Verjüngung erst bestimmt werden, wodurch sich der Uebelstand ergibt, dass man zur Messung der Seiten die vorhandenen verjüngten Massstäbe nicht benützen kann, sondern erst einen neuen passenden zeichnen muss.

lichen Punkte (A) des Feldes so auf, dass dessen Bild (a), welches durch die Lothgabel gefunden wird, eine Lage erhält, bei welcher das Bilddreieck auf dem Messtische Platz findet, ohne dass seine Ecken zu nahe an die Ränder des Blattes fallen. Ist der Tisch horizontal gestellt und der Bildpunkt a bestimmt, so legt man an diesen das Lineal der Kippregel genau an, visirt nach B und zieht an der Kante des Lineals mit einem sehr harten Bleistifte eine äusserst feine Linie $a\beta$ so lang als möglich. Auf dieser Linie

Fig. 341.

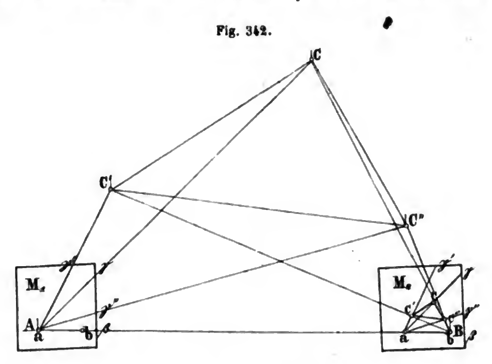


muss der Punkt b liegen, und man erhält ihn, wenn die Horizontalprojection von AB gemessen und im verjüngten Masse als die Linie ab von a aus abgetragen wird. Nachdem b bestimmt ist, visirt man von a nach C und zieht wiederum eine sehr feine Linie $a\gamma$ bis an den Rand des Tischblattes. Nun kommt der Messtisch von der Stellung M_1 in die M_2 über dem Punkte B und zwar dadurch, dass man b lothrecht über B und ba in die Vertikalebene BA bringt, während gleichzeitig das Tischblatt horizontal gestellt wird, was Alles nach §. 113 geschieht. Kürzer bezeichnet man dieses Verfahren, indem man sagt: es wird b centrisch mit B gestellt und der Tisch nach AB orientirt. Hat man sich überzeugt, dass bei horizontalem Tische die Visirlinie der an βa liegenden Kippregel das in A stehende Signal trifft, so visire man von b nach C und ziehe die Linie $b\gamma'$. Diese Linie begegnet der früher gezogenen $a\gamma$ in c und schneidet somit auf dem Messtische den nach vorne liegenden Bildpunkt c ab, der mit a und b das gesuchte Dreieck abc bildet. Denn da der Winkel $\gamma a \beta = A$ und $a b \gamma' = B$, so ist das Dreieck abc dem Dreiecke ABC, wie es seyn muss, ähnlich, und man kann folglich das absolute Mass von AC und BC erhalten, wenn man ac und bc mit demselben Massstabe misst, nach welchem ab aufgetragen wurde.

Da der Punkt C jede beliebige Lage haben, sich also auch in C' oder C'' (Fig. 342) befinden kann, so ist klar, dass sich diese letzteren Punkte von A und B aus gerade so aufnehmen lassen wie der erstere. Werden aber drei

solche Punkte von der Standlinie AB aus aufgenommen, so erhält man auf dem Messtische ein Dreieck cc′c″, welches dem Dreiecke CC′C″ ähnlich und eben so verjüngt ist wie die Grundlinie ab. Es geht hieraus zur Genüge hervor, dass es, um ein Dreieck durch Vorwärtsabschneiden aufzunehmen, nicht gerade nöthig ist, eine seiner Seiten als Standlinie zu wählen, sondern dass sich jede Gerade dazu eignet, welche nicht zu kurz ist, leicht gemessen werden kann und von ihren Endpunkten aus eine freie Aussicht

Fig. 342.



nach den aufzunehmenden Dreieckspunkten gestattet. Ferner sieht man sofort ein, dass man eine beliebige Anzahl Punkte, die um die Standlinie AB vertheilt sind und von ihr aus anvisirt werden können, durch Vorwärtsabschneiden bestimmen kann, und dass somit diese Methode auch zur Aufnahme von Vielecken geeignet ist. Uebrigens bedarf es wohl kaum der Erinnerung, dass man den Standpunkt A nicht eher verlässt, bis alle aufzunehmenden Eckpunkte anvisirt und die Linien $a\beta$, $a\gamma$, $a\gamma'$, $a\gamma''$ gezogen sind, und dass man in B ebenso zu verfahren habe.

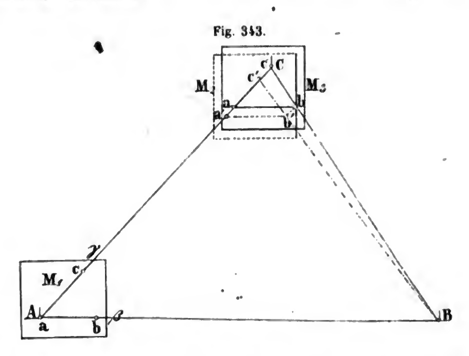
§. 274. **Aufgabe. Man soll ein auf dem Felde gegebenes Dreieck mit dem Messtische durch Rückwärtsabschneiden aufnehmen.**

Es sey wieder ABC (Fig. 343) das gegebene Naturdreieck und abc das gesuchte Bilddreieck. Die Seite, welche bereits gemessen und auf den Horizont reducirt ist, heisse AB, und die zu messenden Winkel seyen A und C.

In dem Punkte A stelle man den Messtisch so auf, dass a centrisch zu A und die Platte horizontal wird. Hierauf visire man nach B und C, ziehe die Linien $a\beta$ und $a\gamma$, und trage AB in verjüngtem Masse (ab) ab. Nachdem die Messung in A vollendet ist, stelle man den Messtisch über C auf. Würde die Länge des Schenkels AC bekannt seyn, so könnte

man durch Abtragen ihrer Verjüngung ac auf aγ den Punkt c bestimmen, und es wäre die Aufgabe gelöst. Da aber AC unbekannt ist, so schätzt man diese Länge und nimmt darnach vorläufig den Punkt c an. Die weitere Arbeit besteht nun darin, zu prüfen, ob c richtig angenommen ist und, wenn dieses nicht der Fall, den richtigen Punkt c durch das Prüfungsverfahren selbst zu finden.

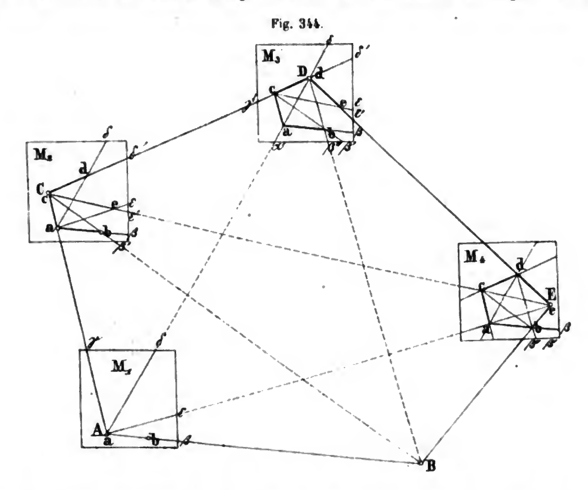
Fig. 343.



Zu dem Ende macht man c centrisch zu C und orientirt das Blatt M_2 nach CA, indem man die Kippregel an ac legt und die Wendeplatte des Tisches so lange dreht, bis das Fadenkreuz der Kippregel das Signal A deckt. Findet diese Deckung statt und ist der Tisch horizontal, so lege man die Linealkante genau an den Punkt b' der Linie a'b', welche die ab in der Stellung M_2 des Messtisches repräsentirt, an, visire nach B und ziehe die Linie b'c'. Wäre M_2 die richtige Stellung des Tisches und folglich a'c die richtige verjüngte Länge von AC, so müsste der Punkt c' mit c zusammenfallen, da in den Dreiecken c'a'b' und CAB zwei Seiten proportionirt und die eingeschlossenen Winkel c'a'b' und CAB gleich wären. Fällt nun c' nicht auf c, so ist die angenommene Linie a'c um cc' entweder zu lang oder zu kurz, nach unserer Figur zu lang. Darum verschiebe man jetzt das Blatt in der Richtung von a' nach c', bis dieser neue Punkt lothrecht über C liegt, und orientire das Blatt wieder nach AC, wodurch es die Lage M_3 annimmt. Legt man nun die Linealkante an b und stellt das Fadenkreuz der Kippregel auf B ein, so wird die an dem Lineale gezogene Linie bc mit dem Punkte c', der jetzt in c steht, zusammenfallen und das Dreieck abc vollständig bestimmt seyn; denn es ist nunmehr der Winkel bei a = dem Winkel A und der Winkel bei C = dem Winkel C. Dass das Dreieck abc in dem Massstabe gezeichnet ist, nach welchem die Seite AB aufgetragen wurde, folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke abc und ABC von selbst.

So wie der Punkt C rückwärts von AB abgeschnitten wurde, lässt sich jeder andere beliebige Punkt D, E (Fig. 344) abschneiden; folglich kann man auch durch dieses Verfahren ein Bilddreieck cde herstellen, welches einem gegebenen Naturdreiecke CDE ähnlich ist, ohne dass man eine Seite des letzteren zu kennen braucht, wenn man nur irgend eine Gerade AB hat, deren horizontale Länge bekannt ist und welche so liegt, dass sie

Fig. 344.



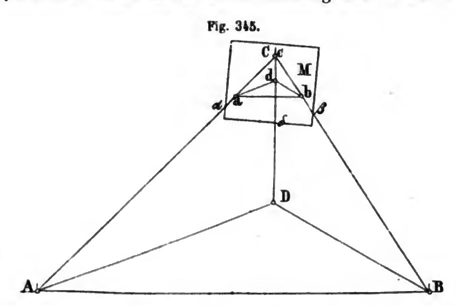
von den drei Punkten C, D, E aus anvisirt werden kann, wie in Fig. 344 angenommen wurde. Es versteht sich hiebei von selbst, dass es nicht nöthig ist, dass man von C nach D, oder von D nach E, oder endlich von C nach E sehen könne; gestattet jedoch das Terrain in einer oder der anderen dieser Richtungen das Visiren, so wird man diese sich von selbst darbietende Controle der Messung nicht von der Hand weisen. Wie die einzelnen Linien der Fig. 344 in den vier Lagen M_1, M_2, M_3, M_4 des Messtisches nach und nach entstanden sind und sich das Vieleck abcde, welches dem natürlichen Polygon ABCDE ähnlich ist, ergeben hat, bedarf nach den vorausgehenden Erörterungen wohl keiner besonderen Erklärung mehr.

§. 275. Aufgabe. Ein in der Natur gegebenes Dreieck mit dem Messtische durch Seitwärtsabschneiden aufzunehmen.

Das aufzunehmende Dreieck heisse ABC und sein Bild abc (Fig. 345). Man messe auf dem Felde die Horizontalprojectionen zweier Seiten (AC, BC), stelle im Scheitel des von ihnen gebildeten Winkels (C) den Messtisch

horizontal, projicire diesen Winkelscheitel auf die Tischplatte, lege die Linealkante der Kippregel an die Projection (c), visire die Signale (A, B) der beiden übrigen Dreieckspunkte an und ziehe die Linien ($c\alpha$, $c\beta$), welche zu diesen Visirlinien gehören. Trägt man nun auf beiden die verjüngten Seitenprojectionen (ca, cb) ab und verbindet die Endpunkte (a, b), so ist das hierdurch entstehende Dreieck abc dem Dreiecke ABC ähnlich, da beide proportionirte Seiten und zwischen diesen gleiche Winkel haben.

Fig. 345.



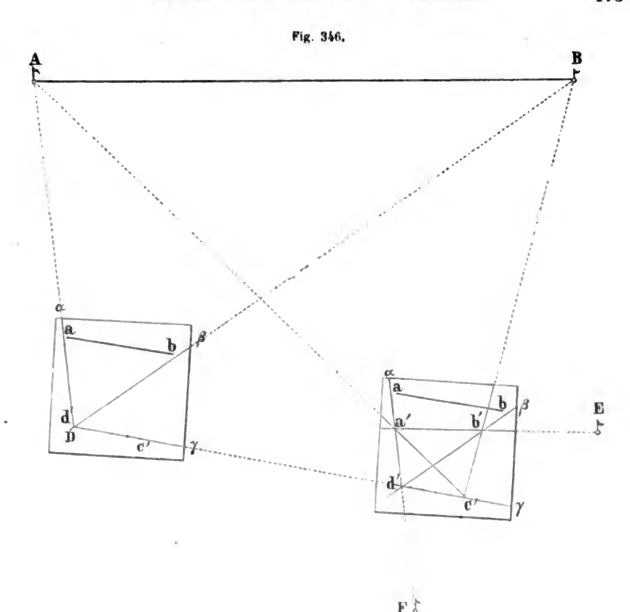
Wäre noch ein vierter Punkt D auf dem Felde gegeben gewesen, so hätte man denselben von C aus ebenso wie A oder B aufnehmen und durch den Punkt d auf dem Messtische darstellen können. Demnach erhielte man das Bilddreieck abd von einem Punkte C ausserhalb des Naturdreiecks ABD bloss durch wiederholte Anwendung der Methode des Seitwärtsabschneidens. Denn indem man von c nach D visirt, die Linie cd zieht und auf derselben die Verjüngung von CD = cd abträgt, hat man eigentlich die drei Dreiecke ABC, ACD, BCD direct durch Abmessung zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels, ADB aber indirect aus den drei durch Construction sich ergebenden Stücken ad, db, W. adb aufgenommen.

Es ist hiernach leicht einzusehen, wie sich durch Seitwärtsabschneiden ein Vieleck aufnehmen lässt, ohne dass man den Messtisch in einem der Eckpunkte aufstellt. Damit soll aber keineswegs behauptet werden, dass diese Methode practisch und der in §. 288 auseinandergesetzten vorzuziehen sey. Bei besondern Localverhältnissen kann indessen auch ein vortheilhafter Gebrauch von ihr gemacht werden, wenigstens in Beziehung auf einzelne Polygonpunkte.

§. 276. Aufgabe. Man soll den Messtisch, auf welchem das Bild einer unzugänglichen Geraden gegeben ist, in einem annähernd gegebenen Punkte orientiren.

Sind A und B die unzugänglichen Punkte des Feldes und ab das Bild ihres Abstandes von einander, sowie C der auf dem Felde annähernd gegebene und c der auf dem Messtische gesuchte Punkt, so handelt es sich

Fig. 346.



hier sowohl um die Bestimmung des Dreiecks ABC durch das ähnliche Dreieck abc, als auch darum, den Messtisch über C so aufzustellen, dass die Seiten des Dreiecks abc den gleichnamigen des Dreiecks ABC parallel werden.

Stellt man nun zunächst in einem beliebigen Punkte D des Feldes den Messtisch so auf, dass ab dem Augenmasse nach zu AB parallel ist; visirt man ferner von dem auf den Tisch projicirten Bildpunkt d′ die Punkte A, B, C an und zieht die Visirlinien d′α, d′β, d′γ; versetzt man hierauf den Messtisch nach C und zwar so, dass das nach dem Augenmasse angenommene Bild c′d′ von CD in die Vertikalebene CD fällt, während c′ lothrecht über C liegt; und schneidet man endlich die Punkte A und B von c′ aus ein: so entsteht das Viereck a′b′c′d′, welches dem Viereck ABCD ähnlich und parallel ist. Die Lage, welche der Messtisch jetzt hat, muss nun dazu benützt werden: erstens ab parallel zu AB zu machen, und zweitens über ab ein den Vierecken ABCD und a′b′c′d′ ähnliches zu beschreiben.

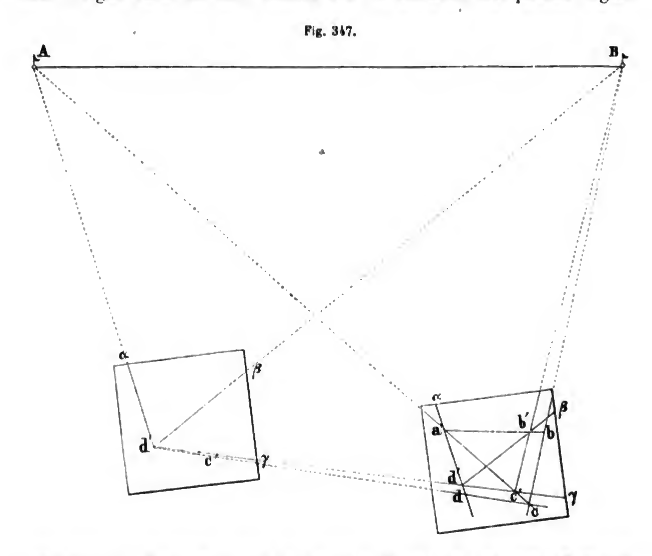
Zu dem Ende lege man die Kippregel an a′b′ so genau als möglich

und stelle in grosser Entfernung einen Stab oder ein Signal E in die Visirlinie; ebenso verfahre man mit der Richtung a'd', indem man das Signal F bestimmt, und schliesslich senkele man den Punkt a' auf das Feld und bezeichne seine Projection mit einem Pfahle G. Ist dieses bei unveränderter Lage des Messtisches geschehen, so verändere man jetzt diese Lage so, dass der Punkt a über G und die Linie ab in die Richtung GE kommt; alsdann schneide man c durch die Visirlinien aA, bB und d durch cD, aF ab, senkele c auf das Feld und bestimme hierdurch die definitive Lage von C. Hiemit ist die Aufgabe gelöst.

§. 277. Aufgabe. Die Entfernung zweier unzugänglicher Punkte A,B des Feldes ist bekannt und zwei andere Punkte C,D sind gegeben; man soll die Lage dieser Punkte gegen A und B bestimmen.

Durch Aufstellen des Messtisches über D und C bilde man wie im dem vorigen Falle ein dem Viereck ABCD ähnliches und parallel liegen-

Fig. 347.



des a'b'c'd'. Nun trage man auf a'b' von a' aus das verjüngte Mass von AB = a'b ab und bestimme den Punkt c durch Rückwärtseinschneiden auf A und B. Senkelt man c auf das Feld, so ergibt sich die definitive Lage des Punktes C und der Tisch ist über diesem Punkte orientirt. Um

noch die richtige Lage des Bildes von D zu finden, darf man nur von c nach D visiren und den Schnitt d mit der verlängerten a'd' bestimmen, welcher das gesuchte Bild ist. Man hat somit durch ein einfaches Verfahren die Lage zweier unbekannter Punkte gegen zwei andere gefunden, von denen man bloss ihren horizontalen Abstand kennt; ein Ergebniss, das vielfältig benützt werden kann.

4. Aufnahme der Dreiecke mit dem Theodolithen.

§. 278. Handelt es sich bei der Bestimmung der Winkel eines ebenen Dreiecks nicht um den grösstmöglichen Grad der Genauigkeit, so genügt es, zwei Winkel dieses Dreiecks unmittelbar zu messen und den dritten zu berechnen. Es werden dann allerdings die drei Winkel nicht gleich genau seyn, indem der berechnete Winkel die algebraische Summe der Beobachtungsfehler, welche in den gemessenen Winkeln stecken, enthält; aber da diese Fehler als äusserst klein vorausgesetzt werden, so wird auch ihre Summe nicht bedeutend seyn.

Wenn dagegen das ebene Dreieck, dessen Winkel zu bestimmen sind, einen Bestandtheil eines trigonometrischen Netzes bildet, das einer grösseren Flurvermessung zu Grunde liegt; wenn also von diesem Dreiecke wieder andere Dreiecke, die an seinen Seiten liegen, unmittelbar, und jene Dreiecke, die sich an diese anschliessen, mittelbar abhängen; so unterlässt man es nicht, alle drei Winkel des Dreiecks direct oder nöthigenfalls durch Centrirung zu messen. Indem man alsdann die beobachtete Winkelsumme mit der theoretischen von 180^0 vergleicht, erhält man nicht nur einen Begriff von der Genauigkeit der Messung, sondern kann auch durch Vertheilung der Differenz beider Summen auf die drei Winkel den Fehler in jedem einzelnen Winkel im Allgemeinen kleiner machen, als er in dem Falle ist, wo man bloss zwei Winkel misst und den dritten berechnet.

Die unmittelbare Messung aller Winkel eines Dreiecks, welche so eben für ein ebenes Dreiecknetz gefordert wurde, ist noch strenger zu fordern, wenn die Dreiecksseiten so lang sind, dass man sie als grösste Kreisbögen, und das Dreieck, welches sie einschliessen, als sphärisch betrachten muss. In diesem Falle ist aber die Summe aller Winkel des Dreiecks grösser als 180^0, und es heisst der Ueberschuss dieser Summe der sphärische Excess. Bezeichnet man diese von der Form des Dreiecks abhängende Grösse mit ε, so soll die beobachtete Winkelsumme $= 180^0 + \varepsilon$ seyn; da sie es aber nie oder nur zufällig seyn wird, so besteht auch hier wieder eine Differenz zwischen der theoretischen und der beobachteten Winkelsumme und diese Differenz ist es, welche uns ein Urtheil über die Genauigkeit der Winkelmessungen und Gelegenheit zu einer entsprechenden Verbesserung derselben gibt. Heisst nämlich die theoretische Winkelsumme $180^0 + \varepsilon$ und die beobachtete $180^0 + \varepsilon'$, so ist $\varepsilon - \varepsilon'$ die Summe aller Beobachtungsfehler, welche zur Vertheilung kommt.

In welcher Weise diese Vertheilung sowohl bei sphärischen als ebenen Dreiecken zu geschehen habe, hängt davon ab, ob alle drei Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen sind oder nicht. Sind alle Winkel gleich genau, so wird die Differenz $\varepsilon - \varepsilon'$ gleichheitlich vertheilt; ist aber die Genauigkeit verschieden, so vertheilt man die Grösse $\varepsilon - \varepsilon'$ mit Rücksicht auf diese Genauigkeit nach der Methode der kleinsten Quadrate, wovon im §. 280 so weit die Rede ist, als es die Anwendung derselben auf den vorliegenden Fall erfordert.

§. 279. **Aufgabe. Man soll den sphärischen Excess eines geodätischen Dreiecks bestimmen.**

Obwohl die Seiten eines Dreiecks, das einem trigonometrischen Netze für eine Landes- oder Gradmessung angehört, in Wirklichkeit keine grössten Kreise einer Kugel, sondern richtiger Vertikalschnitte des Erdsphäroids und, ganz streng genommen, geodätische Linien sind: so pflegt man doch den sphärischen Excess eines solchen Dreieckes so zu berechnen, als ob es ein Kugeldreieck wäre, und man ist dazu berechtigt, weil der hieraus entspringende Fehler ganz unmerklich wird, indem selbst die grössten geodätischen Dreiecke nur einen ausserordentlich kleinen Theil der Erdoberfläche umschliessen.

Wir werden zunächst den sphärischen Excess aus den drei Seiten eines beliebigen Dreiecks (das also kein geodätisches zu seyn braucht) bestimmen und hierauf zeigen, wie man daraus den Excess der Erddreiecke findet, wenn entweder auch drei Seiten, oder zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder eine Seite und zwei ihr anliegende Winkel bekannt sind.

Bezeichnen a, b, c die gegebenen Seiten und A, B, C die ihnen gegenüberliegenden Winkel des sphärischen Dreiecks ABC, dessen Excess

$$\varepsilon = A + B + C - 180^0$$

gesucht wird, so kann man nach Gent (Grunerts Archiv Bd. 20, S. 358) aus den Gauss'schen Formeln:

$$\cos {}^1/_2 (A + B) \cos {}^1/_2 c = \cos {}^1/_2 (a + b) \sin {}^1/_2 C,$$
$$\sin {}^1/_2 (A + B) \cos {}^1/_2 c = \cos {}^1/_2 (a - b) \cos {}^1/_2 C$$

zunächst die folgenden Gleichungen bilden:

$$\frac{\cos {}^1/_2 (A + B) \mp \cos (90^0 - {}^1/_2 C)}{\sin {}^1/_2 C} = \frac{\cos {}^1/_2 (a + b) \mp \cos {}^1/_2 c}{\cos {}^1/_2 c},$$
$$\frac{\sin {}^1/_2 (A + B) \mp \sin (90^0 - {}^1/_2 C)}{\cos {}^1/_2 C} = \frac{\cos {}^1/_2 (a - b) \mp \cos {}^1/_2 c}{\cos {}^1/_2 c}$$

und hieraus durch einfache Zerlegungen der Zähler die nachstehenden Relationen ableiten, in denen

$$a + b + c = 2s \text{ und } A + B - C + 180^0 = \omega$$

gesetzt ist und ε den gesuchten sphärischen Excess bedeutet:

$$\sin {}^1/_4 \varepsilon \sin {}^1/_4 \omega \cos {}^1/_2 c = \sin {}^1/_2 s \sin {}^1/_2 (s - c) \sin {}^1/_2 C,$$
$$\cos {}^1/_4 \varepsilon \cos {}^1/_4 \omega \cos {}^1/_2 c = \cos {}^1/_2 s \cos {}^1/_2 (s - c) \sin {}^1/_2 C,$$
$$\sin {}^1/_4 \varepsilon \cos {}^1/_4 \omega \cos {}^1/_2 c = \sin {}^1/_2 (s - a) \sin {}^1/_2 (s - b) \cos {}^1/_2 C,$$
$$\cos {}^1/_4 \varepsilon \sin {}^1/_4 \omega \cos {}^1/_2 c = \cos {}^1/_2 (s - a) \cos {}^1/_2 (s - b) \cos {}^1/_2 C.$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch die zweite und die dritte durch die vierte, so folgt:

$$\operatorname{tg} {}^1/_4\, \varepsilon \operatorname{tg} {}^1/_4\, \omega = \operatorname{tg} {}^1/_2\, s \operatorname{tg} {}^1/_2\, (s - c),$$
$$\operatorname{tg} {}^1/_4\, \varepsilon \cot {}^1/_4\, \omega = \operatorname{tg} {}^1/_2\, (s - a) \operatorname{tg} {}^1/_2\, (s - b),$$

und wenn man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man zur Berechnung des sphärischen Excesses irgend eines Kugeldreiecks den zuerst von Lhuilier aufgefundenen Ausdruck:

$$\operatorname{tg}^2 {}^1/_4\, \varepsilon = \operatorname{tg} {}^1/_2\, s \operatorname{tg} {}^1/_2\, (s - a) \operatorname{tg} {}^1/_2\, (s - b) \operatorname{tg} {}^1/_2\, (s - c). \quad . \quad (269)$$

Um von der Grösse des sphärischen Excesses der geodätischen Dreiecke eine bestimmte Anschauung zu geben, denken wir uns ein gleichseitiges Kugeldreieck und berechnen daraus Excesse für verschiedene Werthe der Seiten nach der Gleichung

$$\operatorname{tg}^2 {}^1/_4\, \varepsilon = \operatorname{tg} {}^3/_4\, a \operatorname{tg}^3 {}^1/_4\, a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (270)$$

welche aus der vorhergehenden folgt, wenn man $a = b = c$ setzt. Nimmt man

$a = 15$ geogr. Meilen $= 1^0 0'$ an, so wird $\varepsilon = 27{,}2$ Sekunden;
$a = 10$ „ „ $= 0^0 40'$ „ „ „ $\varepsilon = 12{,}1$ „
$a = 5$ „ „ $= 0^0 20'$ „ „ „ $\varepsilon = 3{,}0$ „
$a = 1$ „ „ $= 0^0 4'$ „ „ „ $\varepsilon = 0{,}12$ „

Hieraus erhellt vorläufig zur Genüge, dass man bei Erddreiecken, deren Seiten weniger als eine Meile oder auch nur weniger als 30000 Fuss betragen, gar keine Rücksicht auf den sphärischen Excess zu nehmen braucht, und dieselben folglich als ebene Dreiecke behandeln kann.

Da die Seiten a, b, c der geodätischen Dreiecke stets nur einen sehr kleinen Theil eines grössten Kreises der Erdkugel ausmachen, und meistentheils die halbe Summe aller drei Seiten kleiner als ein Erdgrad, d. h. kleiner als 15 Meilen ist, so darf, wenn man unter r den Halbmesser der Erdkugel und unter a, b, c, s die wirklichen Längen der Seiten versteht, in dem Ausdrucke (269)

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\, s = \frac{s}{2r};\ \operatorname{tg} {}^1/_2\, (s - a) = \frac{s - a}{2r};\ \operatorname{tg} {}^1/_2\, (s - b) = \frac{s - b}{2r}$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\, (s - c) = \frac{s - c}{2r};\ \operatorname{tg} {}^1/_4\, \varepsilon = {}^1/_4\, \varepsilon \operatorname{tg} 1''$$

gesetzt und jener Ausdruck dadurch in den folgenden verwandelt werden:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}}{r^2 \operatorname{tg} 1''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (271)$$

Nun ist aber aus der ebenen Trigonometrie bekannt, dass die Fläche f eines ebenen Dreiecks, welches die Seiten a, b, c hat, der Quadratwurzel aus $s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)$ gleich ist; führt man daher in die letzte Gleichung f ein, so wird für ein Dreieck, dessen Seiten im Verhältniss zur Kugel, auf der es liegt, klein sind, also für ein geodätisches Dreieck, der sphärische Excess:

$$\varepsilon = \frac{f}{r^2 \operatorname{tg} 1''} \text{ Sekunden.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (272)$$

Während der vorletzte Ausdruck dazu dient, den Excess aus den drei

Seiten des Dreiecks zu berechnen, kann man nunmehr auch leicht drei andere Stücke des Dreiecks, aus denen sich f berechnen lässt, zur Bestimmung von ε benützen.

Sind nämlich zwei Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel C' eines ebenen Dreiecks ABC bekannt, so ist

$$f = \tfrac{1}{2} ab \sin C';$$

in dem vorliegenden Falle ist aber nicht C', sondern der Winkel C bekannt, welcher um $\tfrac{1}{3}\varepsilon$ grösser ist als C'. Bedenkt man jedoch, dass selbst bei Dreiecken, deren Seiten 5 Meilen lang sind, $\tfrac{1}{3}\varepsilon$ nur ungefähr 1 Sekunde beträgt und dass folglich bei gleichseitigen Dreiecken die Fläche f, wenn man C statt C' setzt, nur in dem Verhältnisse von $\sin 60^0\,0'\,1''$ zu $\sin 60^0$ zu gross wird, und dass sich mithin auch ε nur um $\tfrac{1}{300000}$ seines eigenen Werthes zu gross darstellt: so kann man nicht mehr zweifeln, dass unbeschadet der Genauigkeit, welche sich durch die feinsten Mittel noch erreichen lässt,

$$f = \tfrac{1}{2} ab \sin C$$

gesetzt werden darf.[1] Nimmt man aber f so, wie hier steht, so wird

$$\varepsilon = \frac{ab \sin C}{2r^2 \operatorname{tg} 1''} \text{ Sekunden.} \qquad (273)$$

Kennt man in einem sphärischen Dreiecke ABC eine Seite c und die beiden anliegenden Winkel A und B, so ist aus dem vorhin angegebenen Grunde der Flächeninhalt des durch die drei Punkte A, B, C gelegten ebenen Dreiecks genau genug durch

$$f = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin (A + B)}$$

ausgedrückt, und es lässt sich folglich der sphärische Excess, wenn c, A, B gegeben sind, aus der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2r^2 \sin (A + B) \operatorname{tg} 1''} \qquad (274)$$

berechnen. (Eine andere Ableitung der Ausdrücke Nr. 271 und 272 aus der Lhuilier'schen Gleichung (Nr. 269) enthält Crelle's Journal d. Math. Bd. 50, S. 39.)

§. 280. Aufgabe. Die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks sind mit ungleicher Genauigkeit gemessen worden, man soll die unvermeidlichen Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgleichen.

Wir nehmen an, der Winkel A des Dreiecks ABC sey durch mfache, der Winkel B durch nfache und der Winkel C durch pfache Wiederholung gemessen worden; die Ergebnisse dieser Messungen seyen α, β, γ und es betrage die Summe dieser drei beobachteten Winkel $180^0 + \varepsilon'$; der sphärische Excess sey nach der Formel (274), welche eine Seite des

[1] Was wir hier an einem besondern Falle gezeigt haben, lässt sich auch allgemein beweisen; wir halten aber diesen Beweis hier um so weniger für nöthig, als er zugleich mit dem Legendreschen Satze gegeben wird (§. 316.)

Dreiecks als bekannt voraussetzt, gleich ε berechnet, und man habe folglich die Summe $\varepsilon - \varepsilon'$ der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auszugleichen.

Sind A, B, C die gesuchten Winkelwerthe, d. h. diejenigen berechneten Werthe, welche allen Beobachtungen am besten entsprechen und von den absolut richtigen am wenigsten abweichen: so sind die Fehler zwischen den beobachteten und berechneten Winkelwerthen folgende:

$$v_1 = A - \alpha;\ v_2 = B - \beta;\ v_3 = C - \gamma.$$

Da aber die Summe der drei Winkel

$$A + B + C = 180^0 + \varepsilon$$

seyn muss, so wird man

$$v_3 = C - \gamma = 180^0 + \varepsilon - \gamma - A - B$$

setzen und nun A und B so bestimmen, dass die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate:

$$m\,(A - \alpha)^2 + n\,(B - \beta)^2 + p\,(\varphi - A - B)^2, \quad . \quad . \quad (275)$$

in welcher der constante Ausdruck

$$180^0 + \varepsilon - \gamma = \varphi$$

gesetzt ist, ihren kleinsten Werth erlangt.

Die Werthe von A und B, welche diese Function zu einem Minimum machen können, ergeben sich nach den Regeln der Differentialrechnung aus den beiden Gleichungen:

$$m\,(A - \alpha) - p\,(\varphi - A - B) = 0,$$
$$n\,(B - \beta) - p\,(\varphi - A - B) = 0.$$

Löst man dieselben nach A und B auf, berücksichtigt, dass

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 + \varepsilon' \text{ und } 180^0 + \varepsilon - A - B = C$$

ist, und setzt der Kürze wegen

$$mn + mp + np = z,$$

so findet man schliesslich die ausgeglichenen Winkel:

$$\left.\begin{aligned} A &= \alpha + \frac{np}{z}(\varepsilon - \varepsilon'), \\ B &= \beta + \frac{mp}{z}(\varepsilon - \varepsilon'), \\ C &= \gamma + \frac{mn}{z}(\varepsilon - \varepsilon'); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (276)$$

denn man überzeugt sich durch die zweiten Ableitungen der Function (275) leicht davon, dass sie durch diese Werthe von A und B zu einem Minimum gemacht wird. Addirt man die letzten drei Gleichungen, so kommt, wie es seyn muss,

$$A + B + C = \alpha + \beta + \gamma + \varepsilon - \varepsilon' = 180^0 + \varepsilon.$$

Wäre das Dreieck, in welchem die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = 180^0 + \varepsilon'$ gemessen wurde, ein ebenes Dreieck, so würde man bei der Ausgleichung wie vorhin verfahren, aber selbstverständlich den Excess $\varepsilon = 0$ nehmen.

Die ausgeglichenen Winkel würden alsdann folgende Werthe haben:

$$\left.\begin{aligned} A &= \alpha - \frac{np}{z}\,\varepsilon', \\ B &= \beta - \frac{mp}{z}\,\varepsilon', \\ C &= \gamma - \frac{mn}{z}\,\varepsilon'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (277)$$

Es versteht sich von selbst, dass, wenn durch die Messung $\alpha + \beta + \gamma = 180^0 - \varepsilon'$ gefunden worden wäre, die Verbesserungen an den sphärischen Winkeln α, β, γ beziehlich

$$\frac{np}{z}(\varepsilon + \varepsilon'),\ \frac{mp}{z}(\varepsilon + \varepsilon'),\ \frac{mn}{z}(\varepsilon + \varepsilon')$$

und an den Winkeln des ebenen Dreiecks

$$+\frac{np}{z}\,\varepsilon',\ +\frac{mp}{z}\,\varepsilon',\ +\frac{mn}{z}\,\varepsilon'$$

betragen müssten.

Sind die Genauigkeiten oder die Gewichte aller Winkelbeobachtungen einander gleich, d. h. ist

$$m = n = p,$$

so beträgt, wie man sich leicht überzeugt, die Verbesserung jedes sphärischen Winkels $\frac{1}{3}(\varepsilon \mp \varepsilon')$ und jedes ebenen Winkels $\mp \frac{1}{3}\,\varepsilon'$, d. h. die Summe der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wird auf die drei Winkel gleichheitlich vertheilt. Es ist folglich diese Vertheilungsart auch in der Methode der kleinsten Quadrate begründet.

Beispiel. In einem Dreiecke ABC, dessen Seite AB = c = 24187,5 Toisen ist, wurde unter übrigens gleichen Umständen der Winkel bei

A	nach 10 maliger Wiederholung	$= 71^0\,48'\,34'',3 = \alpha$
B	„ 20 „ „	$= 48^0\,27'\,12'',8 = \beta$
C	„ 12 „ „	$= 59^0\,44'\,22'',5 = \gamma$

gemessen. Man soll diese Winkel nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgleichen.

Zuerst ist der sphärische Excess ε nach der Formel

$$\varepsilon = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2r^2 \sin (A + B) \operatorname{tg} 1''} \text{ Sek.}$$

zu berechnen. In diesem Ausdrucke ist bekannt:

$$c = 24187^t,5;\ r = 3266608^t;\ \frac{1}{\operatorname{tg} 1''} = 206265''.$$

Die Winkel A und B könnte man zwar nehmen, wie sie gemessen wurden: da jedoch $\alpha + \beta + \gamma = 180^0\,0'\,9'',6$ gegeben ist, so sind die Werthe von A und B, welche um den dritten Theil von $\varepsilon' = 9'',6$ d. i. um $3'',2$ verkleinert sind, zur Berechnung des sphärischen Excesses am geeignetsten, nämlich:

$$A' = 71^0\,48'\,31'',1;\ B' = 48^0\,27'\,9'',6.$$

Setzt man alle diese Werthe in den Ausdruck für ε ein und vollzieht die Ausrechnung, so findet man den Excess

$$\varepsilon = 4,65 \text{ Sekunden.}$$

Nun kann man nach den Gleichungen (276) die Werthe von A, B, C bestimmen; da aber hier $\varepsilon' > \varepsilon$, so schreibt man die dort erhaltenen Ausdrücke besser so:

$$A = \alpha - \frac{np}{z}(\varepsilon' - \varepsilon),$$

$$B = \beta - \frac{mp}{z}(\varepsilon' - \varepsilon),$$

$$C = \gamma - \frac{mn}{z}(\varepsilon' - \varepsilon).$$

Nach den gegebenen Werthen ist

$$np = 240;\ mp = 120;\ mn = 200;$$
$$z = np + mp + mn = 560;$$

folglich sind die Verbesserungen von α, β, γ oder

$$v_1 = -2'',12;\ v_2 = -1'',06;\ v_3 = -1'',77;$$

und somit die verbesserten Winkel:

$$A = 71^0\,48'\,32'',18;$$
$$B = 48^0\,27'\,11'',74;$$
$$C = 59^0\,44'\,20'',73.$$

Die Summe dieser drei Winkel beträgt $180^0\,0'\,4'',65$, wie es seyn muss.

5. Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf Dreiecksberechnungen.

§. 281. Ein Dreieck ist durch drei Stücke bestimmt, wenn sich darunter eine Seite befindet. Sind diese Stücke mit mathematischer Genauigkeit gegeben, so werden auch die übrigen Stücke mit dieser Genauigkeit gefunden; enthalten aber die gegebenen Stücke kleine Fehler, so müssen nothwendig auch die aus ihnen berechneten Stücke des Dreiecks mehr oder minder fehlerhaft werden. Es ist nun für den practischen Geometer wichtig, zu wissen: innerhalb welcher Grenzen die berechneten Stücke eines Dreiecks falsch sind, wenn die Fehlergrenzen der Messungsresultate bekannt sind, und für welche Form der Dreiecke der Einfluss der Beobachtungsfehler möglichst klein wird.

Bei der nachfolgenden Untersuchung dieser Fragen wird vorausgesetzt, dass die Messungsfehler nicht von einem schlechten Zustande der Instrumente oder von der Ungeschicklichkeit oder Nachlässigkeit des Geometers herrühren, sondern dass sie zu den unvermeidlichen Fehlern gehören, also möglichst klein sind (s. §. 265). Werden nun zwei so kleine Grössen mit einander multiplicirt, so kann ihr Product gegen jedes andere Product, das aus einer gemessenen Grösse und deren Zuwachs oder Abnahme hervorgeht, vernachlässigt werden, so wie die zweite Potenz der Fehlergrösse verschwindend klein ist gegen ihre erste Potenz.

Unter dieser Voraussetzung, und da es sich bei Betrachtung der Folgen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler doch nur um annähernde Resultate handelt, ist es gestattet, die Aenderung, welche eine Function von gemessenen und desshalb fehlerhaften Grössen erleidet, wenn letztere um ihre

Fehler verbessert werden, dadurch zu finden, dass man jene Function nach den einer geringen Veränderlichkeit fähigen Grössen differentiirt.

Sind z. B. die Grundlinie x und die Höhe y eines Parallelogramms beziehlich um Δx und Δy zu klein gemessen worden, also ihre wahren Längen $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$, so ist der wahre Flächeninhalt des Parallelogramms

$$(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\, \Delta y,$$

während der aus den Messungsresultaten hervorgehende xy ist. Die Aenderung nun, welche der Ausdruck xy erleidet, indem man $x + \Delta x$ für x und $y + \Delta y$ für y setzt, ist mit Rücksicht auf die Bemerkung über die Grösse des Products $\Delta x\, \Delta y$:

$$\Delta (xy) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x.$$

Vergleicht man aber dieses Ergebniss mit dem, welches aus der Differentiirung des Products xy hervorgeht, so unterscheidet es sich von letzterem nur dadurch, dass hier Δ steht, wo dort d; und dieser Unterschied rührt lediglich davon her, dass die Fehler Δx, Δy keine unendlich kleinen Grössen sind und zu seyn brauchen, obwohl sie immerhin als sehr klein zu denken sind. Wir werden übrigens in den nachfolgenden Entwickelungen dx, dy statt Δx, Δy schreiben und uns also darunter sehr kleine Werthe vorstellen.

Die Fehler dx und dy können ebensowohl positiv als negativ seyn und es kann $+ dx$ mit $+ dy$, $+ dx$ mit $- dy$, $- dx$ mit $+ dy$ und $- dx$ mit $- dy$ zusammentreffen.

Bewegt sich also der wahre Werth einer Linie x zwischen $x + dx$ und $x - dx$, jener der Linie y aber zwischen $y + dy$ und $y - dy$, so kann der wahre Werth des Verhältnisses beider von dem Verhältnisse $x : y$ ebensowohl um die Grösse

$$\pm \frac{y\,dx + x\,dy}{y^2}$$

als um die Grösse

$$\pm \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

verschieden seyn. Die äussersten Grenzen des Verhältnisswerthes sind demnach

$$\frac{x}{y} + \frac{y\,dx + x\,dy}{y^2} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} - \frac{y\,dx + x\,dy}{y^2}.$$

Stellen dx und dy Fehler vor, welche bei Winkelmessungen unvermeidlich waren, so sind dieselben, wenn sie mit den Winkeln, denen sie angehören, unmittelbar verglichen werden, auch in derselben Masseinheit, worin diese gegeben sind, auszudrücken, so dass, wenn in einem Winkel x von 37° 40′ 20″ ein Fehler dx von 5″ vorkäme, der absolute Werth von $dx = 5''$ wäre, während der von $x = 135620''$ ist. Der relative Fehler würde demnach seyn:

$$\frac{dx}{x} = \frac{5}{135620} = \frac{1}{27124}.$$

Ist aber ein Winkel nicht unmittelbar, sondern durch irgend eine trigonometrische Function d. h. durch das Verhältniss zweier Linien gegeben, so muss auch sein Fehler durch ein solches Verhältniss ausgedrückt werden. Das passendste Verhältniss gibt in diesem Falle, da der Fehler immer nur klein seyn darf, der Kreisbogen, welcher den Winkelfehler misst, zu dem Halbmesser 1 des Kreises. Hienach ist ein Fehler von 1 Sekunde gleich

$$\frac{2\pi}{360 \,.\, 60 \,.\, 60} = \frac{1}{206265}, \quad \ldots \ldots \quad (278)$$

und der Fehler von einer Minute gleich

$$\frac{2\pi}{360 \,.\, 60} = \frac{60}{206265} = \frac{1}{3438}. \quad \ldots \ldots \quad (279)$$

Hätte man den Ausdruck sin x . dx zu berechnen, in welchem $x = 37^0\, 40'\, 20''$ ist und dx einem absoluten Fehler von 5″ entspricht, so würde man erst

$$\log \sin x = \log (\sin 37^0\, 40'\, 20'') = 0{,}78614 - 1$$

und hierauf

$$\log \left(\frac{5}{206265}\right) = \log \left(\frac{1}{41253}\right) = 0{,}38455 - 5$$

berechnen, darnach

$$\log (\sin x \,.\, dx) = 0{,}17069 - 5$$

und hieraus endlich

$$\sin x \,.\, dx = 0{,}0000148 \quad \ldots \ldots \quad (280)$$

bestimmen.

Nach dieser Vorbereitung wird das Nachfolgende leicht zu verstehen und anzuwenden seyn.

§. 282. Aufgabe. Ein Dreieck ist durch Vorwärtsabschneiden aufgenommen worden; man soll bestimmen, welchen Einfluss die Beobachtungsfehler auf die berechneten Seiten haben, und bei welchen Formen des Dreiecks dieser Einfluss am kleinsten wird.

Das Dreieck heisse ABC, die gemessene Seite sey c und die beiden anliegenden ebenfalls gemessenen Winkel seyen A und B. Die Messungsfehler sollen $\pm$ dc, $\pm$ dA, $\pm$ dB seyn. Es fragt sich, innerhalb welcher Grenzen die berechneten Werthe der Seiten a und b unsicher sind.

Betrachten wir zuerst die Seite a und nehmen wir an, alle Beobachtungsfehler seyen positiv, also die Seite c um dc, der Winkel A um dA und der Winkel B um dB zu klein gemessen, so dass die richtigen Werthe beziehlich c + dc, A + dA und B + dB sind. Sucht man die Seite a aus den durch Beobachtung gefundenen Grössen c, A und B, so dient dazu die bekannte Gleichung:

$$a = \frac{c \sin A}{\sin (A + B)}. \quad \ldots \ldots \quad (281)$$

Würde man nun in diesem Ausdrucke c + dc für c, A + dA für A, und B + dB für B setzen, so fände man einen zweiten Werth von a und dessen

Unterschied von dem ersten gäbe den Fehler in der Seite a. Diesen Fehler erhält man aber unmittelbar, wenn man die vorstehende Gleichung in dem Sinne differentiirt, welcher im §. 281 angedeutet wurde.

Zur Vereinfachung dieses Geschäfts kann man die Gleichung (281) auch so schreiben:

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin (A + B),$$

und daraus durch Differentiiren erhalten:

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \frac{dA}{\operatorname{tg} A} - \frac{dA + dB}{\operatorname{tg} (A + B)} \quad \ldots \ldots \quad (282)$$

Der Ausdruck rechts liefert, wie man sieht, das Verhältniss des Fehlers in der Seite a zu dieser Seite selbst. Wären beide Winkel fehlerfrei gewesen, so würde

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c},$$

d. h. die berechnete Seite a in demselben Verhältnisse falsch seyn, als die gemessene Seite c. Wäre dagegen die Seite c ohne Fehler, so erhielte man

$$\frac{da}{a} = \frac{dA}{\operatorname{tg} A} - \frac{dA + dB}{\operatorname{tg} (A + B)},$$

oder, wenn man $A + B = 180^0 - C$ setzt und berücksichtigt, dass $\operatorname{tg} (180^0 - C) = - \operatorname{tg} C$ ist:

$$\frac{da}{a} = \frac{dA}{\operatorname{tg} A} + \frac{dA + dB}{\operatorname{tg} C} \quad \ldots \ldots \quad (283)$$

Hiernach wird der Werth des Fehlers da um so grösser, je kleiner tg C, d. h. je spitzer der Winkel C ist, und es wird bei unverändertem A der Fehler da um so kleiner, je mehr sich der Winkel C einem rechten nähert, oder darüber hinaus geht.

Aehnliche Fragen lassen sich viele stellen und leicht beantworten; es wird aber nicht nöthig seyn, länger dabei zu verweilen.

Sind die Fehler dc, dA, dB mit negativen oder verschiedenen Vorzeichen versehen, so darf man nur, um den Werth von da : a zu erhalten, in der rechten Seite der Gleichung (282) diese Vorzeichen einführen. Stellt man alle möglichen Werthe des Verhältnisses da : a her, so wird einer den grössten absoluten Werth haben, und da dieser Werth sowohl positiv als negativ seyn kann, so gibt derselbe den Spielraum an, innerhalb dessen sich der relative Fehler da : a bewegen kann.

Dass dieselben Betrachtungen, welche für die Seite a angestellt werden können, auch für b gelten, versteht sich von selbst. Es wird demnach auch

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \frac{dB}{\operatorname{tg} B} - \frac{dA + dB}{\operatorname{tg} (A + B)} \quad \ldots \ldots \quad (284)$$

seyn. Fragt man, unter welcher Bedingung

$$\frac{db}{b} = \frac{da}{a}$$

wird, so liefern die Gleichungen (282) und (284) sofort die Antwort: wenn $B = A$ ist.

Fragt man weiter, unter welcher Bedingung der Fehler in der berechneten Seite b am kleinsten wird, vorausgesetzt, dass dc null oder constant ist, so ist die Antwort darauf dieselbe, welche aus der Gleichung (283) für die Seite a hervorging.

Stellt man jetzt die Frage auf: wie muss ein durch Vorwärtsabschneiden aufzunehmendes Dreieck beschaffen seyn, wenn dasselbe den Messungsfehlern unter allen Verhältnissen den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Seiten gestatten soll? so kann man sich die Antwort: dass es gleichseitig oder doch nahezu gleichseitig seyn muss, leicht selber bilden. Denn nimmt man es aus der Seite c auf, so soll für a und b der Winkel C sich so viel als möglich 90^0 nähern, wird es aus a aufgenommen, so gilt dieselbe Forderung für den Winkel A, um die Fehler in b und c möglichst klein zu machen; und macht man endlich die Seite b zur Basis, so soll, um da und dc möglichst klein zu erhalten, der Winkel B sich so weit es angeht, 90^0 nähern. Da es aber nicht möglich ist, dass alle drei Winkel zugleich 90^0 nahe kommen, und da die Fehler da, db, dc um so grösser werden, je spitzer die Winkel C, B, A sind: so ist es offenbar das Vortheilhafteste, wenn $A = B = C = 60^0$ und mithin das Dreieck gleichseitig ist.

§. 283. Aufgabe. In einem durch Rückwärtsabschneiden aufgenommenen Dreiecke sind die gemessenen Stücke nicht fehlerfrei; es soll angegeben werden, um wie viel die daraus berechneten Seiten falsch sind, und welches die besste Form des Dreiecks für diese Art der Aufnahme ist.

Heisst das Dreieck ABC und sind die gemessenen Stücke: die Seite c, der Winkel A und der Winkel B: so findet man aus diesen Stücken die Seite a aus der Gleichung

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (285)$$

welche für die logarithmische Berechnung folgende Gestalt annimmt:

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C.$$

Ist die Seite c mit dem Fehler $\pm$ dc, der Winkel A mit dem Fehler $\pm$ dA und der Winkel C mit dem Fehler $\pm$ dC behaftet, berücksichtigt man aber vorläufig nur die positiven Werthe der Fehler, so erhält man durch Differentüren der letzten Gleichung den relativen Fehler der berechneten Seite a gleich

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \frac{dA}{tg\,A} - \frac{dC}{tg\,C}. \quad \ldots\ldots \quad (286)$$

Führt man in dem Ausdrucke rechts alle möglichen Verbindungen der Vorzeichen von dc, dA und dC ein, so wird man den grössten absoluten Werth von da : a finden und damit auch die grösste Abweichung des aus den gemessenen Stücken berechneten Werthes der Seite a von ihrem wahren Werthe. Da der Ausdruck

$$\frac{dA}{tg\,A} - \frac{dC}{tg\,C} = 0$$

ist, wenn die relativen Fehler der gemessenen Winkel einander gleich sind, so folgt, dass in diesem Falle die Seite a in demselben Masse falsch erhalten wird, als die Seite c fehlerhaft gemessen wurde. Wäre c fehlerfrei und hätte man in A und C Fehler begangen, welche sich ihrer absoluten Grösse nach wie die Tangenten von A und C verhielten, ihrer Lage nach aber beide positiv oder beide negativ wären: so würden sich die Wirkungen dieser Fehler gegenseitig vernichten und man fände die Seite a gerade so, wie sie fehlerfreie Stücke geliefert hätten.

Sind dc und dA positiv, so wird für $A < 90^0$ und $C > 90^0$

$$\frac{da}{a} = \pm \left(\frac{dc}{c} + \frac{dA}{\text{tg } A} + \frac{dC}{\text{tg } C}\right), \quad \ldots \ldots \quad (287)$$

je nachdem der Fehler dC negativ oder positiv ist. Dieser Fehler ist — insoferne er von dem Vorzeichen abhängt — der grösste, welcher in der Seite a vorkommen kann und es beträgt somit die Schwankung der Grenzen des Werthes von a:

$$2\left(\frac{dc}{c} + \frac{dA}{\text{tg } A} + \frac{dC}{\text{tg } C}\right).$$

Ist der Fehler $dA = dC$, so wird, wenn diese Fehler in gleichem Sinne begangen wurden, der Fehler in a, so weit er von den Winkeln abhängt, null, so bald diese Winkel einander gleich sind. Geht man nun nicht davon aus, dass gerade die Seite c zur Aufnahme des Dreiecks diene, sondern stellt man es frei, welche Seite man dazu wählen mag, so ist klar, dass, wenn der Aufnahme die Seite b zu Grunde gelegt und c gesucht wird, die Winkel B und C ebenfalls einander gleich seyn müssen, wenn die Grösse von c durch die Winkelmessung nicht berührt werden soll. Hat man aber die Bedingung $A = C$ und $B = C$, also $A = B = C$, so folgt von selbst, dass wiederum das gleichseitige oder ein diesem nahekommendes Dreieck dasjenige ist, welches den Messungsfehlern den geringsten Einfluss auf die zu berechnenden Stücke gestattet.

§. 284. Aufgabe. Zu bestimmen, wie gross die aus den Beobachtungsfehlern entspringenden Fehler in den berechneten Stücken eines durch Seitwärtsabschneiden aufgenommenen Dreiecks werden und welches für diese Art der Aufnahme die zweckmässigste Form des Dreiecks ist.

Die gemessenen Stücke des Dreiecks ABC seyen die Seiten a, b und der Winkel C. Zur Berechnung der Seite c dient die bekannte Gleichung:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C.$$

Differentiirt man diese Gleichung in dem früher angegebenen Sinne, so erhält man:

$$c\,dc = a\,da + b\,db - (a\,db + b\,da)\cos C + ab\sin C dC, \quad . \quad (288)$$

oder, wenn man die Gleichung mit c^2 dividirt und dafür den ursprünglichen, durch a, b, c gegebenen, Ausdruck setzt:

$$\frac{dc}{c} = \frac{(a - b\cos C)\,da + (b - a\cos C)\,db + ab\sin C dC}{a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C}. \quad (289)$$

In diesem Ausdrucke kommen nur die wirklich gemessenen Grössen a, b, C vor. Führt man aber auch die übrigen c, A, B ein und berücksichtigt, dass $a - b \cos C = c \cos B$ und $b - a \cos C = c \cos A$ ist, so erhält man aus (289) die Gleichung:

$$\frac{dc}{c} = \frac{a \cos B}{c} \frac{da}{a} + \frac{b \cos A}{c} \frac{db}{b} + \frac{b \sin A}{c} dC. \quad . \quad . \quad (290)$$

Sind die Seiten a und b mit gleicher relativer Genauigkeit gemessen, so ist, da $a \cos B + b \cos A = c$, der relative Fehler in der Seite c gleich

$$\frac{dc}{c} = \frac{da}{a} + \frac{b \sin A}{c} dC.$$

Setzt man in Gleichung (288) den Winkel $C = 180^0$, so wird

$$c \, . \, dc = (a + b)(da + db),$$

und da in diesem Falle das Dreieck in eine Gerade von der Länge $a + b = c$ übergeht, so folgt, wie es seyn muss,

$$dc = da + db.$$

Nimmt man $C = 0$ an, so wird

$$c \, . \, dc = (a - b)(da - db)$$

und da hier $c = a - b$ ist, so erhält man

$$dc = da - db;$$

ein Ergebniss, dessen Richtigkeit auch ohne diese Entwickelung einleuchten würde.

Wären die Seiten fehlerfrei gemessen, also da und db null, so folgte aus (288) die Gleichung

$$c \, . \, dc = ab \sin C \, dC,$$

d. h. der Fehler in der berechneten Seite würde in diesem Falle dem Winkelfehler proportional seyn.

Will man ausser dem Fehler in der Seite c auch die Fehler in den Winkeln A und B bestimmen, so gehören dazu drei Gleichungen, während wir bisher bloss eine, nämlich die aus der Grundgleichung hervorgegangene (Nr. 288) behandelten. Eine der beiden anderen Gleichungen, in welchen die Winkel A und B vorkommen, ist die bekannte Relation

$$a \sin B = b \sin A,$$

woraus durch Differentiiren folgt:

$$a \cos B \, . \, dB + \sin B \, da = b \cos A \, dA + \sin A \, db; \quad . \quad . \quad (291)$$

und die dritte Gleichung ergibt sich aus der ebenfalls gegebenen Summe der drei auf 180^0 ausgeglichenen Winkel, nämlich aus

$$A + B + C = 180^0.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so kommt

$$dA + dB + dC = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (292)$$

Sucht man aus den Gleichungen (291) und (292) die Werthe von dA und dB durch einfaches Substituiren, so gelangt man sofort zu den Ausdrücken:

$$dA = \frac{b \sin A}{c}\left(\frac{da}{a} - \frac{db}{b}\right) - \frac{a \cos B}{c}\,.\,dC; \quad . \quad . \quad (293)$$

$$dB = \frac{b \sin A}{c}\left(\frac{db}{b} - \frac{da}{a}\right) - \frac{b \cos A}{c}\,.\,dC. \quad . \quad . \quad . \quad (294)$$

Man entnimmt hieraus, dass die Fehler in den berechneten Winkeln A und B um so kleiner werden, je grösser die Seite c im Verhältnisse zu a und b, d. h. je grösser der eingeschlossene Winkel ist. Dieses Resultat ist, wie man in der folgenden Abtheilung C sehen wird, sehr günstig für die Aufnahme der Vielecke aus ihrem Umfange, weil hiebei meist stumpfwinkelige Dreiecke aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen (stumpfen) Winkel aufzunehmen sind.

Haben die Messungen der Seiten a und b eine gleiche Genauigkeit, d. h. ist $\frac{da}{a} = \frac{db}{b}$, und sind die Messungsfehler in einerlei Sinn begangen worden, so wird

$$dA = -\frac{a \cos B}{c}\,dC, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (295)$$

$$dB = -\frac{b \cos A}{c}\,dC. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (296)$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke und berücksichtigt, dass $a \cos B + b \cos A = c$ ist, so kommt, wie es seyn muss,

$$dA + dB + dC = 0.$$

Werden die beiden Winkel A und B einander gleich, so ist $a \cos B = b \cos A = \frac{1}{2}\,c$ und daher

$$dA = dB = -\tfrac{1}{2}\,dC.$$

Soll ein Dreieck so angeordnet werden, dass, wenn man es nach und nach von allen drei Endpunkten aus durch Seitwärtsabschneiden aufnimmt, die Summe aller Folgen der Beobachtungsfehler auf die berechneten Stücke möglichst klein wird, so ist dazu abermals nur ein gleichseitiges oder diesem nahe kommendes Dreieck geeignet; denn für die Aufnahme aus der Ecke C ist es vortheilhaft, wenn die Winkel A und B und also auch die Seiten a und b gleich sind; für die Messung aus dem Punkte B werden die Folgen der Beobachtungsfehler am geringsten, wenn die Winkel A und C oder die Seiten a und c nicht von einander abweichen, und für die Aufnahme aus dem Punkte A besteht die Bedingung $B = C$ oder $b = c$; allen diesen Bedingungen zugleich kann aber nur ein gleichseitiges Dreieck entsprechen.

C. Messung von Vielecken und Flurmarken.

§. 285. Ist ein Verband von Grundstücken oder ein Flurbezirk für sich, d. i. ohne Zusammenhang mit einer grösseren Landesvermessung, aufzunehmen, so beginnt man die Messung nicht damit, dass man sofort jedes Grundstück einzeln aufnimmt und die erhaltenen Bilder in einer der Natur entsprechenden Folge aneinander reiht, sondern man überzieht erst die

aufzunehmende Fläche mit einem Vielecke und knüpft an dessen genau gemessene Eckpunkte und Seiten die Aufnahme der Grundstückgrenzen an. Der Vortheil dieses Verfahrens, wonach vom Grossen in's Kleine gearbeitet und die Controle der nachfolgenden Messungen in die vorausgegangenen Bestimmungen gelegt wird, beruht theils in der Sicherstellung gegen das Uebersehen grober Fehler in der Detailaufnahme, theils in der möglichst gleichmässigen Vertheilung der unvermeidlichen Messungsfehler, und ist jenem Vortheile vergleichbar, den ein geordneter Zusammenhang der Umfangs- und Zwischenmauern eines Gebäudes für dessen inneren Ausbau gewährt.

Es ist hier nur von solchen Vielecken die Rede, welche für kleinere Aufnahmen nöthig sind und welche demnach, auch wenn sie sich über eine Meile erstrecken sollten, als eben angesehen werden können; die grösseren, aus Dreiecken zusammengesetzten Vielecke oder die Netze, welche die Grundlage der Landes- und Gradmessungen bilden und deren horizontale Projectionen in der Regel nicht mehr auf einer Ebene, sondern nur auf der Kugelfläche richtig dargestellt werden können, werden erst in dem folgenden Abschnitte betrachtet. Auch setzen wir hier nicht immer geschlossene Vielecke als gegeben voraus, sondern verstehen darunter überhaupt eine durch gerade Linien verbundene Reihenfolge von Punkten, wie sie bei Absteckungen für technische Zwecke oft genug vorkommt.

Wir verbinden die Lehre von der Messung der Vielecke und Flurbezirke desshalb, weil jene meist nur dazu gebraucht werden, um diese ihrer Form und Grösse nach darzustellen, und weil somit die Polygonmessungen der Hauptsache nach einen Theil der Flurmessungen bilden.

1. Aufnahme der Vielecke und Flurbezirke.

§. 286. Es gibt verschiedene Methoden Vielecke aufzunehmen, und man wendet je nach der Beschaffenheit des Terrains bald die eine bald die andere an; in manchen Fällen lassen sich zwei oder drei dieser Methoden vortheilhaft mit einander verbinden.

Geschieht die Aufnahme eines Vielecks von einem einzigen inner- oder ausserhalb desselben gelegenen Punkte aus, wobei die aufzunehmende Figur in Dreiecke zerlegt wird, die aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bestimmt werden, so nennt man das angewendete Verfahren die Polarmethode.

Bezieht man alle Eckpunkte und Seiten des Vielecks auf irgend zwei feste Punkte und die dadurch bezeichnete gerade Linie, welche als Grundlinie aller Dreiecke erscheint, in die das Polygon zerlegt wird, so geschieht dessen Aufnahme nach der Abschneidmethode.

Misst man alle Seiten und Winkel des Vielecks unmittelbar und stellt dasselbe aus diesen Theilen des Umfangs dar, so bedient man sich der Umfangsmethode.

Legt man endlich alle Punkte und folglich auch alle Seiten des Vielecks mit Hilfe von recht- oder schiefwinkeligen Coordinaten fest, so heisst diese Art der Festlegung oder Aufnahme die Coordinatenmethode.

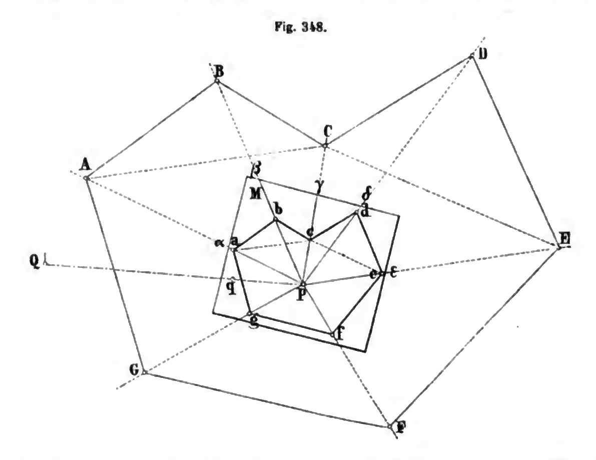
Diesen vier Methoden liesse sich leicht noch eine fünfte, nämlich die Dreiecksmethode, nach welcher jedes Vieleck in ein Netz von Dreiecken, die weder eine gemeinschaftliche Spitze noch Basis haben, zerlegt wird, beifügen; wir ziehen es aber vor, diese bei grösseren Aufnahmen anzuwendende und unter dem Namen Trianguliren bekannte Methode erst in dem folgenden Capitel zu erörtern.

§. 287. Aufgabe. Ein auf dem Felde abgestecktes Vieleck soll nach der Polarmethode aufgenommen werden.

Die Lösung dieser Aufgabe setzt immer voraus, dass der Raum, den das Vieleck umschliesst, von Hindernissen möglichst frei ist, damit man von dem gewählten oder gegebenen Standpunkte aus nach allen Endpunkten hin visiren und messen kann. Der als Pol erscheinende Standpunkt wird am zweckmässigsten innerhalb und möglichst in der Mitte des Polygons angenommen; er kann aber auch in einer Ecke und sogar ausserhalb der aufzunehmenden Figur liegen.

Geschieht die Aufnahme mit dem Theodolithen, so stelle man denselben

Fig. 348.



über dem Pole P (Fig. 348) centrisch und horizontal auf und messe die Azimuthalwinkel aller Richtungslinien PA, PB u. s. w. bis wieder zu PA. Soll das aufzunehmende Vieleck gegen eine gegebene feste Linie, z. B. PQ,

orientirt werden, so thut man am besten, alle Horizontalwinkel auf diese Linie, als den linken Schenkel eines jeden, zu beziehen, was einfach dadurch geschieht, dass man zuerst auf PQ einstellt und abliest. Besitzt man einen Repetitionstheodolithen, so wird man, um alle Azimuthe ohne Rechnung zu erhalten, beim Beginne der Messung den Nonius I des Horizontalkreises auf 0^0 stellen und den Kreis selbst so weit drehen, dass das Fadenkreuz genau auf das Signal Q einsteht. Die horizontalen Projectionen der Linien PA, PB u. s. w. werden entweder mit Messlatten oder mit der Messkette auf bekannte Weise bestimmt; ist aber das Theodolithenfernrohr, wie das in §. 184 beschriebene, zum Distanzmessen eingerichtet, so wird die Längenmessung selbstverständlich sofort mit der Winkelmessung verbunden und gleichzeitig die Erhebung oder Senkung des Rohrs beobachtet, um die gemessenen schiefen Entfernungen nach §. 186 auf den Horizont zu reduciren. Wie aus den horizontalen Fahrstrahlen und den Azimuthalwinkeln das Vieleck zu zeichnen ist, bedarf wohl keiner Beschreibung.

Wird das Vieleck mit dem Messtische und dem Reichenbach'schen Distanzmesser aufgenommen, so stelle man, wenn das Bild pq der Orientirungslinie PQ gegeben seyn sollte, den Messtisch so auf, dass p lothrecht über P und pq in der Vertikalebene PQ liegt, wenn das Tischblatt horizontal ist und feststeht. Hierauf lege man die Linealkante des Distanzmessers an p, visire nach A, lese auf der daselbst befindlichen Distanzlatte die schiefe Entfernung AP ab, reducire dieselbe mittels der Tabelle Nr. II auf den Horizont und trage die reducirte Länge von p aus in verjüngtem Masse = pa auf der feinen Linie ab, welche man an der Linealkante hinzieht. In gleicher Weise verfahre man mit den Linien PB, PC, PD .... und verbinde schliesslich die Bildpunkte a, b, c, d ...., wodurch eine dem gegebenen Vielecke ABCD .... ähnliche Figur abcd .... auf dem Messtischblatte entsteht, wie sie die Aufgabe verlangt.

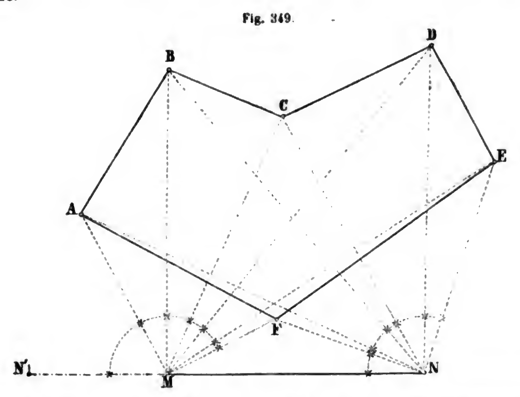
Man sieht sofort ein, dass das Vieleck ABCDE .... nicht geschlossen zu seyn braucht, um nach dieser Methode aufgenommen zu werden; man überzeugt sich aber auch leicht, dass weder in der Aufnahme des geschlossenen noch des offenen Vielecks eine Controle für die richtige Messung liegt, und dass die Prüfung der letzteren nur dadurch bewirkt werden kann, dass man entweder einzelne Seiten AB, BC .... oder Diagonalen AC, CE .... des Polygons misst und vergleicht, ob sie mit ihren Bildern ab, bc .... oder ac, ce .... übereinstimmen oder nicht.

§. 288. **Aufgabe. Ein gegebenes Vieleck von einer abgemessenen Standlinie aus aufzunehmen.**

Die Aufnahme kann wieder mit dem Theodolithen oder dem Messtische geschehen. In beiden Fällen ist es nöthig, die Standlinie geschickt zu wählen, wenn sie nicht durch besondere Umstände ein- für allemal vorgeschrieben ist. Diese Basis kann sowohl inner- als ausserhalb des Vielecks liegen, wenn sie nur folgende Bedingungen möglichst gut erfüllt. Sie soll nämlich erstens zwei feste Endpunkte haben, auf denen sich die Winkel-

messinstrumente sicher aufstellen und alle Punkte des Vielecks anvisiren lassen; ferner soll sie so liegen, dass sie genau gemessen werden kann und die Eckpunkte durch gute Schnitte (d. h. durch Winkel, welche weder sehr spitz noch sehr stumpf sind [1]) gibt; und endlich soll die Standlinie nicht zu kurz seyn, damit wiederum die schlechten Schnitte vermieden werden. Im Allgemeinen kann man annehmen, dass eine ausserhalb des Vielecks liegende Grundlinie bessere Schnitte gibt, als eine im Vieleck sich befindende.

Fig. 349.



Besitzt man zur Messung der Winkel einen Repetitionstheodolithen, dessen Fernrohr sich durchschlagen oder umlegen lässt, so wird man bei der Aufstellung in dem Punkte M der Basis MN (Fig. 349) den Nonius I auf den Nullpunkt des Horizontalkreises einstellen und diesen selbst so drehen, dass das Fernrohr genau auf das in der Richtung NM liegende Signal N' zeigt; hierauf das Fernrohr durchschlagen und sofort nach A visiren: die Ablesung am Nonius I gibt alsdann selbstverständlich den Winkel N'MA. Nach der Einstellung auf B erhält man aus der Ablesung am Nonius I den Winkel N'MB u. s. w. Sind alle Winkel in M gemessen und man will die Messung nicht wiederholen, so versetzt man das Instrument nach N, stellt wieder den Nonius I auf Null und richtet durch Drehung des Horizontal- und Vertikalkreises das Fadenkreuz zuerst auf das Signal M. Ist der Horizontalkreis festgestellt, so bewegt man die Alhidade nach und nach so weit nach rechts, bis das Fadenkreuz successive auf die Punkte F, A, B, C .... trifft und wiederum alle Winkel der Visirlinien NF, NA, NB .... mit der Basis NM gemessen sind.

[1] Als sehr spitze Winkel sieht man hier schon diejenigen an, welche weniger als 20°, und als sehr stumpfe jene, welche mehr als 160° betragen.

Trägt man diese Winkel mit Hilfe ihrer Tangenten an die auf den Horizont reducirte Basis mn an, so bekommt man durch Verbindung der entsprechenden Schnitte das Vieleck abcdef, welches dem Vieleck ABCDEF ähnlich ist; und hiermit ist die Aufgabe gelöst.

Wie mit Hilfe des Messtisches und der Kippregel das Vieleck ABCDEF von der Standlinie MN aus aufzunehmen ist, enthält bereits der §. 273, in so ferne dort gezeigt wurde, wie drei ausserhalb der Basis liegende Punkte durch Vorwärtsabschneiden zu finden sind. Was aber für drei Punkte gilt, lässt sich auf eine beliebige Anzahl von Punkten und somit auch auf das Vieleck ABCDEF anwenden. Sollte es die Lage der Standlinie mit sich bringen, dass ein Punkt (C) des Vielecks nicht durch Vorwärtsabschneiden bestimmt werden könnte, so müssten die beiden nächstgelegenen Polygonseiten (CB, CD) abgemessen und hiermit der gesuchte Punkt (c) construirt werden. Dasselbe hätte zu geschehen, wenn der Schnitt dieses Punktes ein schlechter, also seine Bestimmung selbst unsicher wäre. Es versteht sich von selbst, dass sich der in Rede stehende Punkt auch nach §. 274 durch Rückwärtsabschneiden finden liesse, wobei irgend zwei von ihm aus gut sichtbare und schon vorher bestimmte Eckpunkte benützt werden könnten. Zur Controle der Messung kann man auch solche Punkte, welche aus guten Schnitten gefunden wurden, durch Rückwärtsabschneiden bestimmen und zusehen, ob man in beiden Fällen ein und dasselbe Resultat erhält.

§. 289. Aufgabe. Ein Polygon nach der Umfangsmethode aufzunehmen und zum Schlusse zu bringen.

Diese Aufnahmsmethode findet vorzüglich dann ihre Anwendung, wenn das Visiren innerhalb der darzustellenden Terrainfläche durch Häuser, Bäume etc. erschwert oder unmöglich ist, also bei Aufnahme von Ortschaften, Wäldern u. dgl. Sie wird durch das Messen der Seiten ziemlich mühsam, gewährt aber, wenn man alle Stücke des Vielecks gemessen hat, durch den mehr oder weniger genauen Schluss der aufgenommenen Figur sofort eine Controle der Messung.

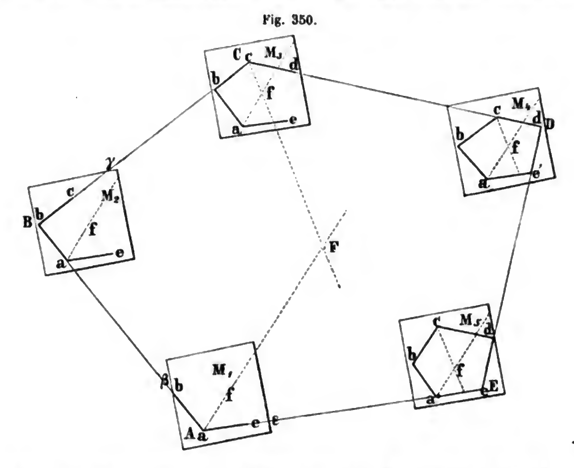
Ueber die Aufnahme des Vielecks mit Theodolithen und Messlatten ist kaum mehr zu bemerken, als dass das Messen der Winkel und Seiten mit aller Sorgfalt geschehen muss, und dass die Polygonwinkel, wenn ihre Summe nur sehr wenig von der dem Vielecke zukommenden Winkelsumme abweicht und somit die Abweichung als die Folge der unvermeidlichen Messungsfehler angesehen werden kann, vor dem ersten Auftragen der Figur durch gleichheitliche Vertheilung des Gesammtfehlers verbessert werden. Ist aber die Summe aller gemessenen Winkel auffallend verschieden von der, welche sie seyn sollte, und geht daraus hervor, dass in einem oder mehreren Winkeln grobe Messungsfehler gemacht wurden, so müssen erst diese Fehler aufgesucht und beseitigt werden, ehe man zum Auftragen des Vielecks schreitet. Wie man aber einen grösseren Fehler, wenn er nur in einem Winkel oder nur in einer Seite gemacht wurde, durch

Construction oder Rechnung finden kann, lehrt der §. 290, und wie ein mit dem Theodolithen aus dem Umfange aufgenommenes Polygon durch Coordinaten zweckentsprechend aufgetragen werden kann, der §. 291, auf die für solche Fälle hiermit verwiesen wird.

Bedient man sich, wie es meist geschieht, des Messtisches zur Aufnahme des Polygons aus dem Umfange, so hat man sich vor allen Dingen aus den zweimal und mit Messlatten sehr genau gemessenen Seiten der Figur ein Bild derselben in dem Massstabe zu entwerfen, welcher der Aufnahme zu Grunde gelegt werden soll, und zuzusehen, ob dieses (allerdings nur annähernd richtige) Bild auf dem Messtische Platz findet oder nicht, und wenn ja, in welcher Lage. Sollte die gezeichnete Figur zu gross seyn, so kann man entweder einen kleineren Massstab für die Aufnahme wählen, oder aber die Aufnahme so vollziehen, dass man auf dem Messtische zwar alle Stücke des Vielecks gezeichnet erhält, aber dieses selbst erst auf einem grösseren Blatte zusammensetzen muss. Zunächst setzen wir voraus, dass die ganze Figur auf dem Blatte Platz finde.

Stellt ABCDE das auf dem Felde mit starken Pfählen, in die oben zum Einstecken von Messfahnen Löcher gebohrt sind, bezeichnete Vieleck vor und sind bereits alle Seiten desselben gemessen und auf den Horizont

Fig. 350.



reducirt, so stelle man den Messtisch auf dem Endpunkte A so auf, dass a lothrecht über A und die vorhin als passend gefundene Richtung aβ in die Richtung von AB fällt, sobald der Tisch horizontal und fest steht. Ist ausser der Richtung aβ auch die aε nach E, d. i. der Winkel BAE

bestimmt, so trage man AB im verjüngten Masse = ab und AE verjüngt = ae ab. Sollte man von A aus einen Punkt F innerhalb der Figur sehen und von A nach F messen können, so ist es für die spätere Aufstellung des Tisches und die Controle der Messung gut, diesen Punkt sofort mit aufzunehmen und in der Figur als f darzustellen. Hierauf kommt der Messtisch in die zweite Lage M_2 über den Punkt B, so nämlich, dass b lothrecht über B steht und ba nach BA orientirt ist. In B wird der Winkel CBA gemessen und die Seite BC verjüngt = bc aufgetragen. In C wird c über C gestellt, nach CB orientirt, der Winkel BCD gemessen und CD verjüngt = cd abgetragen. Sollte man von C aus auch F sehen können, so visirt man, die Kippregel an c legend, dahin und überzeugt sich, ob die an der Linealkante gezogene Linie durch f geht oder nicht. Gienge diese Linie nicht durch f, so müsste in dem bisherigen Verfahren ein Fehler vorgekommen seyn, der sofort aufzusuchen und zu verbessern wäre. Die Fortsetzung der Messung fordert, dass d centrisch über D und dc in die Richtung DC gestellt werde. Hier wird nach E visirt und die Seite de' erhalten. Trifft der Punkt e' der Seite de' mit dem Punkte e der Seite ae zusammen, so schliesst sich das Polygon, ausserdem sagt man: „es schliesst sich nicht."

Findet ein Schluss der Figur statt, so kann man denselben als ein gutes Zeichen für die genaue Arbeit ansehen; man wird aber in diesem Falle gleichwohl noch den Punkt e über E bringen, den Messtisch nach ED orientiren und zusehen, ob auch der bereits gezeichnete Winkel aed dem AED gleich ist. Diese Prüfung der Messung ist desshalb gut, weil man dadurch erfährt, ob das Schliessen nicht in Folge eines gröberen Messungsfehlers, der alle unvermeidlichen Fehler ausgleicht, geschieht.

In der Regel wird sich, wenn man in dem vorletzten Punkte (D) angekommen ist, die Figur nicht schliessen, d. h. es wird, mit Beziehung auf Fig. 350, der Punkt e' von e mehr oder weniger abstehen. Diese Erscheinung wird als das Resultat der unvermeidlichen Beobachtungsfehler angesehen, so lange der Abstand ee' in günstigem Terrain nicht mehr als $^1/_{800}$ und in ungünstigem Terrain nicht mehr als $^1/_{400}$ des ganzen Umfangs abcde beträgt. In diesem Falle schreitet man zur Ausgleichung der unvermeidlichen Fehler, d. h. man bringt das aufgenommene Polygon zum Schluss; beträgt aber die Linie ee' mehr als $^1/_{800}$ und beziehungsweise mehr als $^1/_{400}$ des Polygonumfangs, so bleibt nichts Anderes übrig, als die ganze Messung zu wiederholen und dabei zu berücksichtigen, dass sich die unvermeidlichen Fehler besser vertheilen, wenn man die Aufnahme des Polygons nach zwei Seiten hin vornimmt, d. i. von A über B bis C und hierauf von E über D bis C.

Schliesst sich ein aufgenommenes Vieleck wegen der unvermeidlichen Messungsfehler nicht, so ist anzugeben, wie man zu verfahren habe, um auf eine möglichst vortheilhafte Weise den Schluss zu bewirken.

Bei den nachfolgenden empirischen Regeln, welche den practischen Anforderungen genügen, ist vorausgesetzt, dass das Polygon von dem Punkte A aus nach zwei Seiten hin aufgenommen sey, und dass dadurch

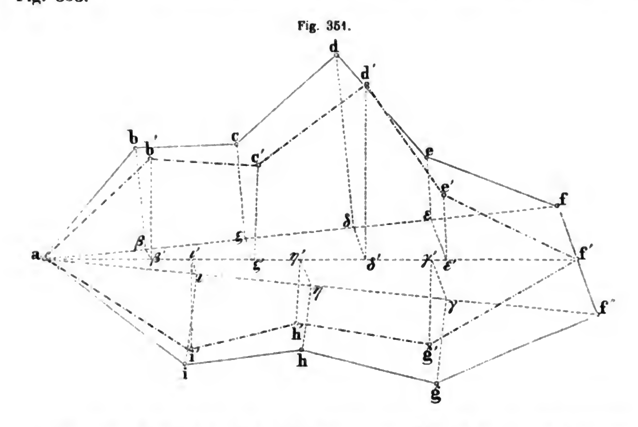
die beiden Theile desselben abcdef und aihgf'' (Fig. 351 bis 353) erhalten worden seyen. Wäre die Aufnahme von dem Punkte f'' aus über g und a bis nach f hin in einer Richtung vollzogen und am Ende der Abstand ff'' der Schlusspunkte erhalten worden, so würde man das Polygon in zwei Theile abcdef und aihgf'' zerlegen, und zwar dadurch, dass man einen Punkt a sucht, der wo möglich um gleichviele Seiten von f und f'' absteht. Denkt man sich nun die Linien af und af'' gezogen, so können dieselben folgende drei Lagen gegen einander annehmen:

1) Der eine Theil des Polygons abcdef ist von dem andern aihgf'' ganz getrennt, wie in Fig. 351,

2) beide Theile greifen in einander über, wie in Fig. 352 der Theil abcdef in den Theil aihgf''; und

3) die Verbindungslinien af und af'' fallen in eine Gerade, wie in Fig. 353.

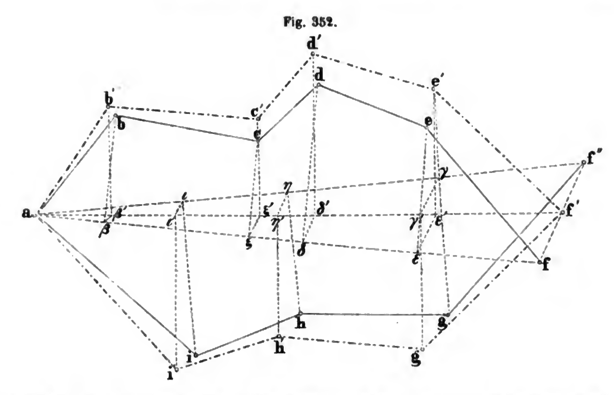
Fig. 351.



In dem ersten Falle (Fig. 351) ziehe man ff'', fälle die Senkrechten $b\beta$, $c\zeta$, $d\delta$, $e\varepsilon$, $g\gamma$, $h\eta$, $i\iota$, halbire ff'' in f' und ziehe die Linien $\beta\beta'$, $\zeta\zeta'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$, $\eta\eta'$, $\iota\iota'$ zu ff'' parallel bis an die Halbirungslinie af'. Hierauf errichte man in den Punkten β', ζ', δ', ε', γ', η', ι' Senkrechte zu af' und mache dieselben nach einander gleich $b\beta$, $c\zeta$, $d\delta$, $e\varepsilon$, $g\gamma$, $h\eta$, $i\iota$. Werden nun die Köpfe dieser Senkrechten durch Gerade verbunden, so entsteht das Polygon ab'c'd'e'f'g'h'i'a, welches sich schliesst und von dem durch die Aufnahme unmittelbar erhaltenen nur sehr wenig unterscheidet.

In dem zweiten Falle (Fig. 352) verbinde man zuerst wieder f mit f'', halbire ff'' in f' und ziehe af'. Hierauf errichte man zu af die Senkrechten

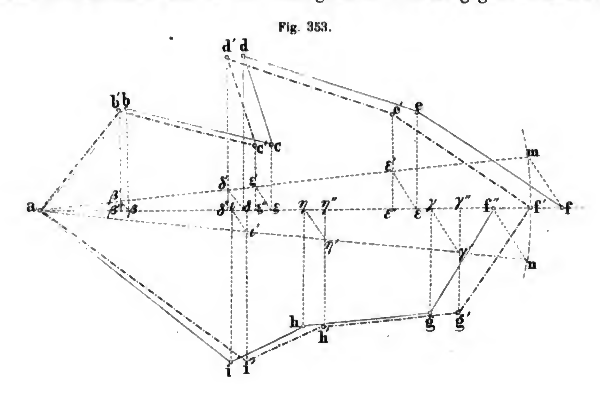
Fig. 352.



$b\beta$, $c\zeta$, $d\delta$, $e\varepsilon$ und zu af'' die Perpendikel $g\gamma$, $h\eta$, $i\iota$. Von deren Fusspunkten aus ziehe man die Linien $\beta\beta'$, $\zeta\zeta'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$, $\eta\eta'$, $\iota\iota'$ parallel zu ff'', bis sie die Linie af' schneiden. Errichtet man nun in den Schnittpunkten die Ordinaten $\beta'b' = \beta b$, $\zeta'c' = \xi c$, $\delta'd' = \delta d$, $\varepsilon'e' = \varepsilon e$, $\gamma'g' = \gamma g$, $\eta'h' = \eta h$, $\iota'i' = \iota i$ und verbindet deren Köpfe nacheinander durch gerade Linien, so erhält man das gesuchte geschlossene Polygon $ab'c'd'e'f'g'h'i'a$.

In dem dritten Falle endlich (Fig. 353) halbire man wieder den Abstand ff'' in f', beschreibe aus a mit dem Halbmesser af' einen Kreisbogen und ziehe die Halbmesser am und an unter gleichen Winkeln gegen die Linie af'.

Fig. 353.

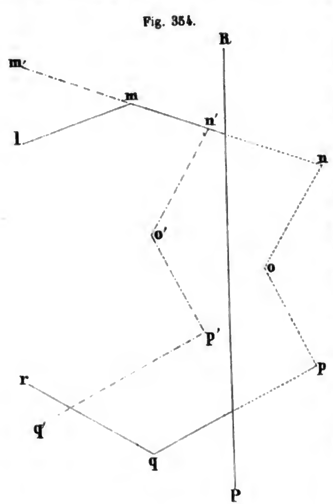


Weiter fälle man zu af' die Senkrechten bβ, cζ, dδ, eε, gγ, hη, iι und ziehe von deren Fusspunkten aus die Linien $\beta\beta'$, $\zeta\zeta'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$, $\eta\eta'$, $\iota\iota'$ mit fm und f''n parallel, bis die Hilfslinien am und an geschnitten werden. In den Schnittpunkten errichte man wieder Senkrechte zu af' und mache $\beta''b' = \beta b$, $\zeta''c' = \zeta c$, $\delta''d' = \delta d$, $\varepsilon''e' = \varepsilon e$, $\gamma''g' = \gamma g$, $\eta''h' = \eta h$, $\iota''i' = \iota i$.

Werden schliesslich die Köpfe dieser Senkrechten der Reihenfolge nach verbunden, so entsteht das geschlossene und die Fehler möglichst gut ausgleichende Vieleck ab'c'd'e'f'g'h'i'a, welches gesucht wurde.

Sollte bei der Aufnahme eines Polygons mit dem Messtische der Fall eintreten, dass ein Theil der Zeichnung über das Tischblatt hinausreicht, so kann man sich dadurch helfen, dass man den über den Rand des Blattes hinausfallenden Theil zunächst für sich aufnimmt und erst später mit dem übrigen Theile der aufgenommenen Figur verbindet. Denn gesetzt, es sey PR in Fig. 354 der Rand des Tischblattes und nop der über denselben hinausfallende Theil der Zeichnung, so kann man auf der zuletzt aufgenommenen Richtung mn, welche auf dem Blatte so lange als möglich gezogen wird, statt der Seite mn die eben so lange Linie m'n' auftragen, wobei der Punkt n' so weit zurückgeschoben ist, dass kein Punkt der Figur m'n'o'p'q' über PR hinausfällt. In dem Punkte N des Vielecks wird der Messtisch nach n' centrirt und durch n'm' nach NM orientirt. Im Uebrigen verfährt man so, als ob n' das richtige Bild von N wäre.

Fig. 354.



Hat man durch Fortsetzung der Aufnahme die Punkte o', p', q' erhalten und will man wieder auf den richtigen Punkt q, der aber erst zu construiren ist, übergehen, so braucht man nur durch q' eine Parallele zu m'n' zu ziehen und q'q = m'm zu machen, so ergibt sich q. Besser ist es aber, die Aufnahme, nachdem sie vom Anfangspunkte A an über B und C bis Q nach obigem Verfahren gemacht ist, von A aus über Z und W bis Q fortzusetzen und zu vollenden. Dadurch ergibt sich q von selbst. Zur Controle kann man auch noch die Richtung qp herstellen, welche, wenn richtig gearbeitet wurde, mit q'p' parallel seyn muss.

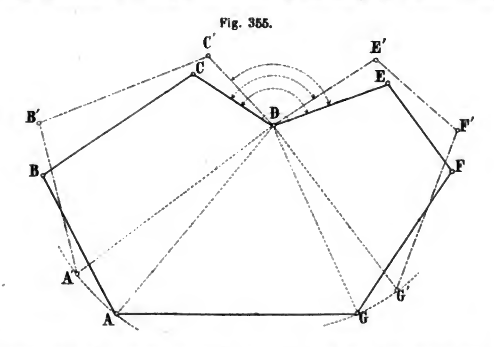
§. 290. **Aufgabe. Ein Polygon ist aus dem Umfange aufgenommen worden, schliesst sich aber wegen eines groben Messungsfehlers nicht: man soll diesen Fehler aufsuchen.**

Der vorhandene Fehler kann entweder in einem Winkel oder in einer Seite liegen und entweder durch Zeichnung oder durch Rechnung zu bestimmen seyn.

A. Es sey ein Winkel, und zwar nur ein einziger, falsch gemessen.

1) Der fehlerhafte Winkel ist durch Zeichnung zu finden. (Fig. 355.)

Fig. 355.



Nimmt man an, dass der Winkel CDE falsch aufgenommen worden sey, so wird, wenn man das Vieleck, von der Seite AG ausgehend, über B und C hin aufträgt, die sich nicht schliessende Figur GABCDE′F′G′ entstehen, von welcher der Theil GABCD vollständig richtig, der übrige aber falsch ist, weil er den fehlerhaften Winkel bei D enthält. Trägt man die gemessenen Stücke nochmals von AG aus auf und zwar in einer der vorigen entgegengesetzten Richtung, so entsteht die Figur AGFEDC′B′A′, welche von A bis D richtig, von D bis A′ aber falsch ist. Vergleicht man die aufgetragenen zwei Vielecke mit einander, so sieht man, dass sich dieselben nothwendig in dem Punkte D, welcher in beiden aus fehlerfreien Bestimmungsstücken erhalten wurde, schneiden müssen; umgekehrt also wird man den Scheitel (D) des fehlerhaften Winkels finden, wenn man die aufgenommenen Seiten und Winkel von einer und derselben Seite aus zweimal in entgegengesetzter Richtung aufträgt und zusieht, wo sich die beiden Figuren schneiden. Auch ist leicht einzusehen, dass durch die Verbindung der Schlusspunkte G, G′ oder A, A′ mit dem Scheitel D der Fehler des Winkels = GDG′ = ADA′ = EDE′ = CDC′ gefunden werde.

2) Der fehlerhafte Winkel ist durch Rechnung zu finden. (Fig. 355.)

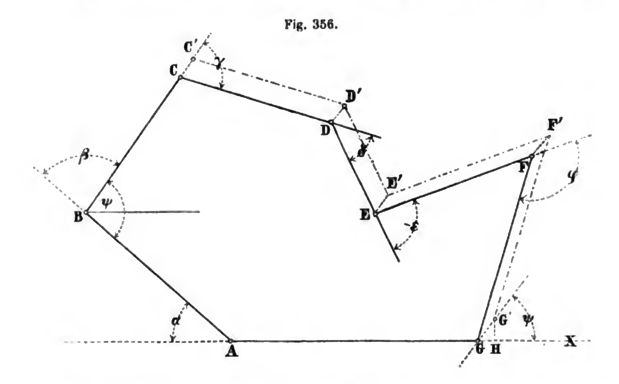
Denkt man sich von allen Eckpunkten der Vielecke ABCDE′F′G′ und AGFEDC′B′A′ auf die als Hauptlinie angenommene Seite AG Perpendikel

gefällt, so ist klar, dass die beiden für jeden Punkt vorhandenen Senkrechten in ihrer Länge verschieden sind, mit Ausnahme derjenigen zwei, welche dem Punkte D angehören. Berechnet man demnach mit Hilfe der bekannten polygonometrischen Formeln aus den gegebenen Stücken alle Ordinaten doppelt, so erhält man einmal zwei gleiche Werthe, und der Punkt, dem sie angehören, ist der Scheitel des gesuchten Winkels. Die Grösse seines Fehlers lässt sich zwar aus den Dreiecken A D A′ oder G D G′ berechnen; es ist aber in jedem Falle, auch in dem vorigen, besser, den fehlerhaften Winkel an Ort und Stelle nochmals zu messen.

B. Es sey eine Seite, und zwar nur eine einzige, falsch gemessen.

1) Die fehlerhafte Seite ist durch Zeichnung zu finden. (Fig. 356.)

Fig. 356.



Stellt ABCDEFG ein geschlossenes Vieleck vor, so wird, wenn man die Seite BC um das Stück CC′ verlängert, alle übrigen Stücke des Vielecks aber unverändert beibehält, die offene Figur G A B C′ D′ E′ F′ G′ entstehen. Verbindet man die Punkte D′, E′, F′, G′ mit den gleichnamigen Punkten D, E, F, G, so sind, wie leicht einzusehen, die Verbindungslinien DD′, EE′, FF′, GG′ alle mit CC′ gleich und parallel. Aus dieser geometrischen Wahrheit fliesst für die Auffindung der fehlerhaften Seite (BC) eines Vielecks folgende Regel: Man verbinde die beiden Schlusspunkte (G, G′) des aufgetragenen offenen Vielecks durch eine gerade Linie (GG′) und sehe zu, welche von den Polygonseiten dieser Linie parallel ist: die parallele Seite ist die falsche und der Betrag des Fehlers ist durch den Abstand GG′ der Schlusspunkte ausgedrückt. Kommen in dem Vielecke zwei parallele Seiten vor, so kann nur ein Nachmessen auf dem Felde entscheiden, welche von beiden falsch ist. Dieses Nachmessen ist aber auch in dem Falle, wo keine parallelen Polygonseiten vorkommen, nicht bloss zu empfehlen, sondern

sogar nöthig, da sonst alle unvermeidlichen Beobachtungsfehler an dieser Seite mit angebracht werden.

2) Die fehlerhafte Seite ist durch Rechnung zu finden. (Fig. 356.)

Wird die Seite G A als Abscissenaxe gewählt, so kann man nach den bekannten polygonometrischen Grundformeln, die unter Nr. 297 bis 300 zusammengestellt sind, sowohl die Abscissen als Ordinaten aller Eckpunkte A, B, C′, D′, E′, F′, G′ aus den gegebenen Seiten und Winkeln berechnen. Hieraus kann man ferner die Neigung (φ) der Schlusslinie G′G gegen die Abscissenaxe und auch ihre Länge finden. Berechnet man endlich aus den gemessenen Grössen die Neigungen aller Polygonseiten gegen die Axe AG und vergleicht die Neigungswinkel mit dem von GG′, so wird man eine Seite (BC) finden, welche sehr nahe denselben Neigungswinkel (φ) hat, und diese (oder eine ihr parallele) ist als die fehlerhafte zu bezeichnen. Der Fehler, den man auf dem Felde durch directes Nachmessen erhält, wird dem berechneten Abstande GG′ der Schlusspunkte ebenfalls sehr nahe gleich seyn.

§. 291. Aufgabe. Mit dem Theodolithen ist ein Vieleck aus dem Umfange aufgenommen worden: man soll dasselbe mittels Coordinaten so genau als möglich auftragen.

Es ist immer eine missliche Sache, wenn man sich zum Auftragen von Winkeln des Gradbogens bedient, denn die Genauigkeit der Zeichnung bleibt in diesem Falle weit hinter der Genauigkeit der Winkelmessung zurück. Dieses Missverhältniss zwischen Aufnahme und Zeichnung bessert sich aber, wenn man die Winkel nach ihren Tangenten, die freilich vorher zu berechnen sind, aufträgt; und dasselbe ist der Fall, wenn man zur Zeichnung eines Vielecks dessen Coordinaten benützt, welche sich aus den gemessenen Stücken des Umfangs leicht berechnen lassen. Da rechtwinkelige Coordinaten am sichersten und schnellsten aufgetragen werden können, so wird man sich stets eines rechtwinkeligen Axensystems bedienen, und da es die Formeln vereinfacht, so wählt man eine Ecke des Polygons als Ursprung und eine Seite als Abscissenaxe.

Sind in dem nEcke, welches Fig. 357 vorstellt, die Seiten

$$A_1 A_2 = a_1,\ A_2 A_3 = a_2,\ A_3 A_4 = a_3 \text{ u. s. f. bis } A_n A_1 = a_n$$

und die inneren Polygonwinkel $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$ gemessen, so hat man zunächst zu untersuchen, ob die Summe dieser Winkel

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_n = (n-2)\,\pi \quad . \quad . \quad . \quad (297)$$

ist. Ist sie grösser oder kleiner und liegt die Differenz innerhalb des Bereichs der unvermeidlichen Fehler,[1] so vertheilt man die Fehlersumme gleichheitlich auf alle Winkel.

Wir sehen nunmehr die Grössen $A_1, A_2, A_3 \ldots . A_n$ als die ausgeglichenen Winkelwerthe an und bestimmen hiermit die Neigungswinkel

[1] Wenn der Nonius des Horizontalkreises eine Angabe von δ Sekunden hat, so darf man noch $n\delta$ Sekunden als Summe der unvermeidlichen Fehler ansehen.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ der Polygonseiten $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ gegen die Abscissenaxe nach der bekannten Formel:

$$\alpha_m = A_m + \alpha_{m-1} - 180^0. \quad \ldots \ldots \quad (298)$$

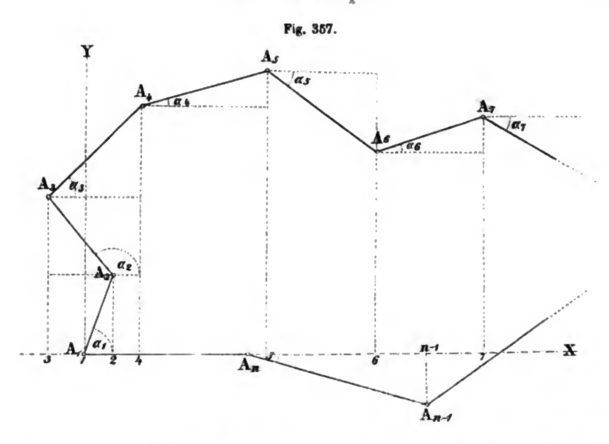
Sind diese Neigungswinkel festgestellt, so ergeben sich die Abscissen x_2, $x_3, x_4 \ldots x_n$ der Punkte $A_2, A_3, A_4 \ldots A_n$ aus der Gleichung

$$x_m = \sum_{p=1}^{p=m-1} (a_p \cos \alpha_p) \quad \ldots \ldots \quad (299)$$

und die Ordinaten aus der folgenden Gleichung, welche, wie die vorhergehende, in der Polygonometrie bewiesen wird:

$$y_m = \sum_{p=1}^{p=m-1} (a_p \sin \alpha_p). \quad \ldots \ldots \quad (300)$$

Fig. 357.



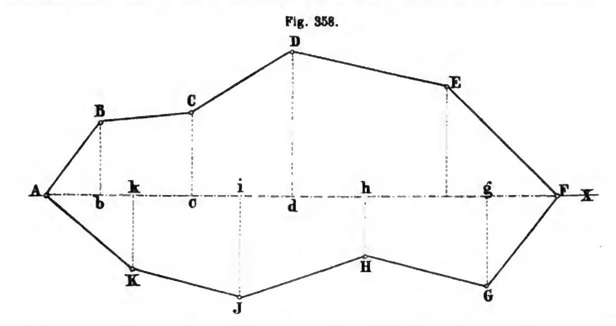
In dem vorliegenden Falle ist $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ und es müsste desshalb, wenn alle Seiten und Winkel des Polygons fehlerfrei wären, offenbar $x_n = a_n$ und $y_n = 0$ werden. Da aber die in die Rechnung eingehenden Stücke des Vielecks nicht fehlerfrei sind, so wird man am Schlusse für x_n einen von a_n und für y_n einen von Null etwas verschiedenen Werth erhalten. Würden die auf diese Weise gefundenen Coordinaten aufgetragen werden, so erhielte das Polygon keinen Schluss; damit es sich aber schliesst, müssen die Coordinaten verbessert werden. Diese Verbesserung bewirkt man am einfachsten und auf eine practisch zulässige Weise dadurch, dass man den Abscissenunterschied $x_n - a_n$ auf die Abscissen und den berechneten Werth y_n auf die Ordinaten der $n - 1$ Punkte $A_2, A_3, A_4 \ldots A_n$ gleichheitlich vertheilt. Hierdurch erleiden auch die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$

und A_1, A_2, A_3 .... A_n kleine Aenderungen, welche sich aus den Coordinatenwerthen leicht finden lassen.

§. 292. Aufgabe. Ein auf dem Felde abgestecktes Vieleck oder eine Reihe von Punkten nach der Coordinatenmethode aufzunehmen.

Am zweckmässigsten ist es, rechtwinkelige Coordinaten anzunehmen, da sich die Richtungen der Ordinaten mit dem Prismenkreuze oder Winkelspiegel leicht abstecken lassen. Als Abscissenaxe wählt man eine der längsten Diagonalen, auf der sich Abscissen gut messen und wo möglich alle Punkte des Vielecks sehen lassen. Stellt ABC...K (Fig. 358) das aufzunehmende Polygon vor, so mache man A zum Anfange der Coordinaten und AF zur Abscissenaxe, fälle von allen Eckpunkten Senkrechte auf AF, messe die

Fig. 358.

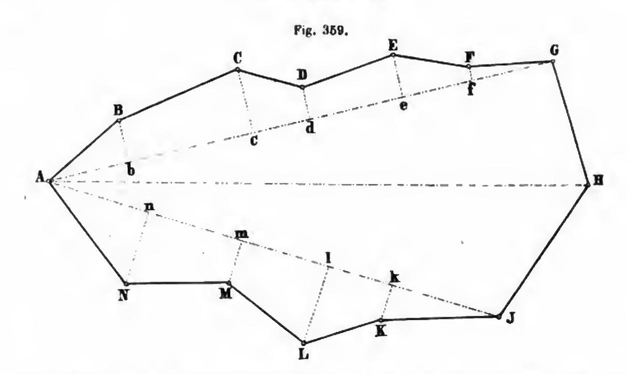


horizontalen Entfernungen Ab, Ak, Ac .... AF genau ab und verzeichne sie in einer Skizze, die man sich von dem Vielecke macht. Hierauf messe man auch noch die Ordinaten Bb, Cc, Dd ... Kk und schreibe deren Längen ebenfalls genau auf.

Werden die auf eine Abscissenaxe bezogenen Ordinaten sehr lang, wie dieses bei Fig. 359 der Fall wäre, wenn AH zur Abscissenaxe gewählt würde, so nimmt man besser zwei Abscissenaxen (hier AG und AJ) an, misst deren Neigungswinkel $GAJ = \psi$ und bestimmt in Bezug auf diese alle Eckpunkte wie vorhin, mit Ausnahme des Punktes H, welcher sich ergibt, indem man die Seiten GH, JH und nöthigenfalls den Winkel GHJ misst.

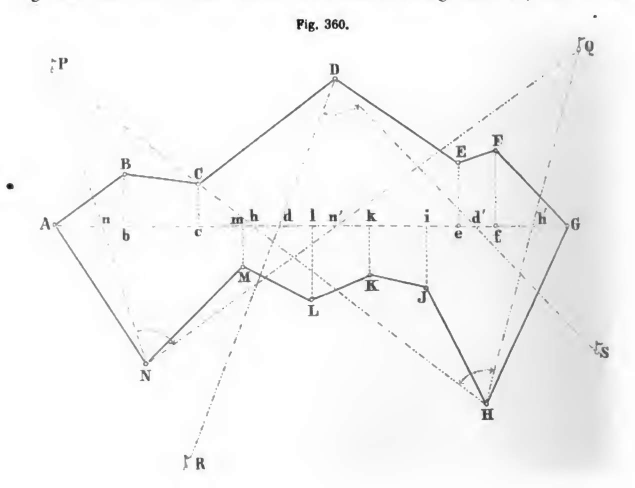
Hat man in der Umgebung des aufzunehmenden Vielecks mehrere feste Punkte, deren gegenseitige Lage schon bekannt ist, wie z. B. P, Q, R, S in Fig. 360, so kann man die entfernter liegenden Vieleckspunkte D, H, N dadurch aufnehmen, dass man von ihnen aus nach zweien der gegebenen Fixpunkte gerade, die Abscissenaxe schneidende Linien zieht, und deren Schnittpunkte auf dieser Axe einmisst. Hiernach wird der Punkt D aus

Fig. 359.



den Abscissen Ad und Ad' der Geraden DR und DS, der Punkt H aus den Abscissen Ah und Ah' der Linien HP und HQ, endlich der Punkt N aus den Abscissen An und An' der Richtungen NP und NQ gefunden, weil mit d und d' auch dR und d'S, mit h und h' auch hP und h'Q, und mit n und n' auch nP und n'Q bekannt sind, aus denen sich nacheinander die Punkte D, H, N als Durchschnitte verlängerter Richtungen ergeben. Man wird ohne weitere Auseinandersetzung einsehen, dass dieses

Fig. 360.



Verfahren in gebirgigem Terrain, wo lange Linien schwer zu messen sind, von Vortheil ist und sowohl bei der Aufnahme mit dem Messtische als mit dem Theodolithen angewendet werden kann. Zugleich liefert dieses Verfahren einen neuen Beweis von der vielfachen Anwendbarkeit des Prismenkreuzes; denn die Schnittpunkte d, d', h, h', n, n' etc. werden auf die schnellste Art damit gefunden. Schliesslich bedarf es wohl kaum der Erinnerung, dass die Hilfslinien DR, DS etc. so gewählt werden müssen, dass die Winkel RDS, PHQ, PNQ weder zu spitz noch zu stumpf werden, mit andern Worten: dass die Punkte D, H, N aus „guten Schnitten" hervorgehen.

§. 293. Aufgabe. Mit Hilfe des Messtisches aus der bekannten Lage dreier unzugänglicher Punkte die unbekannte Lage eines vierten auf dem Felde gegebenen Punktes durch blosse Winkelmessung zu bestimmen.

Dieses auch unter dem Namen „Pothenot'sche Aufgabe" oder „Rückwärtseinschneiden auf drei Punkte" bekannte Problem hat der practische Geometer bei der Aufnahme von Flurmarkungen häufig zu lösen. Er kann sich dazu der Rechnung oder der geometrischen Construction bedienen; von der Lösung durch Rechnung ist später die Rede, hier wird bloss die Zeichnung als Hilfsmittel gebraucht.

Die drei bekannten Punkte sollen auf dem Felde mit A, B, C und auf dem Messtische mit a, b, c bezeichnet seyn: das Bilddreieck abc ist selbstverständlich dem Naturdreieck ABC ähnlich, und beide hat man sich auf eine horizontale Ebene, wofür man die des richtig gestellten Messtischblattes ansehen kann, projicirt zu denken. Der vierte auf dem Felde gegebene Punkt heisse D und sein auf dem Messtische gesuchtes Bild d. Unsere Aufgabe verlangt nun: dass von D aus durch blosse Winkelmessung und Zeichnung der Punkt d so bestimmt werde, dass das Viereck abcd dem Vierecke ABCD völlig ähnlich sey.

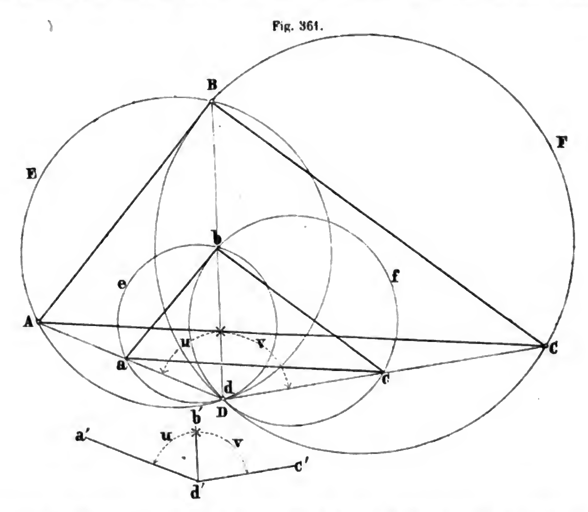
Es gibt verschiedene graphische Auflösungen dieser Aufgabe: die einen geben den gesuchten Punkt d direct durch Construction, die anderen indirect durch Probiren. Das indirecte Verfahren führt hier in der Regel schneller zum Ziele als das directe, wesshalb es auch meist angewendet wird. Wir werden beide Verfahrungsweisen erörtern.

Directe Auflösungen der Pothenot'schen Aufgabe.

1) Denkt man sich von dem Punkte D aus die Horizontalwinkel u und v, unter welchen die Dreiecksseiten AB und CB gesehen werden, bestimmt und über AB einen Kreis AEB beschrieben, welcher in der Richtung nach D auf dem Bogen AEB den Peripheriewinkel u fasst, so muss dieser Kreis offenbar durch D gehen, weil der Winkel ADB = u ist. Denkt man sich ebenso über BC einen Kreis beschrieben, der auf dieser Sehne und gegen D hin einen Peripheriewinkel v fasst, so muss dieser Kreis ebenfalls durch D gehen, weil der Winkel BDC = v ist. Was nun von dem Vierecke ABCD gilt, muss offenbar auch für das Viereck abcd gelten, weil dieses jenem ähnlich ist: d. h. der Punkt d liegt gleichzeitig auf dem Kreise aeb,

welcher rechts der Sehne ab und auf ihr den Peripheriewinkel u fasst, und auf dem Kreise bfc, welcher über der Sehne bc so beschrieben ist, dass er links von ihr und auf ihr den Peripheriewinkel v liefert; der Punkt d kann folglich nur in dem Schnittpunkte der beiden Kreise liegen. Dieses

Fig. 361.

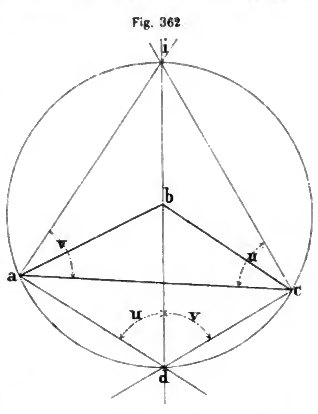


directe Verfahren erfordert also Nichts als die Messung der Winkel u, v und die Construction der eben beschriebenen zwei Kreise aeb, bfc, welche die Fig. 361 darstellt. Diese zwei Kreise fallen aber, wie man sich leicht überzeugt, in einen zusammen, wenn der Punkt D entweder auf dem Kreise ABC liegt, oder wenn die drei Punkte A, B, C eine Gerade bilden, welche durch D geht. In dem ersteren Falle liefert jeder Punkt des Kreises ABCD die Peripheriewinkel u und v, wodurch D unbestimmt bleibt; und in dem letzteren Falle hätte man es eigentlich mit einem Kreise von unendlichem Halbmesser und mit Winkeln u und v, welche beziehungsweise $= 0$ und 180^0 wären, zu thun; D bleibt also auch hier unbestimmt. Diese zwei Fälle (welche im Grunde nur einen bilden) ausgenommen, erhält man durch die Messung der Winkel u, v und die Construction der Kreise aeb, bfc stets den gesuchten Punkt d. Bei den folgenden Betrachtungen sind diese Fälle stillschweigend ausgeschlossen.

2) Eine zweite directe Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe besteht darin, die Winkel u und v zu messen und wie Fig. 362 zeigt, u an die Linie ac und die Ecke $c = aci$, v aber an dieselbe Linie ac und die

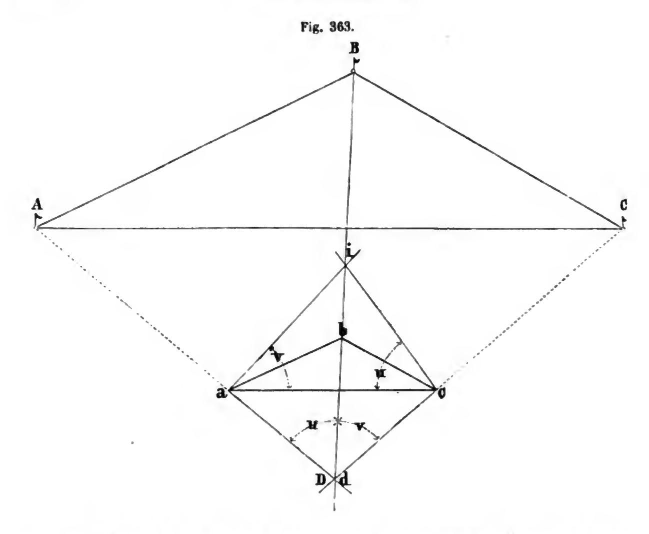
Ecke a = cai anzutragen, den Schnittpunkt i der Schenkel ci, ai zu suchen, über a, i, c einen Kreis zu beschreiben, ib zu ziehen und den Schnittpunkt d dieser Geraden mit dem Kreise als den gesuchten Punkt zu nehmen. Der Punkt d entspricht offenbar den gestellten Bedingungen: denn es ist der Winkel adb = aci = u, weil beide Winkel auf der Sehne ai des Kreises aic stehen; und es ist ferner der Winkel cdb = cai = v, weil cdb und cai zu der Sehne ic des Kreises aic gehören. Man sieht leicht ein, dass diese directe Lösung um so unsicherer wird, je kleiner der Abstand der Punkte i und b ist, weil mit der Abnahme der Länge ib die Unsicherheit der Richtung ibd, in welcher d liegt, wächst. Dieser Umstand und die Schwierigkeit, auf dem Messtische Kreise zu construiren, welche durch drei gegebene Punkte gehen, bewirken, dass diese zweite directe Lösung fast so wenig als die erste angewendet wird.

Fig. 362



3) Das von Bohnenberger angegebene Verfahren, einen Punkt auf drei andere rückwärts einzuschneiden, unterscheidet sich von dem zweiten nur dadurch, dass man die Winkel u und v sofort bei der Aufnahme an die Seite ac legt und die Construction des Kreises aic erspart. Denkt man sich nämlich den Punkt a über D gestellt und ac nach DC gerichtet, so wird die Kippregel, wenn sie an a liegt und auf B eingestellt ist, den Winkel cai = v geben; denkt man sich dann ferner den Punkt c über D und die Seite ca in die Richtung DA gebracht, so liefert die an c liegende und auf B gerichtete Kippregel den Winkel aci = u, und den Schnittpunkt i, welcher nach der vorigen Figur mit dem Punkte b in der Richtung BD liegen muss; denkt man sich endlich den Messtisch so gestellt, dass die auf ihm gezogene Linie bi durch B geht und der zu erwartende Punkt d nahezu in das Loth von d fällt, so braucht man schliesslich nur noch die Kippregel an a oder c zu legen und auf A oder C einzustellen, um den Schnitt d mit bi zu finden. Stellt man nach einander auf beide Punkte A und C ein, so sollen sich die drei Visirlinien aA, cC, bB in einem und demselben Punkte d schneiden; geschieht es nicht, so ist die Arbeit mehrmals zu wiederholen und zu verbessern, bis jene Forderung erfüllt ist. Es würde zu mühsam seyn, wenn man den Messtisch dreimal so stellen wollte, dass a, c und der muthmassliche Punkt d genau über D kommen; es ist aber auch diese dreimalige Aufstellung nicht nöthig, wenn man überlegt,

Fig. 363.



dass die Winkel u und v auch dann genau genug erhalten werden, wenn man bloss den vorläufig angenommenen Punkt d über D bringt und hierauf den Messtisch so dreht, dass die Seite ac einmal durch C und das anderemal durch A geht. Der Fehler δ, welcher hierdurch in den Winkel v kommt, ist ausgedrückt durch

$$\sin \delta = \frac{e}{l},$$

wobei e die Excentricität des Punktes a, d. i. den horizontalen Abstand dieses Punktes von dem Lothe in D, und l die Entfernung DC bezeichnet. Da aber δ klein ist, so kann man

$$\delta = 206265 \cdot \frac{e}{l} \text{ Sek.}$$

setzen. Dieser Ausdruck gilt selbstverständlich auch für den Winkel u, wenn man für e und l die entsprechenden Werthe setzt. Ist z. B. $e = 0',2$ und $l = 1000'$, so wird der Winkelfehler $\delta = 41,3$ Sekunden, also so klein, dass man ihn durch die Zeichnung auf dem Messtische nicht mehr ausdrücken kann.

Durch verschiedene Annahmen über die Lage des Punktes D gegen A, B, C kann man leicht die Fälle auffinden, in welchen diese dritte directe Lösung der vorliegenden Aufgabe mehr oder weniger Genauigkeit gibt: sie ist nämlich um so ungenauer, je kürzer die Orientirungslinie bi ist; wie

sich aber diese darstellt, mag man an den nachstehenden drei Figuren ersehen, in welchen der Punkt D zweimal ausserhalb und einmal innerhalb des Dreiecks ABC liegt.

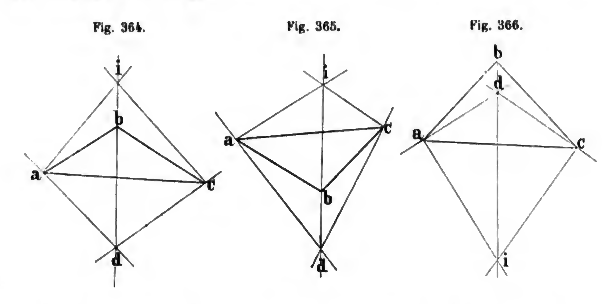
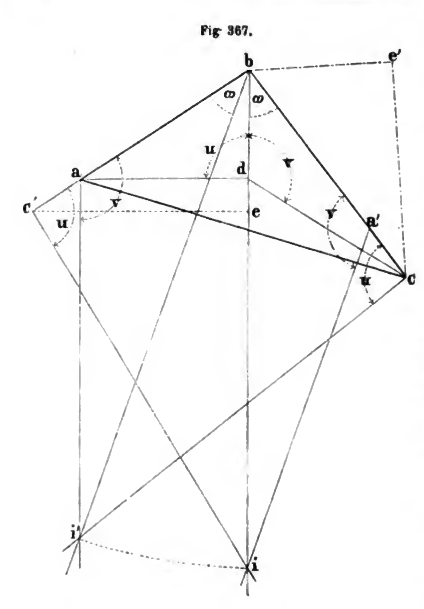


Fig. 364. Fig. 365. Fig. 366.

4) In Schumacher's astronomischen Nachrichten Bd. 3. S. 194 hat Bessel eine directe Lösung der Pothenot'schen Aufgabe mitgetheilt, welche theilweise mit dem Bohnenberger'schen Verfahren übereinstimmt und auf der nachfolgenden Betrachtung beruht. Gelten nämlich die bisherigen Bezeichnungen noch ferner und denkt man sich den Punkt d bereits gefunden, so werden u und v die Winkel seyn, unter denen in D die Seiten AB und BC erscheinen. Macht man in der Fig. 367 die Linie bc' = bc und zieht c'e parallel zu ad bis sie von der verlängerten bd geschnitten wird; legt man hierauf das Dreieck bec' so an bc, dass c' auf c und e nach e' kommt; und trägt man endlich den Winkel v in a an die Seite ab und u in c an die Seite bc; so entstehen zwei Vierecke bdce' und bai'c, welche einander ähnlich sind, weil sie gleiche Winkel haben und bd:be' = ba:bc ist. Zieht man in dem Vierecke bai'c die Diagonale bi', so ist der Winkel dbc = abi' = ω; man kann also durch die Diagonale bi', welche lediglich aus den Winkeln u und v hervorgeht, den Winkel ω bestimmen, der seinerseits, wenn er an bc getragen wird, die Richtung be angibt, in welcher der gesuchte Punkt d liegen muss und die zugleich zur Orientirung des Dreiecks abc dient; denn legt man die Kippregel an be an und dreht die Tischplatte bis das Fernrohr auf B einsteht, so sind die Seiten des Dreiecks abc den Seiten des Dreiecks ABC parallel, und zieht man dann noch die Visirlinien aA und cC, so ergibt sich der Punkt d, welcher einem Standpunkte D entspricht, der sich lothrecht unter ihm befindet. Will man sich die Mühe ersparen, den Winkel ω von ab nach bc überzutragen, so kann man dem Viereck bai'c sofort die Lage bc'ia' geben, in welcher dessen Diagonale bi mit der Orientirungslinie bde zusammenfällt; man braucht zu dem Ende nur ba' = ba, bc'i = u und ba'i = v zu machen. Es versteht sich von selbst, dass man die Winkel u und v unmittelbar bei ihrer

Fig. 367.



Aufnahme an die Punkte c′ und a′ der Seiten c′b und a′b anträgt, indem man zuerst die Seite ba in die Richtung DA bringt und von c′ nach B visirt, und hierauf bc in die Richtung DC dreht und von a′ aus wieder auf B einstellt. Hinsichtlich der Genauigkeit der Bestimmung des Punktes d und der Orientirung des Messtisches gelten dieselben Bemerkungen, welche auf S. 510 über das Bohnenberger'sche Verfahren gemacht wurden.

γ Indirecte Auflösungen der Pothenot'schen Aufgabe.

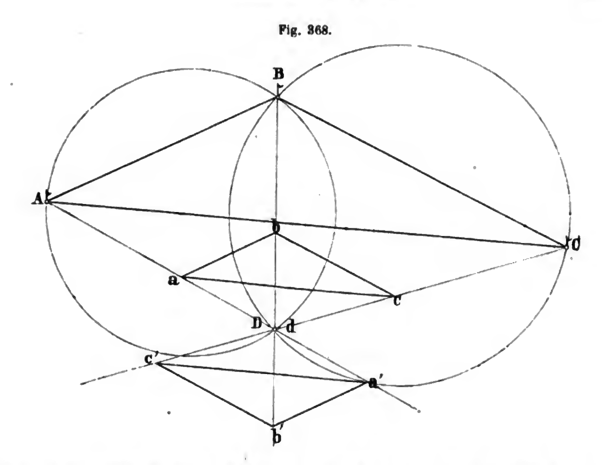
1) Die vorausgehenden Betrachtungen über die Lage des Standpunktes D, d, gegen die Dreieckpunkte A, a, B, b, C, c haben die nachstehend weiter entwickelten Sätze bereits vorbereitet; nämlich:

a) wenn der Messtisch für das Dreieck abc orientirt oder so gerichtet ist, dass ab mit AB, ac mit AC und bc mit BC parallel läuft, so schneiden sich die rückwärts gezogenen Visirlinien Aa, Bb, Cc in einem einzigen Punkte d; und

b) wenn der Messtisch nicht orientirt oder das Dreieck abc gegen ABC so gestellt ist, dass die gleichnamigen Seiten beider Dreiecke nicht parallel laufen, und wenn auch der Punkt D nicht auf dem Kreise ABC liegt: so schneiden sich die Visirlinien Aa, Bb, Cc in drei Punkten und bilden hierdurch das „fehlerzeigende Dreieck.“

Zu a. Legt man die nach Nr. 1 S. 507 construirte Figur abcd auf die ihr ähnliche ABCD so, dass der Punkt d auf D, der Winkel adb = u auf ADB und Winkel bdc = v auf BDC fällt: so ist offenbar ab parallel AB, ac parallel AC, bc parallel BC, weil der Construction gemäss Δabd $\backsim$ ΔABD, Δacd $\backsim$ ΔACD, Δbdc $\backsim$ ΔBDC. Umgekehrt werden sich also die Linien Aa, Bb, Cc in einem Punkte d schneiden, wenn der Parallelismus der gleichnamigen Dreiecksseiten vorausgesetzt

Fig. 368.



wird; und dieses ist auch dann noch der Fall, wenn das Dreieck abc die Lage a'b'c' hat, also um 180⁰ falsch orientirt ist. Aus dem gemeinsamen Schnitt der drei Linien Aa, Bb, Cc würde demnach noch nicht mit Sicherheit die richtige Lage des Dreiecks abc folgen, wenn die zweite um 180⁰ fehlerhafte Stellung auf dem Felde nicht sofort zu erkennen und zu beseitigen wäre. Eine Unsicherheit kann somit nur in dem Falle eintreten, wo D auf dem Kreise ABC, also d auf dem Kreise abc liegt. Ob aber dieser Fall gegeben ist, erkennt man leicht aus der ersten Bestimmung von d: denn legt man durch a, b, c einen Kreis und er geht durch d, so liegt auch D auf dem Kreise ABC, und es ist unter diesen Umständen die indirecte Lösung der Aufgabe durch Rückwärtseinschneiden ebenso unmöglich als die directe. Selbst wenn d nur nahezu auf dem Kreise abc liegt, ist es gut, sich eine Controle über die Bestimmung von d dadurch zu verschaffen, dass man das Bild d' eines anderen Standortes D', welcher sicher vom Kreise ABC entfernt liegt, aufsucht und dessen Lage gegen d mit der von D' gegen D vergleicht.

Zu b. Der zweite Satz ist eigentlich eine Folge des ersten; denn wenn sich die Visirlinien — den unbestimmbaren Fall, wo D auf dem Kreise ABC liegt, ausgenommen — nur dann in einem Punkte schneiden können, wenn die gleichnamigen Seiten der Dreiecke abc und ABC einander parallel laufen, so müssen sie sich in jedem anderen Falle in drei Punkten schneiden und dadurch ein Dreieck bilden, welches die unrichtige Lage des Dreiecks abc zu erkennen gibt.

Um das fehlerzeigende Dreieck nach den Regeln von Lehmann zur

richtigen Aufstellung des Messtisches über einem gegebenen Standpunkte benützen zu können, ist es nöthig, sich vorher den nachfolgenden Satz angeeignet zu haben:

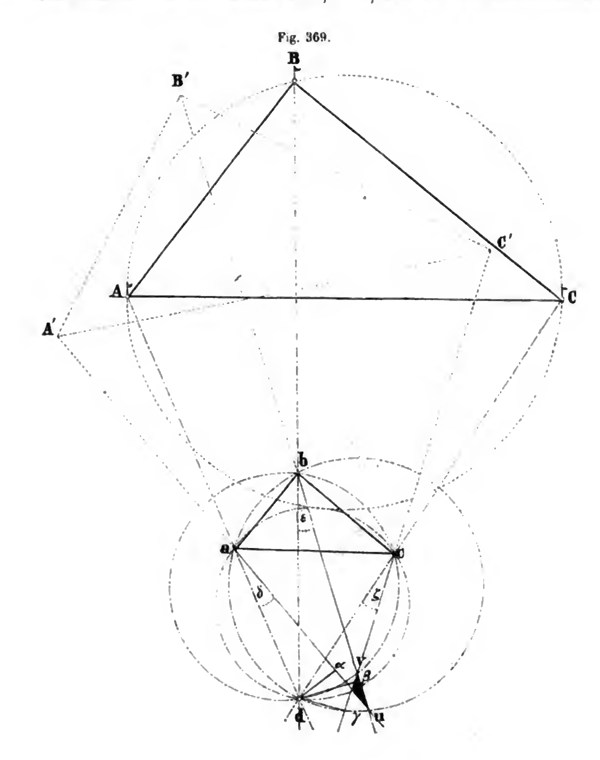
c) Die senkrechten Abstände des Standpunktbildes von den verlängerten Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks verhalten sich wie die Entfernungen des wirklichen Standpunktes von den drei Ecken des Naturdreiecks.

Mit Bezug auf Fig. 369 heisst dieser Satz:

Die von dem Punkte d auf die durch a, b, c gehenden Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks gefällten Senkrechten $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ verhalten sich zu einander wie die Abstände DA, DB, DC.

Sind nämlich die drei Kreise adb, bdc, adc so über den Seiten ab,

Fig. 369.



bc, ac des Dreiecks abc construirt, dass sie nacheinander in den gegen d hin gelegenen Abschnitten die Peripheriewinkel u, v, u + v = w fassen: so ist klar, dass sich die durch a und b gehenden Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks auf dem Kreise adb, die zu b und c gehörigen Seiten auf dem Kreise bdc, und die durch a und c gelegten auf dem Kreise adc schneiden und somit die Eckpunkte uvw des fehlerzeigenden Dreiecks auf diesen drei Kreisen liegen müssen. Auf dem Bogen du des Kreises adb stehen die Peripheriewinkel δ und ε: sie sind folglich einander gleich; ε steht aber auch mit ζ auf dem Bogen dv des Kreises bdc: folglich ist auch $\varepsilon = \zeta = \delta$. Nun ist

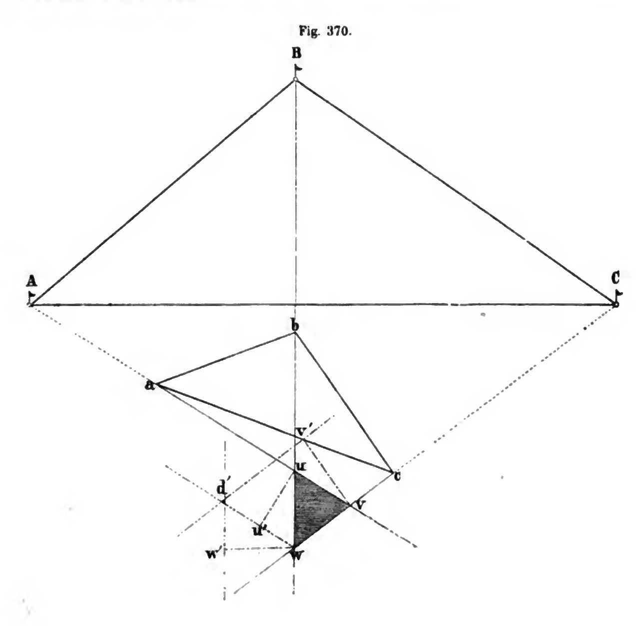
$$\sin\delta = \frac{d\alpha}{da},\ \sin\varepsilon = \frac{d\beta}{db},\ \sin\zeta = \frac{d\gamma}{dc},$$

folglich auch $d\alpha : d\beta : d\gamma = da : db : dc$, und da wegen der Aehnlichkeit der Vierecke dabc und DABC die Proportion stattfindet: $da : db : dc = DA : DB : DC$, schliesslich:

$$d\alpha : d\beta : d\gamma = DA : DB : DC, \quad \ldots\ldots \quad (301)$$

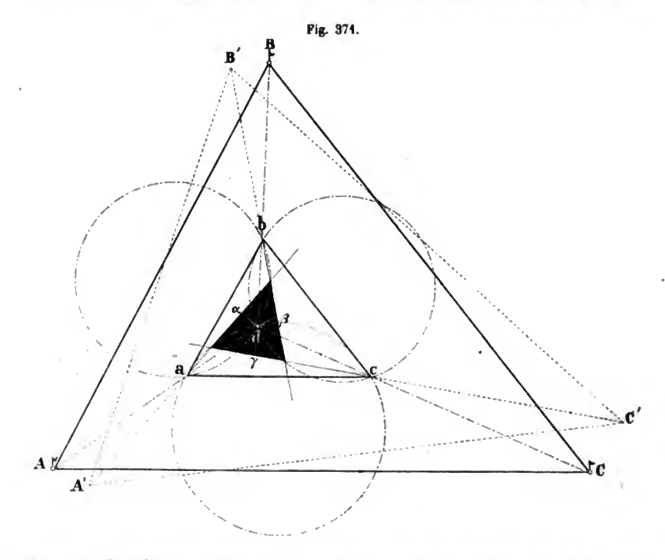
was zu beweisen war.

Fig. 370.



Kennt man nun das Verhältniss der Abstände des Standpunktes D von den Eckpunkten des Dreiecks ABC durch Schätzung nach dem Augenmasse, so kann man auch die beiläufige Lage des Punktes d finden, indem man nach Fig. 370 auf den Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks Senkrechte errichtet, deren Längen uu', ww', vv' sich wie DA : DB : DC verhalten, und indem man weiter durch deren Köpfe u' v' w' Parallelen zu den durch a, b, c gehenden Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks zieht, bis sie sich bei d' schneiden. Dieser Schnitt ist entweder ein Punkt, oder wie in der Figur ein sehr kleines Dreieckchen, das man selbst als einen Punkt ansehen kann. Mit Hilfe dieses Punktes d' orientirt man den Messtisch aufs Neue, indem man die Kippregel an eine der Geraden d'a, d'b oder d'c anlegt und die Tischplatte horizontal so weit dreht, bis beziehungsweise A, B oder C vom Fadenkreuze des Fernrohrs gedeckt wird. Findet diese Deckung in Bezug auf den Punkt A statt, so lege man weiter noch die Kippregel an b und c und visire nach B und C: schneiden sich die rückwärts ver-

Fig. 371.



längerten Visirlinien wieder nicht in einem einzigen Punkte, so wird das zweite fehlerzeigende Dreieck, welches nun entsteht, viel kleiner als das vorige seyn, und eine Wiederholung des eben beschriebenen Verfahrens wird den gesuchten Punkt d liefern.

Auf welcher Seite des fehlerzeigenden Dreiecks der Punkt d zu suchen ist, kann man beurtheilen, wenn man in Gedanken die Stelle aufsucht, in welcher sich die zu a b, b c, a c gehörigen Bestimmungskreise schneiden würden, wenn man sie zöge; Lehmann hat aber auch besondere Sätze aufgestellt, welche die Auffindung des Punktes d erleichtern. Der erste dieser Sätze heisst:

d) Je nachdem der Standpunkt ausser- oder innerhalb des gegebenen Naturdreiecks liegt, befindet sich auch das Bild des Standpunktes ausser- oder innerhalb des fehlerzeigenden Dreiecks.

Der zweite Satz erfordert, um sich kurz aussprechen zu lassen, vorher noch einige Erklärungen. Denkt man sich nämlich den Grundkreis A B C gezogen, so kann der Standpunkt D folgende Lagen haben:

Nr. 1: innerhalb des Dreiecks A B C und des Grundkreises;

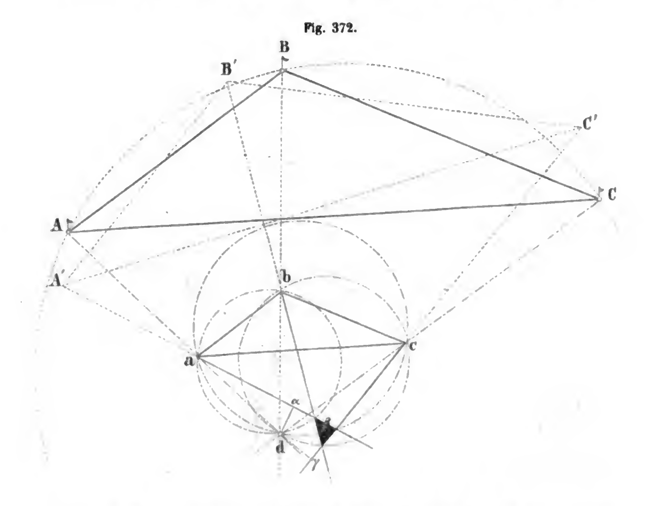
Nr. 2: ausserhalb A B C, aber innerhalb des Grundkreises;

Nr. 3: ausser dem Kreise in einem Scheitelwinkel von A B C;

Nr. 4: ausser dem Kreise, einer Dreiecksseite gegenüber;

Nr. 5: auf einer Dreiecksseite oder auf dem Grundkreise selbst.

Fig. 372.



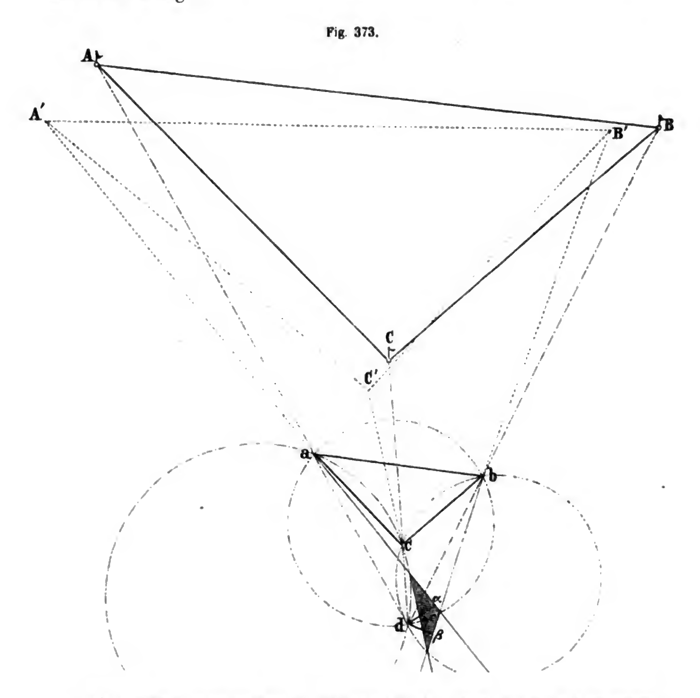
Die mit Nr. 5 bezeichneten Lagen kommen jedoch hier nicht in Betracht, weil die eine kein fehlerzeigendes Dreieck und die andere gar keine Lösung gibt.

Versteht man unter der mittleren Visirlinie diejenige verlängerte

Seite des fehlerzeigenden Dreiecks, welche vom Standpunkte des Beobachters aus zwischen den äusseren Punkten des Bilddreiecks liegt, so kann man den zweiten Satz über die Lage des Standpunktes gegen das Fehlerdreieck so fassen:

e) Das Bild des Standpunktes und das fehlerzeigende Dreieck werden durch die mittlere Visirlinie getrennt, wenn der wirkliche Standpunkt die Lagen Nr. 2 oder Nr. 3 hat; dagegen befinden sich Bild und Fehlerdreieck auf einer und derselben Seite der mittleren Visirlinie, wenn der Standpunkt wie in Nr. 4 liegt.

Fig. 373.

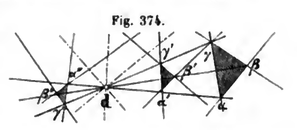


Wegen der untergeordneten Wichtigkeit der Sätze d und e übergehen wir ihre ziemlich umfangreichen Beweise, fügen aber zur Erläuterung derselben bei, dass in Fig. 371 der Standpunkt die Lage Nr. 1, in Fig. 372 die Lage Nr. 2, in Fig. 369 die Lage Nr. 4 und in Fig. 373 die Lage Nr. 3

hat, während in den drei ersten Figuren $b\beta$ und in Fig. 373 C'c die mittlere Visirlinie vorstellt.

2) Ein von Bohnenberger herrührendes Verfahren, das Bild d aus zwei fehlerzeigenden Dreiecken zu finden, besteht darin, dass man, nachdem ein solches Dreieck ($\alpha\beta\gamma$, Fig. 374) vorhanden ist, den Tisch durch eine kleine Drehung etwas besser orientirt als vorher, und ein zweites Fehlerdreieck ($\alpha'\beta'\gamma'$) bestimmt, welches eine ähnliche Lage hat wie das erste und durch Verbindung der auf gleichen Bestimmungskreisen liegenden Punkte α, α', β, β', γ, γ' einen Schnittpunkt gibt, der den gesuchten Punkt so genau finden lässt, dass eine weitere Verbesserung desselben nicht mehr nöthig ist. Der Schnittpunkt wird nämlich um so weniger von dem gesuchten Bildpunkte d abweichen, je näher die Hilfslinien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ mit den Bestimmungskreisen des Standpunktbildes zusammenfallen, und dieses ist um so mehr der Fall, je kleiner die fehlerzeigenden Dreiecke sind. Sollte das zweite fehlerzeigende Dreieck die entgegengesetzte Lage ($\alpha''\ \beta''\ \gamma''$) des ersten ($\alpha\beta\gamma$) erhalten, so wäre dieses ein Zeichen, dass man bei der Verbesserung der Orientirung das Messtischblatt zu weit gedreht hat; gleichwohl können aber auch diese zwei Dreiecke zur annähernden Bestimmung von d führen, indem man α mit a'' und γ mit γ'' verbindet und die Linien $\alpha\alpha''$ $\gamma\gamma''$ so weit verlängert, bis sie sich in d schneiden.

Fig. 374.



3) Eine von Netto herrührende Lösung der Pothenot'schen Aufgabe hat grosse Aehnlichkeit mit der von Bohnenberger, in so ferne sie auch auf der Benützung zweier fehlerzeigender Dreiecke beruht. Hat man nämlich aus zwei Orientirungen des Messtisches zwei solche Dreiecke erhalten, welche eine entgegengesetzte Lage haben, also auf zwei verschiedenen Seiten der mittleren Visirlinie liegen, wie in Fig. 375, so verbinde man die mittleren Eckpunkte γ, γ'' der Fehlerdreiecke und suche auf der Verbindungslinie $\gamma\gamma''$ den Punkt δ, welcher diese Linie nach dem Verhältnisse $\gamma\varepsilon : \gamma''\varepsilon''$ in zwei Theile $\gamma\delta$ und $\gamma''\delta$ theilt; hierauf lege man die Kippregel an δ und b, orientire den Tisch nach B und ziehe die Visirlinien a A und c C, welche den auf der mittleren Visirlinie δb liegenden gesuchten Punkt d geben. Eine Visirlinie a A oder c C würde zwar auch hinreichen, d zu erhalten; man zieht aber der Controle wegen alle beide. Den Beweis für dieses Verfahren mag der Leser selbst führen.

4) Bei den Messungsübungen der Studirenden der Münchener Ingenieurschule wird ausser den vorhergehenden Verfahren auch das folgende, welches wohl das einfachste von allen ist, angewendet.

Man stellt nämlich den Messtisch über dem Punkt D horizontal auf, breitet über die Tischplatte ein hinreichend grosses Stück Bauspapier aus, misst und zeichnet darauf die Winkel u, v (Fig. 376), unter welchen man

Fig. 375.

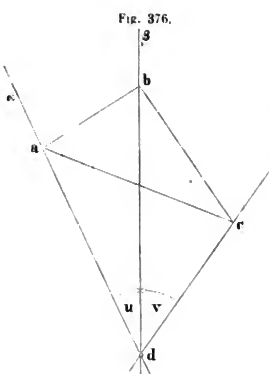


Fig. 376.

die Dreiecksseiten A B, B C von d aus erblickt, zieht die Winkelschenkel d α, d β, d γ so lang und so fein als möglich, und schiebt hierauf das Bauspapier so lange auf dem Messtischblatte hin und her, bis gleichzeitig die Winkelschenkel dα, dβ durch die Endpunkte a, b der Seite a b und die Schenkel d β, d γ durch die Endpunkte b, c der Seite b c des Bilddreiecks a b c gehen: der Scheitel d der beiden Winkel u, v gibt alsdann die Lage des Punktes d gegen a b c an und es ist folglich der erste Theil der Aufgabe gelöst. Will man weiter noch das Messtischblatt orientiren, so braucht man nur die Kippregel an eine der drei

Seiten da, db, dc zu legen und beziehungsweise auf A, B, C durch Drehung des Messtischblattes einzustellen, womit auch diese zweite Forderung erfüllt ist. Der Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens fällt mit dem für das directe Verfahren Nr. 1, dem dieses indirecte nachgebildet ist, zusammen; die Einfachheit desselben leuchtet von selbst ein, und seine Genauigkeit lässt Nichts zu wünschen übrig.

§. 294. Erklärungen und practische Bemerkungen, welche sich auf die Aufnahme eines Verbandes von Grundstücken oder einer Flurmarkung beziehen.

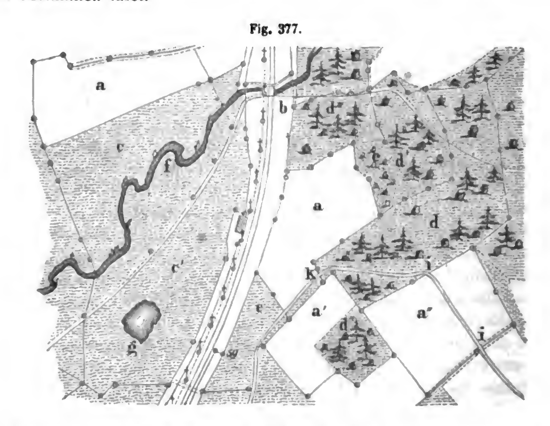
Der Hauptgrundsatz, welcher bei der Aufnahme einer grösseren Bodenfläche zu befolgen ist, nämlich: vom Grossen in's Kleine zu arbeiten, wurde bereits in der Einleitung zu diesem Capitel ausgesprochen, und es ist darunter das Festlegen einer Reihe von Hauptpunkten, an die sich das Aufnehmen der Einzelnheiten des Terrains anschliesst, zu verstehen. Diese Einzelnheiten nennt man, wenn sie für sich begrenzt sind, Parzellen und unterscheidet sie nach ihrer staats-, land- oder forstwirthschaftlichen Benützung. So heissen dieselben Bau-, Weg-, Fluss-, Teich-, Feld-, Wiesen-, Hut-, Wald-Parzellen, wenn sie der Reihe nach ein Gebäude mit Hofraum, ein Stück Strasse oder Fluss, einen Teich, ein Feld, eine Wiese, eine Viehweide oder einen Wald umfassen. Besteht das Feld, die Wiese oder der Wald aus mehreren Theilen, welche für sich begrenzt sind oder verschiedenen Besitzern gehören, so bildet jeder Theil eine besondere Parzelle. Steinbrüche, Lehm-, Thon- und Sandgruben, Sümpfe, Torfmoore u. dgl., bilden ebenfalls besondere Parzellen. Die Raine, welche sich sehr häufig zwischen Feldern hinziehen, sind keine besonderen Parzellen, sondern werden zu den Feldern gerechnet, welchen sie angehören. Gehört ein Rain zweien Besitzern zugleich, so wird zu jedem Felde die Hälfte oder ein durch die Eigenthumsverhältnisse bestimmter Theil gerechnet. Fig. 377 stellt einen Verband von mehreren Parzellen vor: a, a sind Feldparzellen, b ist eine Bahnparzelle, c, c sind Wiesen-, d, d Waldparzellen, e ist eine zu d' gehörige Hutparzelle, f eine Flussparzelle, g ist eine zu c' gehörige Teichparzelle; die Waldparzelle d'' gehört zur Feldparzelle a', die Wegparzelle i, i zum Felde a'' u. s. w.

Wenn es sich bei der Aufnahme einer Flurmarkung um Besitzverhältnisse handelt, so müssen alle Parzellen genau dargestellt werden; will man aber bloss ein Bild der natürlichen und künstlichen Bildungen des Bodens, so kann man mehrere an einander stossende Felder als eine Parzelle behandeln, ebenso mehrere Wiesen- und Waldtheile als eine einzige Wiesen- und beziehungsweise Waldparzelle. Die Grenzen der aufzunehmenden Parzellen sind entweder durch Marksteine, Raine, Hecken, Zäune, Mauern, Einfriedigungen etc. gegeben, oder sie werden dem Geometer durch eine orts- und sachkundige Person vorgezeigt, von der er zugleich die Namen der Besitzer erfragen kann.

Von diesem Vorzeiger begleitet vollzieht der Geometer oder dessen

Gehilfe die Abpflockung der einzelnen Parzellengrenzen, wobei die auf Seite 105 beschriebenen Markpflöcke zur Anwendung kommen. Diese Pflöcke sind in solchen Entfernungen in den Boden zu stecken, dass die geraden Verbindungslinien zwischen je zwei aufeinander folgenden genau genug mit den Parzellengrenzen zusammenfallen. Ein practischer Blick wird entscheiden, was in gegebenen Fällen unter „genau genug" zu verstehen ist: bei guten Gärten, Feldern und Wiesen bedeutet es offenbar etwas Anderes als bei Viehweiden, Torfmooren u. dgl. Gebäude werden in der Regel nur mit zwei Pflöcken an der Langseite bezeichnet, weil sich mit Hilfe der dadurch bestimmten Geraden der Grundriss dieser Parzellen leicht bestimmen lässt.

Fig. 377.

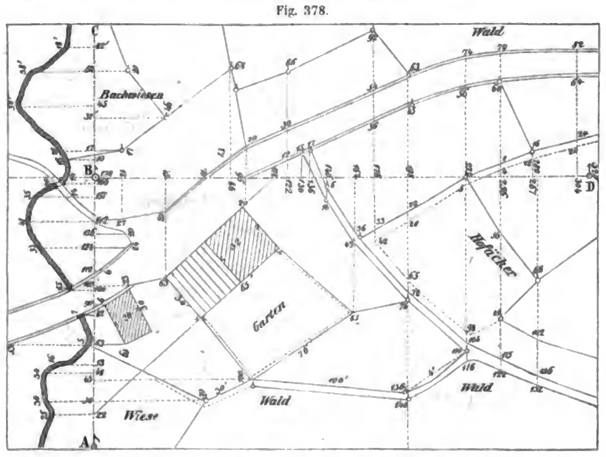


Während des Abpflockens der Parzellen fertigt der Geometer einen Handriss der ganzen Flurmarkung mit allen davon aufzunehmenden Parzellen an. Dieser Handriss wird so naturgetreu gemacht, als es das Augenmass zulässt, und man schreibt in denselben alle Pflocknummern, Culturgattungen, Eigenthümer etc. ein; Brücken, Stege, Wehre, Baumgruppen, Gebäude, Signale u. s. w. werden so bezeichnet, wie es bei Situationszeichnungen gebräuchlich und aus Fig. 378, welche ein Stück eines Handrisses vorstellt, theilweise zu ersehen ist. Ein solcher Riss erleichtert die Aufnahme ausserordentlich, wesshalb er niemals wegzulassen und in möglichst grossem Massstabe mit Sorgfalt anzufertigen ist. Derselbe liefert auch in Verbindung mit der bei seiner Aufnahme erworbenen Terrainkenntniss das besste Mittel zur Bestimmung des Polygons, an das sich die Detailmessung anzuschliessen hat und welches nebst den Bindelinien, die man allenfalls von einem Eckpunkte zu einem anderen legen will (z. B. AFC in Fig. 350

S. 496), in den Handriss eingezeichnet wird. Wie das Polygon selbst zu legen ist, hängt zum Theil von den anzuwendenden Aufnahmsmethoden, grösstentheils aber von der Beschaffenheit des Bodens ab: ob derselbe nämlich eine freie Aussicht gewährt oder nicht, fest oder sumpfig ist u. s. w.

Zur Aufnahme des Details eines Flurbezirks wird in Deutschland vorzugsweise der Messtisch angewendet; in manchen Ländern ist derselbe aber kaum bekannt, wie z. B. in England, wo alle geometrischen Aufnahmen ohne ihn gemacht werden. Es lässt sich nicht läugnen, dass der Messtisch, namentlich in Verbindung mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser, ein bequemes und rasches Arbeiten gestattet und für Alle, welche

Fig. 378.



auch die geringste Rechnung scheuen, ein vortrefflicher Aufnahmsapparat ist. Dagegen muss der Detailmessung mit dem Theodolithen, wenn sie auch mehr Umsicht und Arbeit fordert, der Vorzug grösserer Genauigkeit zuerkannt werden. Da übrigens jede Methode ihre Licht- und Schattenseiten hat und beide recht gut neben einander bestehen können, so lassen wir, ohne eine als die unbedingt bessere hinstellen zu wollen, lediglich noch einige Bemerkungen zu beiden folgen.

Ist für die Aufnahme des Details eine hinreichende Anzahl von Abscissenaxen bestimmt, so werden auf denselben die Ordinaten abgesteckt und beide gemessen. Die Ergebnisse dieser Messungen schreibt man entweder in den Handriss, wie Fig. 378 zeigt, oder, wenn dieser zu klein seyn sollte, in eine ihm ähnliche grössere Zeichnung, oder endlich in eine Tabelle von nachstehender Form ein. Diese Tabelle bezieht sich auf den eben

erwähnten Handriss und es ist dazu nur zu bemerken, dass sich die linke und rechte Seite der Abscissenlinie durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben A und B, womit sie bezeichnet ist, bestimmen. Denkt man sich nämlich so gestellt, dass man vom Punkte A nach B sieht, so ist die Seite der Abscissenlinie, welche zur Rechten des Beobachters liegt, die rechte und die entgegengesetzte die linke. In die Rubrik „Bemerkungen" stellt man kurze Andeutungen über die Beschaffenheit und die Verbindung der eingemessenen Punkte ein.

Abscissenlinie AB.

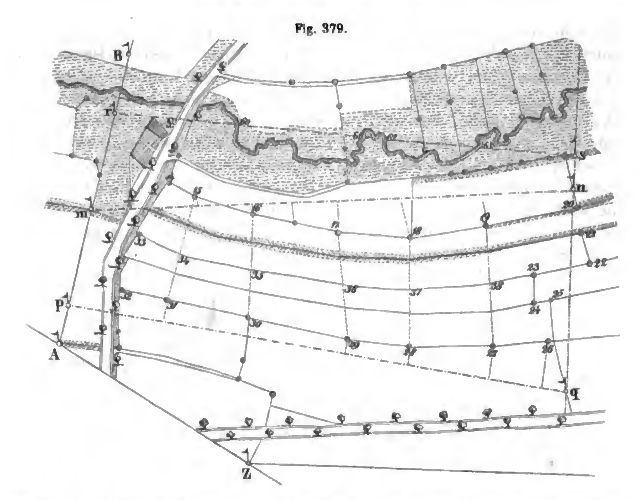
Abscissen.	Ordinaten		Bemerkungen.	
	links.	rechts.		
22′	25′	—	Bach.	—
30	30	70	Bach.	Markstein.
43	—	100	—	Ecke des Gartens.
48	30	—	Bach.	—
53	16	—	Bach.	—
63	5	19	Bach.	Gebäude.
	53		Strasse.	
82	7	—	Ob. Brückenkopf.	—
90	—	6	—	Gebäude.
100	15	—	Unt. Brückenkopf.	—
102	—	23	—	Strasse.
112	—	6	—	Strasse.
128	33	24	Bach.	Strasse.
136	—	20	—	Strasse.
142	41	—	Bach.	—
151	14	—	Feldweg.	—
	18			
	35	—	Bach.	—
166	20	—	Steg.	—
170	14	—	Bach.	—

Parzellen, deren Grenzen krumm und nahezu parallel sind, wie die in Fig. 379 zwischen den Linien mn und pq liegenden, werden entweder durch Vorwärtsabschneiden, oder mit dem Distanzmesser, oder dadurch aufgenommen, dass man die äusseren Grenzen (14 bis 20 und 26 bis 32) durch gegebene oder eigens hergestellte Abscissenlinien (mn und pq) mittels Ordinaten bestimmt, die dazwischen liegenden Grenzen aber durch gerade Querlinien oder Traversen

$$\left(\frac{15}{31}, \frac{16}{30}, \frac{17}{29} \text{ etc.}\right),[1]$$

[1] Diese Bezeichnungen bedeuten: vom Punkt 31 nach 15, von 30 nach 16, von 29 nach 17 u. s. w. Sie setzen also auch die Richtung der Linien fest.

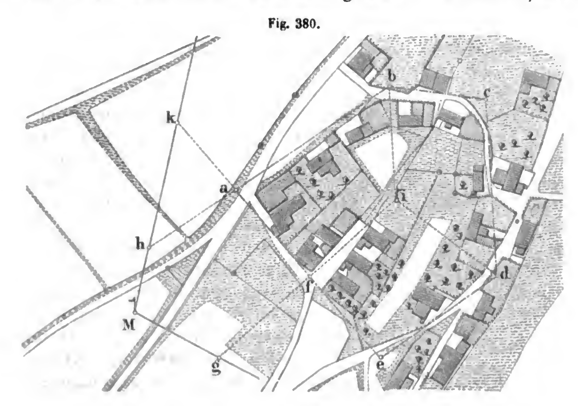
Fig. 379.



welche die vorher bestimmten Punkte der äusseren Grenzen verbinden, schneidet und die Schnittpunkte von den Endpunkten der Querlinien aus einmisst. Diese Querlinien sollen die Feldfurchen so viel als möglich senkrecht schneiden.

Bei der Aufnahme mit dem Messtische gibt man dem Gehilfen, welcher

Fig. 380.



eine Latte oder Fahne auf den anzuvisirenden Punkten aufzustellen und zu halten hat, ein Verzeichniss mit, aus dem er sieht, in welcher Reihenfolge die Punkte anvisirt werden sollen. Damit sich der Geometer überzeugt, dass der Gehilfe keinen Punkt übersehen hat, muss dieser bei jedem fünften oder zehnten Pflocke ein bestimmtes Zeichen geben, welches der Messende erwiedert, wenn es mit seinen Aufschreibungen übereinstimmt; ausserdem ist sofort nachzusehen, wo gefehlt wurde, und der Fehler zu verbessern. Auch von dem richtigen Stande des Messtisches muss sich der Geometer von Zeit zu Zeit Gewissheit verschaffen, was dadurch geschieht, dass er die Linealkante der Kippregel an die Orientirungslinie legt und zusieht, ob das betreffende Signal von dem Fadenkreuze gedeckt wird. Sollte sich eine Abweichung ergeben, so ist nicht nur der Tisch zu berichtigen, sondern auch jeder Pfahl nochmals anzuvisiren, welcher seit der letzten Versicherung aufgenommen wurde.

Fig. 381.

Ist die Uebersicht eines Flurtheiles durch Häuser oder Bäume sehr erschwert, so geht man vor Allem darauf aus, diesen Theil mit einem kleineren Vielecke zu umziehen, das mit dem Hauptpolygon fest verknüpft ist, und benützt die Seiten dieses kleineren Vielecks als Abscissenlinien bei der weiteren Aufnahme der Coordinaten. In Fig. 380 stellt a b c d e f ein solches Hilfspolygon vor, welches mit dem bei M vorüberziehenden Hauptpolygon in Verbindung steht. Gestattet das Terrain, einen Punkt i im Innern des Vielecks zwei- oder dreimal anzuschneiden, so wird man dieses nicht unterlassen, um daselbst einen neuen gut bestimmten Standpunkt für den Messtisch oder Theodolithen zu gewinnen. Besitzt man einen Distanzmesser, so lassen sich von i aus eine grosse Anzahl Punkte mit geringer Mühe erhalten.

Der Geometer muss während der Aufnahme eines Flurbezirks stets darauf bedacht seyn, sich eine Controle seiner Arbeit zu verschaffen, und nach dem Schlusse derselben hat er noch eine besondere Prüfung (Revision) der graphisch dargestellten Messungsergebnisse

auf dem Felde vorzunehmen. Hiebei kann er entweder Probemessungen oder Probeschnitte, oder beide Prüfungsmethoden zugleich anwenden. Wählt er nämlich aus dem gezeichneten Plane zwei beliebige Punkte aus und misst deren Entfernung im Bilde und auf dem Felde, so bedient er sich der Probemessung: bringt er aber einen Punkt des Messtisches über einen gleichnamigen Punkt des Feldes und visirt er, nach gehöriger Orientirung des Blattes, beliebige Punkte an, um zu sehen, ob sie mit ihren Bildern in einerlei Visirebenen liegen, so wendet er den Probeschnitt an. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass diese letztere Prüfungsmethode ebenso wie erstere auch für die Aufnahme mit dem Theodolithen ihre Anwendung findet, und dass in diesem Falle die Horizontalwinkel von einer bestimmten, im Plane und auf dem Felde festgelegten geraden Linie aus gezählt werden müssen. Mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser kann man den Probeschnitt und die Probemessung gleichzeitig ausführen, wesshalb er zur Revision der Aufnahme besonders geeignet ist.

Probemessungen macht man selbstverständlich nicht bloss zwischen je zwei, sondern sogleich zwischen mehreren Punkten, welche einer viele Grenzen durchschneidenden Diagonale angehören. Diese Diagonale wird auf dem Felde abgesteckt und auf dem Plane ausgezogen: hier misst man die Abscissen der Durchschnittspunkte mit dem verjüngten Massstabe, dort aber mit der Kette oder dem Distanzmesser und schreibt die Ergebnisse an der Revisionslinie nebeneinander, wie Fig. 381 zeigt. Von den Differenzen beider Messungen hängt es ab, ob die Aufnahme als gut anzuerkennen, oder als ungenügend zu verwerfen, oder theilweise zu verbessern ist.

2. Der Flächeninhalt einzelner und verbundener Grundstücke.

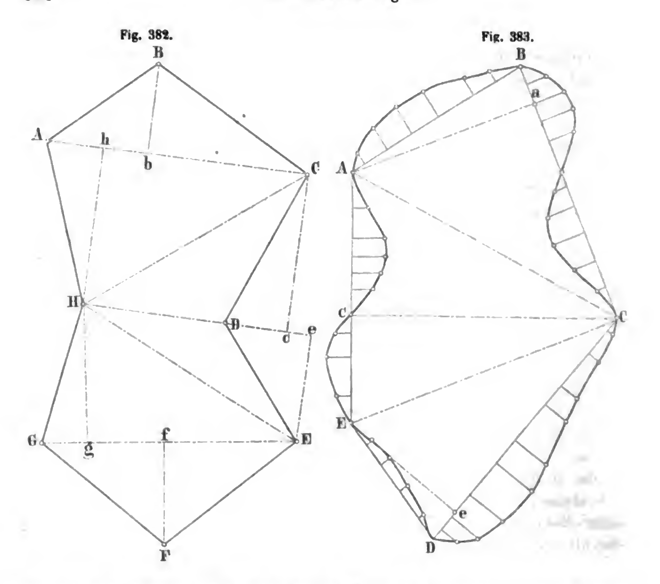
Methoden der Flächenbestimmung.

§. 295. **Kettenmass.** Der Flächeninhalt eines Grundstücks oder eines Verbandes von Parzellen kann entweder aus den auf dem Felde gemessenen Stücken, oder aus den auf dem Plane abgegriffenen Dimensionen, oder endlich auf mechanischem Wege durch ein Planimeter (Flächenmessinstrument) bestimmt werden.

Die Bestimmung des Flächeninhalts aus dem Kettenmasse besteht darin, dass man das auszumessende und im Allgemeinen als Vieleck sich darstellende Grundstück in Dreiecke zerlegt und in jedem derselben Grundlinie und Höhe misst, wobei der Fusspunkt der letzteren durch das Prismenkreuz oder den Winkelspiegel bestimmt wird (Fig. 382).

Ist das Grundstück von vielen kleinen Seiten oder krummen Linien begrenzt, so legt man in oder um dasselbe ein Vieleck, misst und berechnet zuerst dieses, und fügt alsdann die aus Abscissen und Ordinaten bestimmten Flächeninhalte der an dem Vieleck liegenden Abschnitte der Figur als positive oder negative Grössen hinzu (Fig. 383).

Man sieht diese Flächenbestimmungen als hinreichend genau an, wenn



sie mit einer zweiten nach einer andern Zerlegung vorgenommenen Messung und Berechnung bis auf $^1/_{200}$ oder $^1/_{300}$ des gefundenen Inhalts übereinstimmen. Hat man viele zusammenhängende Parzellen zu messen, so ist eine Controle der Messung dadurch gegeben, dass man den ganzen Verband durch ein Vieleck einschliesst, den Gesammtinhalt wie vorhin mit Bezug auf Fig. 382 bestimmt, und schliesslich diesen Inhalt mit der Summe aller Flächengehalte der Parzellen vergleicht: beträgt die Abweichung dieser Summen nur $\pm\ ^1/_2$ oder $\pm\ ^1/_3$ Prozent der einen oder andern, so kann man mit dem Ergebnisse vollständig zufrieden seyn.

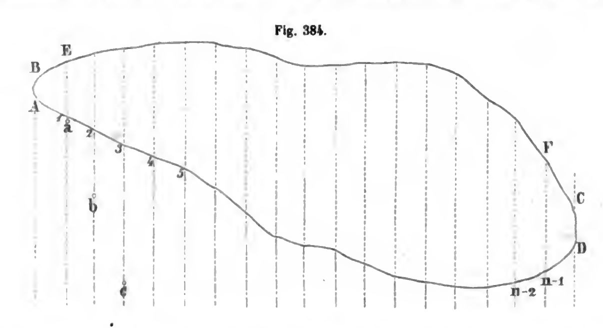
§. 296. **Zirkel und Massstab.** Sind Flächeninhalte aus Zeichnungen durch Zirkel, Massstab und Rechnung zu bestimmen, so ahmt man gewöhnlich das auf dem Felde anzuwendende Verfahren nach, indem man die zu berechnenden Figuren in Dreiecke oder in ein Vieleck und kleine Segmente zerlegt und diese aus den der Zeichnung entnommenen Dimensionen berechnet; krummlinige Figuren zerlegt man indessen zweckmässiger in parallele Streifen von gleicher Breite, weil sich diese als Paralleltrapeze betrachten und schnell berechnen lassen. Denn sind $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ die Längen der $n + 1$ parallelen Seiten, welche n Streifen von der Breite b bilden, so sind die Flächeninhalte der einzelnen Trapeze (Fig. 384):

$\frac{1}{2} b (a_0 + a_1)$, $\frac{1}{2} b (a_1 + a_2)$, $\frac{1}{2} b (a_2 + a_3) \ldots\ldots \frac{1}{2} b (a_{n-1} + a_n)$
und folglich wird ihre Summe oder der Flächeninhalt der ganzen Figur

$$F = b (\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots + a_{n-1} + \tfrac{1}{2} a_n). \quad . \quad . \quad (302)$$

Da in den meisten Fällen a_0 und a_n null seyn werden (Fig. AEFDA), so besteht der zweite Factor des die Fläche darstellenden Products bloss aus

Fig. 384.



der Summe der Ordinaten, welche die Figur theilen; aber auch dann, wenn a_0 und a_n nicht null sind, lässt sich der zu b gehörige Factor leicht mit Zirkel und Massstab bestimmen. Denn setzt man $\frac{1}{2} a_0$ mit dem Zirkel an das untere Ende von a_1 an und öffnet den Zirkel bis zum obern Ende, so ist die Oeffnung $= \frac{1}{2} a_0 + a_1$; setzt man ferner diese Länge an die Ordinate a_2 ($=$ b2) an und öffnet den Zirkel bis zum anderen Endpunkte dieser Ordinate, so erhält man $\frac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2$; in gleicher Weise wird $\frac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ erhalten; und so kann man fortfahren, bis die Zirkelöffnung $= \frac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2 \ldots\ldots + \frac{1}{2} a_n$ ist, worauf sie auf dem Massstabe gemessen und die gefundene Länge mit der Breite b multiplicirt wird.

Flächeninhalte, welche mit Zirkel und Massstab bestimmt werden, sieht man als hinreichend genau gefunden an, wenn die Summe aller Theile von dem unmittelbar gemessenen ganzen Inhalte bei Plänen von 1 : 5000 nicht mehr als $\frac{1}{100}$ und bei 1 : 2500 nicht mehr als $\frac{1}{200}$ abweichen.

§. 297. **Planimeter.** Am schnellsten und sichersten werden gezeichnete Figuren mit den in neuerer Zeit in Aufnahme gekommenen Planimetern gemessen, und zwar mit derjenigen Classe derselben, welche den Flächeninhalt einer ebenen Figur durch blosses Umfahren des Umfangs angibt. Diese merkwürdigen und bereits sehr vervollkommneten Instrumente können hier um so weniger mit Stillschweigen umgangen werden, als zu erwarten steht, dass sie in nicht ferner Zeit auf allen technischen Bureaux, wo viele Flächen zu berechnen sind, eingeführt seyn werden.

Wir werden uns jedoch kurz fassen, indem wir auf folgende zwei Schriften verweisen, welche die beiden im Gebrauch befindlichen Arten von

Planimetern nach ihrer Theorie, Construction und ihrem Gebrauch ausführlich behandeln, nämlich

Bauernfeind: „die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen" etc. München 1853 und

Amsler: „Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts ebener Figuren etc." Schaffhausen 1856.

Das Princip, worauf die allein brauchbare Classe der die Figur umschreibenden Planimeter beruht, wurde, wie der Verfasser in Dingler's polytechnischem Journale Bd. 137, S. 82 nachgewiesen hat, von dem bayerischen Trigonometer J. M. Hermann[1] bereits im Jahr 1814 erfunden und 1817 angewendet, seine Erfindung ist aber, da er sie nicht veröffentlichte, sondern bloss seiner vorgesetzten Stelle vorlegte, nicht gehörig beachtet worden und scheint bereits vergessen gewesen zu seyn, als der schweizerische Ingenieur Oppikofer aus Untereppikon im Jahre 1827 auf dieselbe Idee kam und ein dem Hermann'schen gleiches Instrument construirte. Der Mechaniker Ernst in Paris nahm an dem Oppikofer'schen Planimeter mehrere Veränderungen und zum Theil Verbesserungen vor, so dass die abgeänderten Planimeter in Frankreich nach ihm benannt wurden. Ein wesentliches Verdienst um diese Instrumente gebührt jedoch dem Ingenieur Wetli in Zürich, und mehrere Verbesserungen verdanken wir dem Astronomen Hansen in Gotha.

Die Planimeter von Wetli und Hansen leisten in Bezug auf Genauigkeit und Zeitersparniss fast Unglaubliches; an Einfachheit und Wohlfeilheit werden sie jedoch von dem Polarplanimeter des Professors Amsler[2] in Schaffhausen übertroffen. Indem wir von diesen beiden Arten von Planimetern nach den oben genannten Schriften Zeichnungen und Beschreibungen nebst Theorie und Gebrauchsanweisung mittheilen, finden wir uns zu der Bemerkung veranlasst, dass die völlige Uebereinstimmung der Fig. 385 mit der Fig. 4 Taf. 15 der Messkunde von Barfuss (Weimar 1854) bloss davon herrührt, dass letztere bis auf die Buchstaben eine Copie unserer Zeichnung vom Jahre 1853 ist.

Die Linearplanimeter von Wetli und Hansen.

§. 298. Diese Planimeter sind sich im Wesen gleich, nur einzelne Constructionstheile weichen von einander ab, und beide unterscheiden sich von der ursprünglichen Einrichtung der umschreibenden Planimeter von Hermann im Grunde nur durch eine bessere mechanische Ausführung und die

[1] Geboren am 22. Juli 1785 in Pfronten bei Füssen, 1808 zum Geodäten ernannt und am 25. März 1841 als Trigonometer in München gestorben.

[2] Der Verfasser sah im August 1856 in der Werkstätte des polytechnischen Instituts zu Wien ein mit dem Amsler'schen bis auf eine Kleinigkeit übereinstimmendes Polarplanimeter, welches nach den bereits im Jahre vorher gemachten Angaben des Bergmeisters Schmid in Leoben von Chr. Starke verfertigt war. Sorgfältige Nachforschungen stellten heraus, dass auch hier wieder zwei Personen gleichzeitig eine und dieselbe Idee und Form eines Instruments erfunden haben.

Vertauschung des von Hermann, Oppikofer und Ernst angewendeten drehbaren Kegels mit einer horizontalen Scheibe. In der Einführung dieser Scheibe besteht Wetli's wirkliches Verdienst um die Vervollkommnung der auf rechtwinkelige Coordinaten gegründeten Planimeter, welche wir zunächst betrachten und der Kürze halber (zum Unterschiede von den Polarplanimetern) Linearplanimeter nennen wollen.

Man kann die Idee, welche diesen Instrumenten zu Grunde liegt, kaum besser und einfacher ausdrücken, als dieses ihr Erfinder in den nachfolgenden Worten that:[1]

„Der Flächeninhalt zweier Dreiecke oder Parallelogramme, welche eine und dieselbe Grundlinie haben, steht im geraden Verhältnisse zu ihren Höhen. Denkt man sich nun einen Kreis, dessen Peripherie gleich einer solchen gemeinschaftlichen Grundlinie ist, und diesen Kreis mit etwas Anderem so in Verbindung, dass, wenn man mit dem Letzteren längs dieser Linie hinfährt, er sich gerade einmal um seine Axe dreht, wenn die Höhe der Figur = 1 ist; denkt man sich ferner, dass, wenn die Höhe der Figur = 2 ist, sich der Kreis vermittels seiner Verbindung, während längs der Grundlinie hingefahren wird, zweimal um seine Axe dreht; denkt man sich endlich, dass die Revolutionen des Kreises wie die Zahlen der Höhen zunehmen, und würde die Zahl dieser Revolutionen an irgend Etwas bemerkt werden können: so hätte man mit einem so verbundenen Kreise eine Art mechanischen Flächenmessers. Wollte man nun ohne Zahlenrechnung den Inhalt geometrischer Figuren durch eine Maschine finden, so dürfte bloss die Art aufgesucht werden, wie die Kreisrevolutionen in dem obigen Verhältnisse bewirkt werden könnten, und die Maschine wäre erfunden."

Nach der jetzigen Einrichtung der Linearplanimeter ist der vorgenannte Kreis ein ungezahntes Rädchen, das auf einer horizontalen Scheibe senkrecht steht und um eine mit dieser Scheibe parallele Axe drehbar ist. Die Scheibe selbst dreht sich um eine vertikale Axe und bringt dadurch das auf ihr ruhende Rädchen in Folge der stattfindenden Reibung in Bewegung. Ist der Abstand des Berührungspunktes des Rädchens vom Mittelpunkte der Scheibe gleich dem Halbmesser des Rädchens, so wird dieses eine ganze Umdrehung machen, wenn die Scheibe eine macht, und eine halbe, wenn diese sich nur zur Hälfte dreht; allgemein wird sich das Rädchen so vielmal mehr drehen als die Scheibe, als sein Halbmesser in dem Abstande seines Berührungspunktes vom Mittelpunkte der Scheibe enthalten ist. Die Verschiedenheit dieses Abstandes erfordert eine Bewegung der Scheibe längs der unverrückbar gedachten Drehaxe des Rädchens, oder längs der mit ihr parallelen Höhe des zu messenden Rechtecks; die Drehung der Scheibe muss dagegen durch die Abwickelung eines um ihre Welle geschlungenen Fadens geschehen, welcher der Grundlinie jenes Rechtecks parallel ist. Schliesslich ist an dem Apparate noch eine Vorrichtung anzubringen, durch

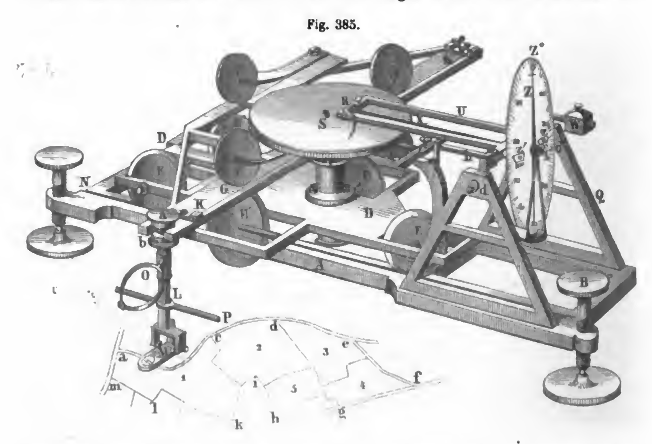
[1] Siehe des Verfassers Aufsatz »zur Geschichte der Planimeter« in Dingler's polytechnischem Journale, Bd. 137, H. 2.

welche die Drehungen des Rädchens gezählt werden können. Nach dieser Vorbereitung wird man den Zusammenhang der in der nachfolgenden Abbildung und Beschreibung näher bezeichneten Theile des Hansen'schen Planimeters leicht begreifen.

§. 299. **Beschreibung.** Das Instrument erfordert zwei auf einander senkrechte (den Axen parallele) Grundbewegungen: die eine geschieht durch den unteren Schlitten nach der Langseite des Messingrahmens A, welcher mit den Stellschrauben B das Fussgestelle bildet; die andere aber durch den oberen Schlitten G, auf dem ein Silberdraht ausgespannt ist, der sich um die Trommel T der Scheibe S schlingt. [1]

An dem Schlitten G befindet sich der Führer L, welcher zum Umschreiben der auszumessenden Figur dient. Der Fahrstift des Wetli'schen Planimeters ist hier durch ein Glas M mit einer kreisförmigen Marke ersetzt, welche auf dem Umfange fortgeführt wird. Damit dieses genauer als mit dem Stifte geschehen könne, ist über M eine Lupe O angebracht, welche Marke und Umfang vergrössert. Die Drehungen des auf der Scheibe S stehenden Rädchens R werden durch den Zeiger Z auf dem Zifferblatte Z^0

Fig. 385.



gemessen, und dieses ruht auf den mit dem Fussgestelle festverbundenen Trägern Q, Q. Die Eintheilung des Zifferblattes, welches in neuerer Zeit auf der Langseite des Gestelles angebracht wird, kann den zu wählenden Masseinheiten und ihren Unterabtheilungen angepasst werden: an unserem Instrumente ist sie so getroffen, dass man bei Z' Tausende, bei Z'' Hunderte

[1] Man kann sich der Axe der x diesem Drahte und die Axe der y der Langseite des Rahmens A parallel denken.

und am Umfange ganze und Theile von Flächeneinheiten ablesen kann. Alle übrigen Theile, namentlich Laufrollen, Federn, Schrauben und das Gegengewicht W, dienen bloss zur Erzeugung genauer Bewegungen und zur Berichtigung des Instruments.

§. 300. Der **Gebrauch** des fehlerfreien Planimeters ist äusserst einfach. Steht derselbe nämlich auf einer festen ebenen Unterlage, einem Tische oder Zeichenbrette, so bringe man ihn zunächst durch die Fussschrauben in eine nahehin wagrechte Lage. Diese Lage erkennt man daran, dass jeder der beiden Schlitten an der Stelle ruhig verharrt, in die man ihn schiebt. Hierauf lege man die auszumessende ebene Figur so unter den Führer L, dass dieser ungefähr über deren Mitte steht, wenn sich bei etwas ausgezogenem Schlitten das Rädchen R am Mittelpunkte der Scheibe S befindet. Diese Stellung ist jedoch wie die horizontale Lage des Instrumentes nur annähernd herbei zu führen. Nun bezeichne man auf dem Umfange einen Punkt, von dem der Führer ausgeht und bis zu dem er wieder zurückkehrt. Für die Verminderung der zufälligen Fehler ist es gut, diesen Punkt so zu wählen, dass der Berührungspunkt des Rädchens R noch nahe am Scheibenmittelpunkte steht, oder so, dass die erste Bewegung des Führers der Langseite des Instruments nahezu parallel ist. Hierauf hebe man durch das Schräubchen e das Rädchen R ein wenig in die Höhe, drehe alle Zeiger auf Null zurück und stelle die Marke M genau auf den Anfangspunkt des Umfangs, was dann der Fall ist, wenn die Mitte der Marke diesen Punkt deckt. Ist dieses geschehen, so lasse man durch Rückwärtsdrehen des Schräubchens e das Rädchen R auf die Scheibe S herab, bis sich beide dicht berühren, führe die Marke M auf der auszumessenden Figur von links nach rechts (wie den Zeiger einer Uhr) vorsichtig herum und lese, sobald der Ausgangspunkt erreicht ist, auf dem Zifferblatte die Fläche ab, wie bereits angegeben. Will man die Figur sogleich zum zweitenmale messen, so fahre man lediglich, wenn man im Anfangspunkte angekommen ist, weiter bis man diesen zum zweitenmale erreicht; die Ablesung gibt dann die doppelte Fläche. Man begreift, dass sich auf diese Weise der Flächeninhalt einer Figur beliebig vervielfachen und durch Division die einfache Fläche finden lässt.

§. 301. **Theorie.** Sobald man eingesehen hat, dass das vorstehend beschriebene Planimeter den Flächeninhalt eines mit seinen Grundbewegungen parallel liegenden Rechtecks angibt, wenn dieses rechtsinnig umfahren wird, hat man den wesentlichsten Theil der Theorie des Linearplanimeters erfasst. Wir beweisen desshalb die Wahrheit dieses Satzes.

Stellt a b c d (Fig. 386) ein Rechteck vor, dessen Seiten den Schlittenbewegungen parallel sind, und bezeichnet

x die Länge der dem Draht parallelen Seite a b;

y die der unteren Schlittenbahn parallele Seite a d;

r_0 den Abstand des Berührungspunktes des Rädchens R vom Scheibenmittelpunkte, wenn der Führer auf a steht;

r den Halbmesser der Scheibentrommel T;
r_1 den Halbmesser des Rädchens R;
φ den Drehwinkel der Scheibe oder ihrer Trommel und
v den Drehwinkel des Rädchens R, beide in Bogenmass:

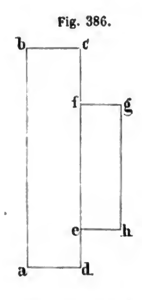


Fig. 386.

so ist, wenn der Führer von a nach b gelangt ist, $x = r\varphi$ und, da sich während dieser Bewegung der Abstand r_0 nicht ändert, $r_0 \varphi = r_1 v$, oder, wenn man φ eliminirt:

$$r_0 x = r r_1 v. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (303)$$

Geht der Führer von b nach c, so erfolgt keine Abwickelung des Drahtes, folglich auch keine Drehung der beiden Scheiben; aber es ändert sich der Abstand r_0 in $r_0 \pm y$ um. In c ist die Ablesung der in b gleich. Bewegt man jetzt den Führer von c nach d, so entsteht eine der vorigen entgegengesetzte aber gleiche Drehung der grossen Scheibe, welche durch $-x = -r\varphi$ ausgedrückt ist; und auf dem Rädchen R oder der kleinen Scheibe wickelt sich ein Bogen von der Länge $(r_0 \pm y)\,\varphi = r_1 v_1$ ab, welcher der Lage nach dem vorigen $r_1 v$ entgegengesetzt ist. Es ergibt sich somit die zweite Gleichung:

$$-(r_0 \pm y)\,x = -r r_1 v_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (304)$$

Fährt man schliesslich von d nach a, so erfolgt wie von b nach c keine Drehung, der Abstand $r_0 \pm y$ wird jedoch wie im Anfange $= r_0$. Die Ablesung in a ist der in d gleich und entspricht dem Bogenunterschied $v - v_1$. Dieser Unterschied zeigt aber die Fläche des Rechtecks abcd an; denn zieht man die Gleichung (304) von der (303) ab, so kommt

$$\pm\, y x = r r_1 (v - v_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (305)$$

d. h. die Fläche des Rechtecks abcd $= xy$ ist der algebraischen Summe der Drehungen des Rädchens proportional, was zu beweisen war.

Denkt man sich nun an das Rechteck abcd ein zweites efgh angefügt, wie Fig. 386 zeigt und jedes dieser Rechtecke umfahren, so gibt das Planimeter offenbar die Summe beider Flächen an. Bei diesem Umfahren wurde aber die Linie ef zweimal und zwar in entgegengesetzten Richtungen umfahren. Die damit verbundenen Drehungen des Rädchens R heben sich folglich auf, da jedesmal der Abstand des Berührungspunktes $r_0 \pm y$ war. Man kann folglich die Beschreibung der Linie ef ganz weglassen; thut man dieses aber, so bleibt bloss der Umfang abcfgheda der Figur 386 zu umfahren übrig, um die Fläche dieser Figur zu finden. Dasselbe findet statt, wie viele Rechtecke man auch an einander legt. Da man nun jede Figur in Rechtecke so zerlegen kann, dass deren Flächensumme der gegebenen Figur gleich ist, und da die Lage der Rechtecke willkührlich ist, so kann man dieselben auch so einlegen, dass ihre Seiten den Bewegungsrichtungen der Schlitten des Planimeters beziehlich parallel sind. Zufolge des vorhergehenden Satzes braucht man, um die Fläche der ganzen Figur zu ermitteln, nur die treppenförmige Umfangslinie bcdfg .... b, welche die Rechtecke

begrenzt, zu umfahren. Da aber die Breite der Rechtecke beliebig ist und demnach ausserordentlich klein genommen werden kann, so wird bei dieser Annahme die Treppenlinie mit der eigentlichen Umfangslinie der gegebenen Figur zusammenfallen, und deren Inhalt gefunden werden, wenn man ihren Umfang umfährt.

Es kommt also, wenn der Zählapparat unmittelbar den Inhalt der Fläche statt der Drehungen des Rädchens angeben soll, nur darauf an, die Flächeneinheit auszumitteln, welche ein Theil des Zifferblattes vorstellt. Diese Ausmittelung ist aber sehr einfach. Denn stellt F die Fläche vor, welche einer ganzen Umdrehung des Zeigers Z entspricht, so muss in diesem Falle die Summe aller Drehungen $= 2\pi$ und daher

$$F = 2 r r_1 \pi$$

seyn. Ist nun das Zifferblatt an seinem Rande in n gleiche Theile getheilt, so wird jeder eine Fläche $f = {}^1/_n F$ vorstellen und es drückt alsdann die Gleichung

$$n f = 2 r r_1 \pi$$

die Abhängigkeit der Halbmesser der Trommel T und des Rädchens R von der Flächeneinheit f aus, welche einer von den n Theilen des Zifferblattes vorstellen soll. Ist demnach z. B. der Trommelhalbmesser $r = 3{,}485$ Dez. Linien und soll einer von den 100 Theilen des Zifferblatts eine Quadrat-Dezimallinie vorstellen, so muss der Halbmesser des Rädchens

$$r_1 = \frac{n f}{2 r \pi} = \frac{100}{2 \cdot 3{,}485\, \pi} = 4{,}567 \text{ Dez. Linien}$$

seyn. Wäre die zu messende Fläche im Massstabe von 1 : 2500 gezeichnet, so würde ein Theil des Zifferblattes einem Inhalte von 625 □' entsprechen; wollte man nun dem Rädchen R einen Halbmesser geben, durch welchen ein Theil des Zifferblattes z. B. einen bestimmten Theil des Tagwerks anzeigt, so wäre derselbe, wie man sieht, leicht zu berechnen.

§. 302. Die Prüfung des Planimeters würde sehr umständlich seyn, wenn alle wesentlichen Theile einzeln untersucht werden müssten, ob sie ihre Bestimmung mit der erforderlichen Genauigkeit erfüllen. Diese Einzel-Untersuchung ist jedoch nicht nöthig, sobald man sich durch ein summarisches Verfahren überzeugt hat, dass der Flächeninhalt von genau berechneten Versuchsfiguren richtig angegeben wird. Am bessten sind hiezu regelmässige Figuren, wie Kreise, Quadrate, gleichseitige Dreiecke u. s. w. geeignet, weil sie sich am schärfsten zeichnen und berechnen lassen. Man kann sie entweder auf angespanntem Papier fein ausziehen oder in ebene Metallplatten graviren. Ihre Abmessungen müssen mit der grössten Genauigkeit bestimmt seyn. Es ist gut, wenn man zu diesen Probefiguren auch solche nimmt, welche, wie z. B. Rechtecke, erfordern, dass die beiden Schlitten ihre grösstmöglichen Bewegungen machen, weil nur dann, wenn auch der Inhalt dieser Flächen richtig angegeben wird, angenommen werden darf, dass alle Theile des Apparats ihre Schuldigkeit thun.

Bei diesen Versuchen kann sich zeigen, dass alle abgelesenen Flächen-

inhalte gegen die berechneten nur um äusserst wenig (etwa $1/_{1000}$) bald zu gross, bald zu klein sind: in diesem Falle ist das Instrument in Ordnung. Oder es zeigt sich, dass alle Inhalte um etwas zu gross gefunden werden; dann ist auch das Rädchen etwas zu gross und desshalb sein Durchmesser um eine Kleinigkeit zu verringern. Oder man findet alle Flächen etwas zu klein; dann ist auch der Durchmesser des Rädchens zu klein. Da derselbe aber nicht vergrössert werden kann, so ist oft damit zu helfen, dass man den Draht etwas dicker nimmt, denn dadurch wird der Halbmesser r der Trommel grösser und es kann so das Product $r r_1$ auf die erforderliche constante Grösse gebracht werden, sowie auch im vorhergehenden Falle durch Anwendung eines dünneren Drahtes das Abdrehen des Rädchens oft erspart wird. Oder endlich es zeigt sich, dass die Abweichungen von dem wahren Flächeninhalte bald positiv bald negativ, jedenfalls aber grösser sind als sie seyn dürfen; dann wird der Fehler entweder von der Ungeschicklichkeit oder Unachtsamkeit des Messenden, oder von der Unebenheit der Scheibe S, oder von der gleitenden Bewegung des Rädchens R herrühren.

Was die erste dieser drei Fehlerquellen betrifft, so wirkt sie um so schwächer, je besser das Instrument aufgestellt ist und je gleichmässiger und vorsichtiger der Umfang der Figur umfahren wird. Die zweite Quelle liegt meistens in dem Papier, womit die Metallscheibe überzogen ist; man muss desshalb den Ueberzug nach allen Richtungen mit einem genauen Lineale untersuchen, ob er eben ist, und ihn verbessern, wenn er es nicht seyn sollte. Am gefährlichsten kann die dritte Fehlerquelle werden, welche theils in einer schwerfälligen Bewegung der Axe des Rädchens R, theils in zu grossem oder zu geringem Drucke dieses Rädchens auf die Scheibe S liegen kann. Die Bewegung der genannten Axe lässt sich durch die auf ihre Lager wirkenden Schräubchen bei e und e′, der Druck des Rädchens aber durch das Gegengewicht W reguliren.

§. 303. Ueber die Genauigkeit des Linearplanimeters hat der Verfasser vielfache Versuche angestellt und einen Theil derselben in seiner oben angeführten Schrift auf S. 33 bis 37 mitgetheilt. Aus allen diesen Versuchen geht mit Entschiedenheit hervor, dass jenes Instrument eine viel grössere Genauigkeit gewährt, als man für irgend einen practischen oder wissenschaftlichen Zweck nöthig hat, und dass die Genauigkeit bei kleinen Flächen etwas geringer ist als bei grossen. Bei nur einiger Uebung wird man Flächen von ungefähr 2 Quadratzoll Inhalt sicher bis auf $1/_{1000}$ ihres Inhaltes richtig finden, und, wie diese auch umgrenzt seyn mögen, mit einem Zeitaufwande von nur 1 bis 3 Minuten.

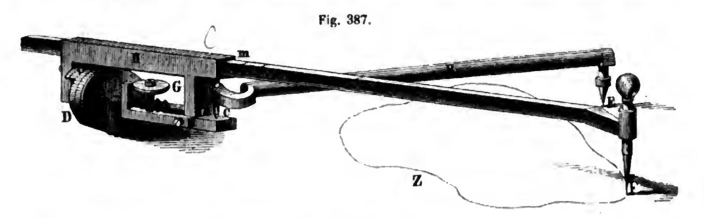
Die Genauigkeit der Planimeter von Wetli und Hansen ist so gross, dass sie denjenigen, welche das erste Mal damit arbeiten oder welche bloss Berichte über ausgeführte Arbeiten lesen, auffällt. Sie kann auch wohl nur dadurch erklärt werden, dass man annimmt, die kleinen, mit der Bewegung verbundenen Unregelmässigkeiten gleichen sich ungefähr in derselben Weise

aus, wie dieses hinsichtlich der Höhenunterschiede beim Nivelliren geschieht, wovon später noch die Rede ist.

Das Polarplanimeter von Amsler.

§. 304. **Beschreibung.** Die Bezeichnung Polarplanimeter ist desshalb gewählt, weil sich das Instrument beim Gebrauche um einen festen Punkt (den Pol) dreht. Dieser Punkt ist in unserer (etwas verkürzten) Zeichnung Fig. 387 mit E bezeichnet und wird in Wirklichkeit durch eine

Fig. 387.



feine Nadel vorgestellt, welche in den Arm B eingesetzt ist, der mit den übrigen beiden Haupttheilen, dem Stabe A und der Laufrolle D, durch die Hülse H zusammenhängt. Sowie der Arm B den Nadeleinsatz E, trägt der Stab A an einem Ende den Fahrstift F, während das andere Ende in der Hülse H durch Reibung festgehalten wird. Die Hülse ist an den Enden aufgeschnitten, damit die dadurch entstehenden Lappen, als Federn wirkend, die Reibung vermehren und gleichmässiger machen. Mit dieser Hülse ist der Arm B durch die vertikale Axe C verbunden. Denkt man sich durch diese Axe und die Mitte des Fahrstiftes eine Ebene gelegt, so bekommt man die Richtung, welcher die Axe der stählernen Laufrolle D parallel ist. Der äusserste Rand dieser Rolle ist abgerundet und polirt, ihr cylindrischer Limbus aber in 100 oder 200 Grade getheilt, welche mittels des Nonius o bis auf Zehntelsgrade abgelesen werden können. Die ganzen Umdrehungen der Rolle werden durch das Rädchen G gezählt, das von einer an der Axe jener Rolle befindlichen unendlichen Schraube bewegt wird. Der Stab A hat während jeder Messung eine unveränderliche Stellung gegen die Hülse, und es wird dieselbe nur geändert, wenn man der Messung eine andere Flächeneinheit zu Grunde legen will. Wie weit man ihn zu verschieben hat, sieht man an der Theilung auf seiner oberen Fläche, für welche eine in die Verlängerung der Axe C fallende Kante m der Hülse H als Zeiger dient.

§. 305. **Gebrauch.** Soll der Flächeninhalt einer gezeichneten ebenen Figur (Z) gefunden werden, so stelle man vor Allem den Stab A so, dass die Fläche in der Einheit ausgedrückt wird, welche man wünscht, z. B. in Quadratdecimetern. Dieses ist der Fall, wenn der auf der Theilung mit

1 Quadratdecimeter bezeichnete Theilstrich bis an die Kante m der Hülse H vorgeschoben ist. Hierauf setze man das Instrument nach Fig. 387 so auf die Zeichnung, dass die Rolle D, die Nadel E und der Stift F genau aufliegen und der Stift F an jeden Punkt der zu messenden Figur gelangen kann. Hat man die Nadel E etwas in das Papier gedrückt und den Stift auf den beliebig gewählten Anfangspunkt F des Umfangs der Figur eingestellt, so lese man den Stand der Rolle D an dem Rädchen G und dem Nonius o ab und schreibe ihn auf. Alsdann umfahre man die Figur von links nach rechts bis zu dem Ausgangspunkte, lese den Stand der Rolle D wieder ab und subtrahire die erste Ablesung von der zweiten. Die erhaltene Differenz sey $= \Delta$. Liegt nun die Spitze oder der Pol E ausserhalb der umfahrenen Figur, so ist der Unterschied Δ geradezu der gesuchte Flächeninhalt in der Einheit, auf welche der Stab A eingestellt wurde, hier in Quadratdecimetern; befindet sich aber der Pol E innerhalb der umfahrenen Figur, so ist der Differenz Δ eine constante Zahl beizufügen, welche für jede Masseinheit des Planimeters auf der Seitenfläche des Stabes A und zwar da angemerkt ist, wo sich der einzustellende Theilstrich befindet. Hätte man also die Spitze E innerhalb der Figur befestigt und mit der Einstellung auf Quadratdecimeter z. B. die Differenz $\Delta = 4{,}567$ erhalten, so wäre, da die Constante hier $= 18{,}81$ ist, der Inhalt der umfahrenen Fläche $= 18{,}81 + 4{,}567 = 23{,}377$ □Decimeter. Um diese Reductionen zu ersparen, wird man, so oft es die Ausdehnung der auszumessenden Figur erlaubt, die Spitze E ausserhalb des Umfangs anbringen. Befindet sich die Figur auf einem Reissbrette, welches zu klein ist, um der Rolle D den nöthigen Spielraum zu gewähren, so müsste man in gleicher Höhenlage ein zweites Blatt anfügen und die Stossfuge eben zudecken. Ist dagegen die Figur auf ein zu kleines abgeschnittenes Blatt gezeichnet, so braucht man dieses lediglich auf einen grösseren Zeichnungsbogen zu legen, beide mit Strohpapier zu überdecken und die Laufrolle über dieses wegzuführen. Bei der Lage des Pols innerhalb der Figur kann es sich treffen, dass die Differenz Δ (durch Subtraction der ersten Ablesung von der zweiten entstanden) negativ wird: dieses Vorzeichen ist bei der Reduction gehörig zu berücksichtigen.

§. 306. **Theorie.** Sowie der §. 301 nur einen Theil der Theorie des Linearplanimeters enthält, so folgt auch hier nur so viel von der Theorie des Polarplanimeters, als nöthig ist, dessen Wirkungsweise einzusehen. Wir halten uns hiebei ganz an die von Amsler gegebene Darstellung.

In den Fig. 388 und 389 bezeichne F die Spitze des Fahrstifts, E die Nadelspitze oder den Pol, C die Horizontalprojection der Axe des Arms B, D den Berührungspunkt der Laufrolle, r die während einer Messung constante Entfernung des Stifts F von der Axe C und R die gleichfalls unveränderliche Entfernung dieser Axe vom Pole E.

Liegt dieser Pol ausserhalb einer geschlossenen Curve Z, wie in Fig. 388, und man führt den Stift F auf ihr herum, so beschreibt der Punkt C bloss einen Kreisbogen, befindet sich aber E innerhalb der Curve Z, wie in

Fig. 389, so beschreibt der Punkt C einen ganzen Kreis. Diese beiden Fälle sind besonders zu untersuchen.

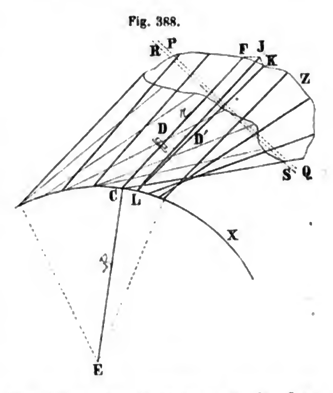


Fig. 388.

Hat F den ganzen Umfang durchlaufen, so befindet sich die Gerade CF wieder in ihrer Anfangslage und hat während ihrer Bewegung jeden innerhalb der Curve Z liegenden Punkt einmal oder 3, 5, 7 . . . mal getroffen, jeden äusseren Punkt dagegen entweder gar nicht oder 2, 4, 6 . . . mal. Sind nun CF und LK (Fig. 388) zwei aufeinander folgende Lagen der beweglichen Geraden, so ist klar, dass CF nur durch eine gleichzeitig fortschreitende und drehende Bewegung in die Lage LK kommt, und dass man diese zusammengesetzte Bewegung in zwei einfache zerlegen kann, indem man sich vorstellt, dass die Gerade CF zuerst durch eine parallele Verschiebung in die Lage LJ und hierauf durch eine Drehung um den Punkt L in die Lage LK gelange. Somit wird das Flächenelement CLKF durch die algebraische Summe des Parallelogramms CFJL = p und des Sectors LJK = s vorgestellt.

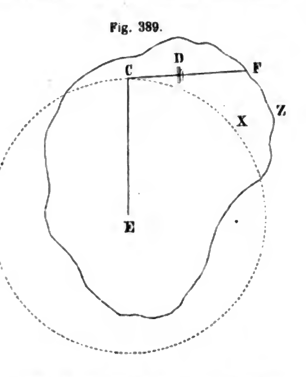


Fig. 389.

Die Fläche p werde als positiv angesehen, wenn sie durch die Tangente des Punktes C vom Pole E getrennt ist und, von diesem aus gesehen, rechts von CF liegt; der Sector s dagegen sey positiv, wenn die Gerade LJ durch eine rechtsinnige Drehung in die nachfolgende Lage übergeht.

Es ist nun nicht schwer einzusehen, dass, wenn man sich jedes Flächenelement, das durch zwei auf einander folgende Lagen der Geraden CF entsteht und durch die von deren Endpunkten beschriebenen Bögen begrenzt wird, in ein Parallelogramm p und einen Sector s zerlegt denkt, die Summe aus der Summe aller p (Σp) und aus der Summe aller s (Σs), d. i. $\Sigma p + \Sigma s$ gleich ist der von der Curve Z begrenzten Fläche, sobald CF in die erste Lage oder der Stift F auf den Ausgangspunkt zurück-

gekehrt ist. Wird der Flächengehalt der Figur Z mit J bezeichnet, so ist demnach

$$J = \Sigma p + \Sigma s. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (306)$$

Denkt man sich jetzt mit der Geraden CF eine auf der Zeichnungsfläche sich bewegende Rolle so verbunden, dass ihre Axe parallel zu CF ist und ihr Berührungspunkt in D liegt, so wird diese Rolle bloss gleiten, wenn sie nach ihrer Axe, und bloss rotiren, wenn sie senkrecht zur Axe bewegt wird; in jedem andern Falle findet gleichzeitig Gleitung und Drehung statt. Bei dem Uebergange der Linie CF in die Lage LJ wird die Rolle einen Bogen h abwickeln, welcher der senkrechte Abstand dieser beiden Lagen ist; und bei dem Uebergange von der Lage LJ in die Lage LK beschreibt der Berührungspunkt der Rolle D einen Bogen $\varrho\varphi$, wenn ϱ = CD und φ = JLK ist. Die Gesammtabwickelung von der ersten zur zweiten Lage ist somit $= h + \varrho\varphi$ und von der ersten Lage bis wieder zur ersten, wobei die ganze Figur umfahren wird, gleich

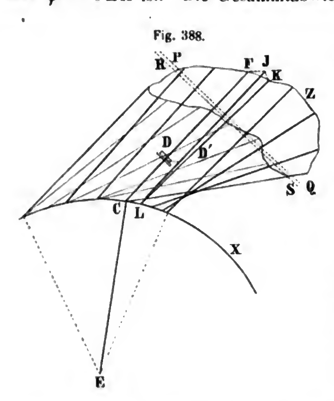


Fig. 388.

$$u = \Sigma h + \Sigma \varrho\varphi. \quad (307)$$

Die Grössen h und φ sind positiv oder negativ, je nachdem es die Flächenelemente p und s sind, und der Abstand ϱ wird negativ, wenn die Rolle D auf der Verlängerung von FC, also von F weiter abliegt. Für den einen Fall, wo der Pol E ausserhalb der Figur Z liegt, Fig. 388, ist $\Sigma s = 0$, da der constante Halbmesser aller Sectoren, die Gerade CF, gerade so viele Drehungen im positiven als negativen Sinne gemacht hat, sobald er in seine erste Lage zurückgekehrt ist. Es wird somit für diesen Fall

$$J = \Sigma p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (308)$$

und da auch $\Sigma\varphi = 0$, also $\Sigma\varrho\varphi = \varrho\Sigma\varphi = 0$ ist,

$$u = \Sigma h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (309)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der constanten Grösse von CF = r, so kommt

$$ru = \Sigma rh$$

und da r die Grundlinie, h aber die Höhe jedes Parallelogramms p bezeichnet, somit rh = p ist, so folgt weiter

$$J = ru \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (310)$$

d. h. die von dem Punkte F umschriebene Fläche ist gleich einem Rechtecke, welches die constante Länge r der beweglichen Geraden CF zur

Grundlinie und den von der Rolle D während der Bewegung abgewickelten Bogen u zur Höhe hat; mit anderen Worten: der abgewickelte Bogen der Rolle D ist dem Inhalte der umfahrenen Fläche proportional.

Fig. 390.

In dem andern Falle, wo der Pol E innerhalb der Figur Z liegt, macht die Gerade CF bis zu ihrer Rückkehr in die Anfangslage eine ganze Umdrehung, während sie in dem ersten Falle ebenso viele positive als negative Drehungen vollführte. Die von den Punkten F und C (Fig. 390) beschriebenen Curven Z und X, von denen die letztere ein Kreis ist, schliessen demnach die Fläche ein, welche durch die Summe $\Sigma p + \Sigma s$ ausgedrückt ist, und es ist desshalb, wenn $EC = R$ gesetzt wird,

$$J - R^2\pi = \Sigma p + \Sigma s \quad (311)$$

Diese Gleichung gilt übrigens nicht bloss für die vorstehende Figur allein, sondern auch dann noch, wenn sich der Kreis X und die Curve Z schneiden, wie dieses in Fig. 389 der Fall ist.

Erwägt man, dass die Gerade $CF = r$ eine ganze Umdrehung macht (der Punkt C z. B. beschreibt den Kreis X), bis sie wieder in ihre erste Lage zurückkehrt, so ist klar, dass die algebraische Summe aller von ihr bis dahin beschriebenen Sectoren (Σs) eine Kreisfläche vom Halbmesser r und daher $\Sigma s = r^2\pi$ ist.

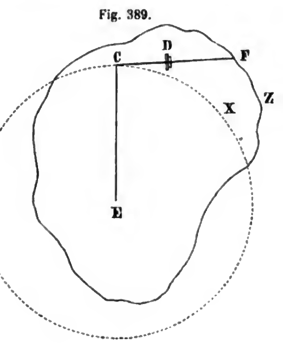


Fig. 389.

Die letzte Gleichung geht somit über in

$$J - R^2\pi = r^2\pi + \Sigma p. \quad (312)$$

Der Ausdruck $\Sigma\varrho\varphi$, in der Gleichung (307), welche hier unverändert gilt, ändert sich, da die Summe aller Drehungen 360° beträgt, in $\varrho\Sigma\varphi = 2\varrho\pi$ und somit die Gleichung (307) selbst in

$$u = \Sigma h + 2\varrho\pi \quad . \quad (313)$$

ab. Durch Multiplication mit r und Substitution des Werthes Σp für Σrh erhält man hieraus:

$$r u = \Sigma p + 2 r \varrho \pi,$$

und wenn man wiederum den Werth von $\Sigma p = r u - 2 r \varrho \pi$ in die Gleichung (312) substituirt und

$$R^2 + r^2 - 2 r \varrho = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (314)$$

setzt, so folgt schliesslich der Inhalt der Curve L oder

$$J = c \pi + r u, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (315)$$

d. h. befindet sich der Pol E innerhalb der umfahrenen Fläche, so ist diese gleich einer constanten Fläche ($c \pi$) plus einem Rechtecke, dessen Inhalt dem von der Rolle abgewickelten Bogen (u) proportional ist.

In diesem und dem aus Gleichung (310) gefolgerten Satze ist die Theorie des Polarplanimeters enthalten; ihre weitere Entwickelung würde aber hier zu weit führen. Nur das sey noch kurz erwähnt, dass man die Länge r des Stabes CF dadurch findet, dass man das Product $r v$, in welchem v den Umfang der Rolle D vorstellt, der Fläche f gleich setzt, welche eine ganze Umdrehung der Rolle vorstellen soll. Würden demnach r und v in Pariser Zollen ausgedrückt seyn und sollte eine Umdrehung f □Zollen entsprechen, so hätte man

$$r v = f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (316)$$

zu setzen und hieraus r zu suchen. Nimmt man r im Voraus an, so bestimmt sich darnach v. Ist aber v gegeben und ändert sich dieser Umfang mit der Zeit etwas, so darf man nur r entsprechend grösser machen, d. h. den Strich auf dem Stabe A etwas von F wegrücken.

§. 307. **Genauigkeit.** Ueber die Genauigkeit des Polarplanimeters liegen noch keine ausreichenden Erfahrungen vor, wie wir diese über die Linearplanimeter besitzen. Der Verfasser hat zwar im Herbste 1855 mit einem Amsler'schen Planimeter einige Versuche gemacht und die gemessenen Flächen bis auf ein drittel Procent ihres Inhalts genau erhalten; er will aber aus diesem Ergebnisse kein definitives Urtheil über die Genauigkeit des Polarplanimeters ableiten, da das zu den Versuchen verwandte Planimeter nach den Angaben des Erfinders nicht mit aller Sorgfalt gearbeitet war. In Wien hat man mit dem in der Anmerkung auf Seite 530 genannten Planimeter, das sich von dem Amsler'schen bloss dadurch unterscheidet, dass der Pol (E) nicht durch einen Nadeleinsatz, sondern durch einen ziemlich schweren Metallcylinder bestimmt wird, ungefähr dasselbe Resultat erhalten; dagegen führt Amsler über die Genauigkeit seiner Planimeter an: „Man betrachtete die Instrumente als fertig, sobald sie die wirklich umfahrene Fläche bis auf $^1/_{1000}$ genau angaben; dass aber eine bedeutend grössere Genauigkeit erreichbar wäre, zeigt schon die Vergleichung des Polarplanimeters mit dem Wetli'schen Planimeter, indem bei jenem mehrere Fehlerquellen wegfallen, die das letztere besitzt." Wie dem aber auch sey, so viel steht fest, dass das Amsler'sche Polarplanimeter für die meisten practischen Zwecke eine hinreichende Genauigkeit gewährt und daher wegen seiner Einfachheit und Wohlfeilheit sehr zu empfehlen ist.

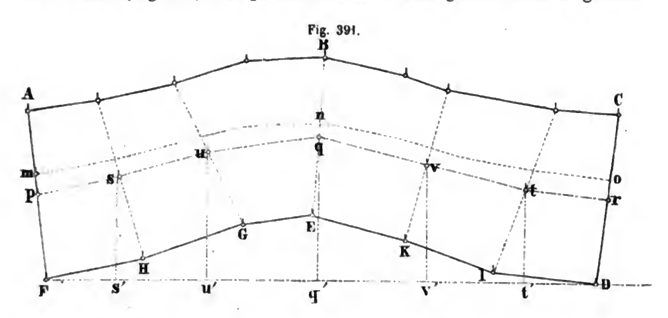
3. Die geometrische Vertheilung der Grundstücke.

§. 308. Die Theilung eines Grundstückes wird nöthig, wenn von diesem für irgend einen Zweck ein Stück von gegebenem Flächeninhalte abzuschneiden ist, oder wenn mehrere Eigenthümer einer Parzelle ihre Antheile sondern wollen, oder wenn die krumme, oder vielfältig gebrochene Grenze zweier Grundstücke in eine geradlinige verwandelt werden soll.

Für diese Theilungen sind entweder bestimmte Richtungen und Formen der Grenzen vorgeschrieben, oder es dürfen die neuen Grenzen in soweit beliebig gewählt werden, als sie den Zugang zu den abgetheilten Parzellen nicht erschweren. Ferner können Theilungen vorkommen bei Grundstücken von gleichem Werthe der Flächeneinheit, d. i. von gleicher Bonität, oder bei Grundstücken von ungleicher Bonität. In diesem Falle wird also für die Theilung nicht die Fläche allein, sondern das Product aus dem Flächeninhalte und dem Preisse der Flächeneinheit oder der Werth des Grundstücks massgebend seyn. Endlich kann die Theilung auf Grund eines vorliegenden genauen Plans des Grundstücks oder ohne diesen durch unmittelbare Messung auf dem Felde zu vollziehen seyn.

Hienach liesse sich eine grosse Reihe von Aufgaben bilden; wir werden uns aber auf wenige beschränken, da sich das Princip, welches bei diesen Theilungen zu befolgen ist, leicht aussprechen und ausführen lässt; es besteht nämlich darin: alle hieher gehörigen Aufgaben versuchsweise zu lösen und die ersten Lösungen so lange zu verbessern, bis den gestellten Bedingungen innerhalb der nothwendigen Genauigkeitsgrenzen genügt ist. Soll hiernach z. B. ein Grundstück ABCDEF (Fig. 391) von gleicher Bonität in zwei gleiche Theile so getheilt

Fig. 391.



werden, dass die neuen Grenzen den alten nahezu parallel laufen, so wird man erst eine Linie mno als Theilungslinie annehmen und die beiden Flächen rechts und links dieser Linie aus dem Kettenmasse berechnen. Sind f_1 und f_2 die gefundenen Flächeninhalte, so ist die Gesammtfläche $f_1 + f_2 = 2f$

und folglich die Grösse eines gesuchten Theils = f, daher der eine bereits abgesteckte Theil (Bn) um $d = f - f_1$ zu klein und der andere (En) um $d = f_2 - f$ zu gross. Misst man nun die Linie mno auf dem Felde und findet ihre horizontale Länge = l, so muss der Streifen pqr = d, um welchen f_1 zu vergrössern und f_2 zu verkleinern ist, eine Breite b erhalten, welche sich aus der Gleichung

$$d = bl$$

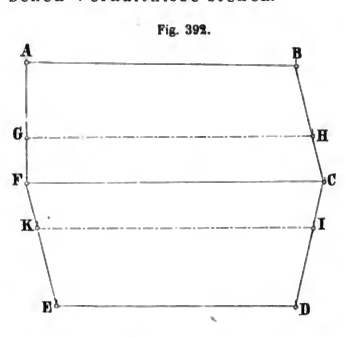
ergibt. Trägt man diese Breite von mno aus mehrmals ab, so wird die nunmehr abgesteckte Linie psuqvtr der gestellten Aufgabe genügen.

Wäre das zu theilende Grundstück genau gezeichnet gewesen, so hätte man die vorläufige Theilungslinie mno in dem Plane angedeutet und die Flächen f_1 und f_2 entweder mit Zirkel und Massstab oder mit dem Planimeter gemessen und hierauf den Streifen mnorqp wie vorhin bestimmt. Alsdann hätte man die Abstände Ap, pF, Cr, rD aus dem Plane entnommen, um hiernach die Punkte p und r auf das Feld überzutragen, und schliesslich würde man die Punkte s, u, q, v, t der Theilungslinie durch Abscissen und Ordinaten, welche in Bezug auf die Axe FD aus der Zeichnung abgegriffen wurden, auf dem Felde ausgesteckt haben.

Sind die zu theilenden Figuren Dreiecke oder Trapeze, so lassen sich bei der Theilung wohl auch die Constructionen anwenden, welche die ebene Geometrie lehrt; erfahrungsgemäss führt aber auch hier die Lösung durch Versuche meist schneller zum Ziele.

§. 309. Aufgabe. Zwei aneinander stossende Grundstücke von verschiedener aber bekannter Bonität sollen in drei Theile getheilt werden, welche ihrem Werthe nach in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Fig. 392.



Es seyen AC und FD (Fig. 392) die beiden Grundstücke, der Werth w_1 des ersten $= f_1 b_1$ und der des zweiten $w_2 = f_2 b_2$, wobei f den Flächeninhalt und b den Preiss der Flächeneinheit (die Bonität) bezeichnet. Stellen GH und KI die Theilungslinien vor, so soll sich der Werth von AH : GI : KD verhalten wie m : n : p.

Der zu theilende Werth ist offenbar

$$w_1 + w_2 = f_1 b_1 + f_2 b_2 = W$$

und es trifft desshalb, wenn man $m + n + p = N$ setzt, nach den Regeln der Gesellschaftsrechnung auf

$$\text{Nr. 1 der Werth } m \frac{W}{N} = v_1,$$

$$\text{Nr. 2 der Werth } n\frac{W}{N} = v_2,$$

$$\text{Nr. 3} \quad " \quad " \quad p\frac{W}{N} = v_3.$$

Zeigt sich, dass die Fläche f' des Theils ABHG kleiner wird als f_1, so kann der erste Theil lediglich die Bonität b_1 haben und es wird desshalb f' aus der Gleichung gefunden:

$$f' = \frac{v_1}{b_1} = \frac{mW}{b_1 N}.$$

In gleicher Weise erhält man, wenn die Fläche f'' des dritten Theils DEKI von f_2 abgeschnitten werden kann,

$$f'' = \frac{v_3}{b_2} = \frac{pW}{b_2 N},$$

und es bleibt folglich für den zweiten Theil IHGK übrig: von dem Grundstück der Bonität b_1 die Fläche $f_1 - f'$, und von der Bonität b_2 die Fläche $f_2 - f''$. Sind die Flächen f' und f'' bestimmt, so lassen sich die Linien GH und KI leicht berechnen und abstecken.

Fig. 393.

Sollen die Theilungslinien (LP, MN) einer gegebenen Richtung XY parallel laufen und die gemeinsame Grenze der beiden Grundstücke schneiden, wie in Fig. 393, so ziehe man erst L'P' so, dass die beiden Abschnitte AO', O'E dem Werthe v_1 nahezu entsprechen; da aber, wenn φ_1 die Fläche AO' und φ_2 die Fläche FP' bezeichnet, der Werth

$$\varphi_1 b_1 + \varphi_2 b_2 \lesseqgtr v_1$$

seyn wird, so muss die Differenz

$$\varphi_1 b_1 + \varphi_2 b_2 - v_1 = \Delta,$$

welche positiv oder negativ seyn kann, ausgeglichen werden. Ist dieselbe positiv, so fällt die wahre Theilungslinie LP links von der vorläufig angenommenen L'P', ausserdem rechts. Um den Abstand beider $= \delta$ zu finden, kann man folgende Rechnung anstellen. Es muss offenbar, wenn $L'O' = l_1$ und $O'P' = l_2$ gesetzt wird, sehr nahe

$$\delta\,(l_1 b_1 + l_2 b_2) = \Delta$$

seyn. Hat man nun aus dieser Gleichung δ gefunden, so ziehe man in dem Abstande δ eine Parallele zu L'P', womit der erste Theil abgeschnitten ist. Ebenso verfahre man mit dem zweiten Theile; der dritte ergibt sich dann von selbst.

§. 310. Aufgabe. Zwei aneinander stossende Grundstücke von gleicher Bonität haben eine gebrochene Grenze; man soll dieselbe ohne Aenderung des Flächeninhalts in eine geradlinige verwandeln.

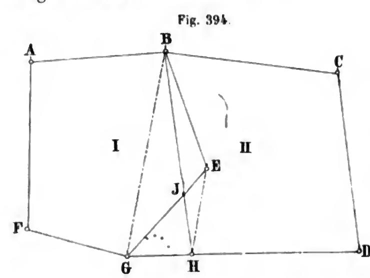


Fig. 394.

Es sey BEG (Fig. 394) die zu verbessernde Grenze, und es soll die neue durch B gehen. Denkt man sich zu BG durch die Ecke E die Parallele EH gezogen, so ist durch die Verbindungslinie BH die Aufgabe gelöst. Denn es ist Dreieck BGE, welches im Grundstücke I liegt, dem Dreiecke BGH, das den beiden Grundstücken angehört, gleich, weil beide gleiche Grundlinie und Höhe haben; kommt nun BGH statt BGE zu dem Grundstücke I, so bleibt dessen Flächeninhalt unverändert, während es die geradlinige Grenze BH erhält; und da zu II für das abgeschnittene Stück GJH das gleichgrosse BJE hinzugefügt wird, so bleibt auch dessen Flächengrösse die frühere.

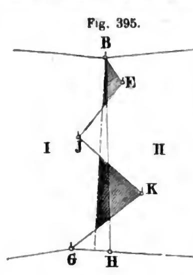


Fig. 395.

Ist die zu verbessernde Grenze wie in Fig. 395 mehrmals gebrochen, so kann man das vorhergehende Verfahren öfters nacheinander anwenden, indem man bei dem Punkte J beginnend erst JKG in eine geradlinige Grenze verwandelt, dann mit dieser neuen Grenze und dem Stück JE ebenso verfährt u. s. f. Rascher wird man jedoch in manchen Fällen zum Ziele kommen, wenn man erst eine provisorische Linie BH zieht und aus dem Kettenmasse oder der Zeichnung berechnet, ob die vom Grundstücke I abgeschnittenen (hier schraffirten) Flächengrössen den von II abgetrennten gleich sind oder nicht. Sind die ersteren zu gross, so rückt man die Theilungslinie BH etwas gegen II vor und vergleicht die neuen Abschnitte. Reicht diese Verlegung noch nicht aus, so wird eine weitere gewiss zum Ziele führen. Ist die neue Grenze ausgemittelt, so wird sie durch Marksteine oder einen Graben auf dem Felde bezeichnet.

Man kann hiernach leicht ermessen, wie zu verfahren ist, wenn die Grundstücke I und II verschiedene Bonitäten haben: es ist nämlich von jedem Grundstücke für das andere so viel an Werth abzuschneiden, als ihm von diesem durch die geradlinige Grenze zugelegt wird.

D. Messung eines ganzen Landes.

§. 311. Der Zweck einer Landesvermessung besteht entweder in der Herstellung von Plänen, aus denen sich die Grenzen und Flächen der einzelnen Grundstücke mit hinreichender Genauigkeit entnehmen lassen, oder in der Anfertigung von Karten, welche die Lage und Grösse der vorzüglichsten natürlichen und künstlichen Bildungen der Bodenfläche angeben. Wird der erstere Zweck verfolgt, so muss die Messung sehr in's Einzelne gehen und in einem grossen Massstabe (1 : 1000 bis 1 : 5000) vorgenommen werden; in dem andern Falle aber genügt eine weniger detailirte Aufnahme und ein kleinerer Massstab (1 : 20000 bis 1 : 100000).

Sehr ausführliche Landesvermessungen werden hauptsächlich in der Absicht gemacht, um sie als Basis für die Anlage der Grundsteuer oder der Steuerkataster zu benützen; die hiefür angefertigten Pläne (Steuerblätter) dienen aber auch zu verschiedenen anderen staatswirthschaftlichen und technischen Zwecken. Dagegen sind die weniger ausführlichen topographischen Messungen vorzugsweise für militärische und geographische Zwecke geeignet. Hier ist nur von der Herstellung der Katasterpläne die Rede, da topographische Karten einerseits aus diesen Plänen construirt, andrerseits aber nach denselben Principien wie Steuerblätter aufgenommen werden können.

Wenn es schon für die Aufnahme einer kleineren Fläche, z. B. eines Flurbezirks, nöthig ist, mehrere Hauptpunkte durch ein Vieleck festzulegen, um daran die Detailmessung zu knüpfen; so ist die Herstellung eines genauen Netzes von Linien, wodurch man eine grosse Anzahl gut bestimmter Punkte erhält, für eine Landesvermessung erste Bedingung. Dieses aus Dreiecken bestehende Netz liefert für sich die gegenseitige Lage aller ihm selbst angehörigen Punkte, und in Verbindung mit der Detailaufnahme auch die gegenseitige Lage aller Terrainpunkte. Dieses Resultat genügt aber noch nicht; man will vielmehr auch wissen, wie alle wichtigeren Punkte des Landes gegen den Aequator und einen bestimmten Meridian der Erde gelegen sind, mit anderen Worten: man will die geographische Breite und Länge jedes Punktes kennen.

Die desshalb nöthig erscheinende Orientirung des Dreiecknetzes erfordert, dass man die geographische Lage eines Punktes und einer Seite desselben genau kenne. Diese Daten liefern die Astronomen aus vieljährigen genauen Beobachtungen, wesshalb auch die Sternwarte des zu vermessenden oder eines angrenzenden Landes als astronomischer oder Orientirungspunkt und eine von diesem Punkte ausgehende und mehrere Meilen lange Dreiecksseite als Orientirungslinie benützt wird. Diese Bestimmungen setzen wir hier als gegeben voraus und beschäftigen uns demnach nur mit den nachfolgenden technischen Arbeiten einer Landesvermessung, nämlich

1) mit der Feststellung der Basis des Dreiecknetzes,
2) „ „ Auswahl und Bezeichnung der Dreieckspunkte,
3) „ „ Messung der Winkel aller Dreiecke,

4) mit der Berechnung der Dreiecke jeder Ordnung,
5) „ „ Berechnung der Coordinaten der Netzpunkte,
6) „ „ Bestimmung der geographischen Lage der Netzpunkte,
7) „ „ Verbindung des Netzes und der Detailblätter,
8) „ „ Aufnahme der Einzelnheiten des Terrains.

1. Die Basis des Dreiecknetzes.

§. 312. Da genaue Längenmessungen sehr mühsame und kostspielige Arbeiten sind, gute Winkelmessungen dagegen verhältnissmässig leicht ausgeführt werden können, so legt man dem Dreiecknetze, womit das zu vermessende Land überzogen werden muss, nur eine einzige wirklich gemessene Linie zu Grunde, welche desshalb die Basis des Netzes genannt wird. Diese Linie ist eine Seite eines der grösseren Netzdreiecke oder eines Dreiecks erster Ordnung. Aus dieser Seite und den drei unmittelbar gemessenen Winkeln des ihr angehörigen Dreieckes findet man die beiden anderen Seiten desselben durch Rechnung; mit den nun bekannten neuen Seiten und den zugehörigen Winkeln kann man wieder zwei andere Dreiecke berechnen, hiermit abermals vier neue anstossende Dreiecke, und so kann man fortfahren, bis alle Dreiecke berechnet sind.

Da von der Genauigkeit der Basismessung die Genauigkeit des Dreiecknetzes abhängt, so wird man für dieselbe ein ebenes und festes Terrain wählen, welches eine sichere Messung und das Anvisiren einiger Punkte des Hauptnetzes gestattet. Man wird dieselbe etwa eine Meile lang[1] machen und an ihren Endpunkten durch massive Signale, wie solche in §. 85 beschrieben sind, genau und dauerhaft bezeichnen. Ist dieses geschehen, so nimmt man die Messung mit genau abgeglichenen Messstangen nach dem in §. 259 auseinander gesetzten Verfahren vor und reducirt die gefundene Länge in der daselbst angegebenen Weise auf den Horizont.

Die so gefundene Basis B ist (nach §. 259 und unter der Voraussetzung, dass die Erde eine Kugel sey) ein Kreisbogen vom Halbmesser

$$R = r + \frac{1}{2}(f + f'),$$

wobei r den Erdhalbmesser bis zum Meeresspiegel, f die Höhe des einen und f' die Höhe des anderen Endpunktes der Basis über dem Meere bezeichnet.

Schliesst man das Dreiecknetz an die Basis B an, so liegt dasselbe auf einer Kugel von dem Halbmesser R. Hat man in einem Nachbar-Lande die Basis B' gemessen, welche einem Kugelhalbmesser R' angehört, und

[1] Prof. Schwerd schlug in seiner Schrift: »die kleine Speyerer Basis« vor, nur kleine Grundlinien genau zu messen und dieselben durch Winkelmessungen zu vergrössern. Nachdem er selbst an der genannten Basis von nur 441 Toisen Länge einen erfolgreichen Versuch gemacht hatte, wandte auch Bessel eine kleine Grundlinie von 935 Toisen an und Baeyer gab seinen Basen ebenfalls bloss 1100 bis 1400 Toisen Länge. Das Schwerd'sche Princip wird noch nicht überall anerkannt, namentlich in Frankreich nicht, und es will desshalb die Commission der neuen Karte von Spanien die vorliegende Frage dadurch entscheiden, dass sie ihre grosse Basis in fünf kleine theilt und jene aus diesen ableitet. (Baeyer, Grösse und Figur der Erde, S. 64.)

denkt man sich die von beiden Basen ausgehenden Dreiecknetze an der Landesgrenze durch gemeinschaftliche Signale aneinander gefügt, so ist klar, dass bei aller Genauigkeit der Messung die sphärischen Dreiecksseiten, welche den Schluss bilden, aus beiden Netzen verschieden erhalten werden, weil ihrer Berechnung das eine Mal eine Kugel vom Halbmesser R und das andere Mal eine Kugel vom Halbmesser R′ zu Grunde liegt. Jene Dreiecksseiten werden jedoch in gleicher Grösse gefunden, wenn man die beiden Netze auf eine und dieselbe Kugel projicirt, wozu sich die Meeresfläche am besten eignet. Diese Projection erhält man aber, wenn man die bereits auf den Horizont reducirte Basis noch weiter auf den Meeresspiegel reducirt. Ist B die Basis auf der Kugel vom Halbmesser R und b die auf die Meeresfläche reducirte Basis, so hat man offenbar $B : b = R : r$ und hieraus

$$b = \frac{r}{R} B = \frac{r}{r + h} B = \left(1 - \frac{h}{r} + \frac{h^2}{r^2}\right) B,$$

wobei $R = r + \frac{1}{2}(f + f') = r + h$ gesetzt ist.

Bedenkt man, dass der grösste Werth des Bruches $\frac{h}{r}$ höchstens $\frac{1}{9000}$ und somit $\left(\frac{h}{r}\right)^2$ höchstens $\frac{1}{81000000}$ beträgt, so kann man

$$b = \left(1 - \frac{h}{r}\right) B \quad \ldots \ldots \ldots \quad (317)$$

und die Reductionsgrösse

$$\beta = B - b = \frac{h}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (318)$$

setzen. Betrüge z. B. die Länge einer auf den Horizont reducirten Basis, welche in einer Höhe von 326,66 Toisen oder 1959,96 Pariser Fuss über dem Meere liegt, 5470,34 Toisen oder 32822,04 Pariser Fuss, so wäre (da nach §. 3 der Halbmesser $r = 3266608$ Toisen)

$$\beta = \frac{1}{10\,000} \cdot 5470{,}34 = 0{,}547034 \text{ Toisen} = 3{,}2822 \text{ P. Fuss.}$$

Hätte man das dritte Glied der Reihe für $\frac{r}{r+h}$ noch berücksichtigt, so würde der Werth von β nur um 0,03 Linien kleiner und folglich die reducirte Basis um eben so viel grösser geworden seyn.

Die Reduction der Basis auf die Meeresfläche wird hauptsächlich nur wegen der Vergleichung mit anderen Triangulationen vorgenommen; ob man diese Fläche selbst als Projectionsfläche des Netzes ansehen will, hängt von der Höhenlage des zu vermessenden Landes ab. Ist dieses tief gelegen, so kann man das Netz sofort auf die Meeresfläche projiciren; liegt das Land aber hoch, so wählt man eine bis zur mittleren Höhenlage desselben Landes reichende Kugelfläche als Projectionsfläche. In Württemberg z. B. lag die zwischen dem Schlosse Solitude und der Stadt Ludwigsburg gemessene Basis 1019 P. Fuss über dem Meere; da aber der mittleren Höhe des Landes nur etwa 840 P. Fuss oder 140 Toisen entsprechen, so hat man für die

gesammte Landesvermessung eine Kugelfläche von dem Halbmesser $r + h = 3266608 + 140 = 3266748$ Toisen angenommen.

2. Die Wahl und Bezeichnung der Netzpunkte.

§. 313. Das Netz, womit ein zu vermessendes Land überzogen wird, besteht aus grossen, mittleren und kleinen Dreiecken, welche man der Reihe nach Dreiecke erster, zweiter und dritter Ordnung nennt. Kleinere Dreiecke als dritter Ordnung, deren man für die Detailmessung bedarf, und welche mit den grösseren Dreiecken in Verbindung stehen, gehören nicht mehr zum Dreiecknetze.

Die Dreiecke erster Ordnung sollen nur eine geringe Anzahl sehr genau bestimmter, aber das ganze Land umfassender Punkte liefern, wesshalb sie Seiten bis zu 10 Meilen Länge haben können. Mit Ausnahme der Basis werden die kleinsten Seiten selten weniger als drei Meilen betragen, und wegen des Einflusses der unvermeidlichen Messungsfehler sucht man es zu vermeiden, dass eine kleinste und eine grösste Seite in einem und demselben Dreiecke zusammentreffen; denn jener Einfluss wird nach §. 282 am kleinsten, wenn die Dreiecke so viel als möglich gleichseitig sind. Für die Controle der Messung und Rechnung und auch für die Ausgleichung der zufälligen Fehler ist es sehr gut, wenn man die Dreiecke erster Ordnung so an die Basis anschliesst, dass das Netz auf mehrere Arten durchgerechnet werden kann. Dieses ist aber der Fall, sobald die Basis Seite einiger Dreiecke ist.

Die Dreiecke zweiter Ordnung werden mit denen der ersten Ordnung verbunden, was entweder an Eckpunkten oder Seiten erster Ordnung geschieht. Für die Wahl dieser Dreiecke ist der Umstand massgebend, dass man von ihren Winkelscheiteln aus die bemerkenswerthesten Punkte, welche sie einschliessen, sehen soll. Da man diese im Flachlande leichter auf grosse Entfernungen hin übersehen kann, als in durchschnittenem Terrain, so ist klar, dass in diesem die Dreiecke zweiter Ordnung kleiner seyn werden als in jenem; und da manchmal auch ein Dreieck erster Ordnung alle Hauptpunkte seiner Fläche zu übersehen gestattet, so leuchtet ein, dass an ein solches Dreieck keines zweiter Ordnung angeknüpft zu werden braucht.

Die Dreiecke dritter Ordnung schliessen sich an jene der zweiten Ordnung so an, dass jedes der ersteren eine Seite und als dritten Eckpunkt einen hervorragenden Gegenstand der Fläche eines Dreieckes zweiter Ordnung enthält. Als solche dritte Winkelpunkte dienen natürliche Signale, wie Kirchthurmspitzen, hohe Schornsteine, einzelnstehende Bäume u. dgl. Da auf denselben die Winkel der Dreiecke nicht gemessen werden können, so ist es nöthig, sie so zu wählen, dass sie von wenigstens drei Punkten erster und zweiter Ordnung gesehen und anvisirt werden können.

Die Signale zur Bezeichnung der Netzpunkte sind entweder künst-

liche oder natürliche. Für die Dreiecke erster Ordnung eignen sich nur solche Signale, welche eine sichere Winkelmessung gestatten, also Steinpfeiler oder Pyramiden, wie sie in den §§. 85 und 86 beschrieben sind. Findet sich eine hochgelegene Ruine vor, welche einen würfelförmigen Stein mit Metallcylinder, der den Punkt bezeichnet, zu befestigen gestattet, so kann man auch diese als Grundbau für ein Signal erster Ordnung benützen. Sind diese Signale sehr weit entfernt, so macht man sie durch Heliotropenlicht leicht sichtbar. Für Punkte zweiter Ordnung genügt ein in dem Boden befestigter Steinwürfel, auf dessen Oberfläche der Punkt durch einen Kreuzschnitt bezeichnet ist und über dem sich eine Pyramide erhebt, welche einen entsprechenden Visirbalken enthält (§. 86). Von den Dreieckspunkten dritter Ordnung sind immer zwei zugleich Punkte zweiter oder erster Ordnung, während der dritte fast immer ein natürliches Signal ist; muss man aber einen solchen dritten Punkt durch ein künsliches Signal bezeichnen, so kann man dazu einen der auf Seite 109 beschriebenen Holzpfeiler wählen.

Die Bezeichnung der Netzpunkte geschieht durch den Namen der Stelle, auf welcher sie sich befinden, z. B. Wendelstein, Peissenberg, Waldstein, Schneeberg, Kornbühl, Waldburg, Stauffen, Planegg u. s. w.

3. Die Messung und Ausgleichung der Winkel.

§. 314. Die Messung der Winkel des trigonometrischen Netzes geschieht mit den bessten acht- bis zehnzölligen Theodolithen, welche bei Dreieckspunkten erster Ordnung auf steinernen Postamenten, bei Punkten zweiter Ordnung aber auf einem der früher beschriebenen dreibeinigen Stative ruhen, welche zur Sicherheit auf drei in den Boden gerammte Pfähle gestellt und mit Gewichten beschwert werden. Ob die Winkel durch Repetition gemessen werden sollen oder nicht, hängt von der Anordnung des technischen Leiters der ganzen Vermessung ab; bedeutende Astronomen und Geodäten, wie Bessel und Hansen, verwerfen die Repetition und verlangen statt derselben folgendes Verfahren.

Nachdem nämlich der Theodolith centrisch und horizontal aufgestellt ist, wird bei feststehendem Horizontalkreise das Fernrohr nach und nach auf alle einzuschneidenden Dreieckspunkte eingestellt und jeder Nonius des Alhidadenkreises abgelesen. Ist eine solche Reihe von Einstellungen und Ablesungen, welche ein Gyrus genannt wird, zu Ende, so dreht man den Horizontalkreis um einen beliebigen Winkel von etwa 20^0 oder 30^0 und schlägt das Fernrohr durch. Hierauf stellt man den Horizontalkreis fest, richtet das Fernrohr wieder auf alle vorher anvisirten Signale, jedoch in umgekehrter Ordnung und liest die Nonien ab. Dieser Gyrus correspondirt dem vorausgegangenen. Auf ihn folgt wieder eine Drehung des Horizontalkreises, das Durchschlagen des Fernrohrs, dessen Einstellung in der ersten Richtung und Ablesen der Nonien. Zu diesem dritten Gyrus wird

der correspondirende vierte gemacht, und so fährt man fort, bis ein Punkt erster Ordnung etwa 60mal, ein Punkt zweiter Ordnung 20mal und ein Punkt dritter Ordnung 8mal gut beobachtet worden ist. Da man von den Punkten eines Dreiecks zweiter Ordnung alle Punkte dritter Ordnung, welche auf der Fläche jenes Dreiecks liegen, sehen kann, so schneidet man die Punkte dritter Ordnung sofort mit denen der zweiten Ordnung ein. Sollten sich jedoch dadurch die anzuvisirenden Punkte sehr häufen, so ist es gut, sie zu theilen und nur etwa 15 Punkte in einen Gyrus aufzunehmen. Bei jedem Gyrus soll man das Fernrohr wieder genau auf den Ausgangspunkt einstellen und, wenn sich hierbei eine Differenz in der Ablesung von mehr als 5 Sekunden zeigen sollte, den ganzen Gyrus verwerfen.

Alle Beobachtungen sind sofort deutlich in ein Tagebuch einzutragen und zwar mit Tinte. Sollte etwas fehlerhaft geschrieben worden seyn, so ist die Verbesserung so anzubringen, dass man die verbesserte Stelle noch lesen kann. Bei der thüringischen Landesvermessung sind nach der Anordnung Hansen's die Blätter der Beobachtungsbücher mit folgendem Schema bedruckt, das wir zur Erläuterung theilweise ausgefüllt haben.

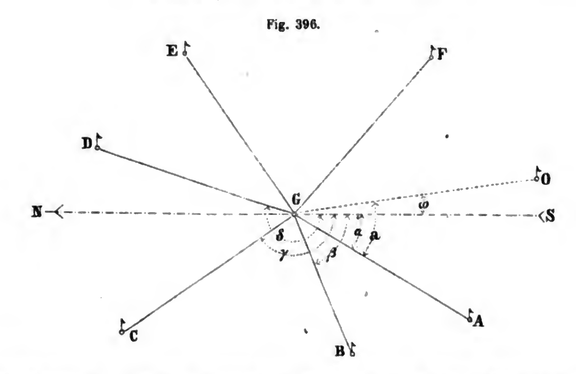
Station: Felsberg. Beobachter: Müller. Instrument: Theodolith Nr. 2.
Instrumenten-Centrum: 20′,23. Lage des Fernrohrs: erste. Gyrus Nr. 9.

Des Gegenstandes.		Ablesung.				Mittel.	Richtungs-winkel.	Bemer-kungen.
Nr.	Name.	Nonius I.	II.	III.	IV.			
VII.	Staufen	57° 18′ 20″,0	25″,2	18″	22″,0	57° 18′ 21″,3	36° 42′ 54″,0	Luft klar und ruhig.
X.	Brennbühl	121° 53′ 47″,0	50″,0	45″	51″,6	121° 53′ 48″,4	101° 18′ 21″,1	Luft klar aber bewegt.

Unter Richtungswinkeln versteht man die Azimuth- oder Horizontalwinkel, welche die Dreiecksseiten des Netzes mit der Mittagslinie bilden. Man zählt diese Winkel in der Regel von dem Südpunkte der genannten Linie an über Westen durch den ganzen Horizont bis zu 360°. Soll nun aus dem Mittel der Ablesungen, welches für den Nonius I berechnet und eingetragen ist, der Richtungswinkel einer Seite gefunden werden, so geschieht dieses am einfachsten durch Addition oder Subtraction eines dem Gyrus angehörigen constanten Winkels in folgender Weise.

Sind A, B, C, D, E (Fig. 396) die von G aus eingeschnittenen Punkte und bezeichnen a, b, c, d, e die für diese Punkte geltenden Mittel der Ablesungen; weiss man ferner, dass das Azimuth der Seite GA oder der Horizontalwinkel $SGA = \alpha$ ist, so wird die Ablesung a auf α gebracht werden, wenn man von ihr den constanten Winkel $\omega = a - \alpha$ abzieht. (In dem vorstehenden Schema ist $\alpha = 36^0\,42'\,54''$, $a = 57^0\,18'\,21'',3$ und $\omega =$

Fig. 396.



20° 35′ 27″, 3.) Durch Subtraction des Winkels ω von dem Mittel b liefert dieses dann aber auch die Richtungswinkel SGB, sowie $c - \omega = SGC$, $d - \omega = SGD$ und $e - \omega = SGE$ ist.

Das Azimuth α der Seite GA ist bei der Winkelmessung noch nicht genau bekannt, aber es lässt sich doch annähernd bestimmen, indem man durch Beobachtung der Sonne oder auf eine andere später anzugebende Weise die Richtung der Mittagslinie aufsucht. Kennt man α näherungsweise, so folgt daraus mit demselben Grad der Genauigkeit auch der Winkel ω. Werden die Messungen auf einem und demselben Standpunkte später wiederholt und hat man unterdessen das Azimuth der Seite GA genauer kennen gelernt, so behält man doch den ersten Werth von α bei, weil diese erste Bestimmung der Richtungswinkel lediglich den Zweck hat, die Messungsresultate der verschiedenen Gyren mit einander zu vergleichen. Bei der definitiven Berechnung des Netzes werden die früher gefundenen Richtungswinkel selbstverständlich verbessert.

Kommt es vor, dass sich bei der Winkelmessung der Theodolith nicht centrisch aufstellen lässt, so müssen die gemessenen Winkel nach §. 263 centrirt, d. h. um die in den Formeln (238) und (239) bestimmte Grösse δ verbessert werden. Um aber die Centrirung δ berechnen zu können, muss man die horizontale Entfernung e der Alhidadenaxe von der Axe des Stationspunktes wissen, wesshalb die Grösse e zu messen und neben der Bezeichnung „Instrumentencentrum" in das Beobachtungsjournal einzuschreiben ist. Ausserdem hat man auch den Stationspunkt anzuvisiren und in den Gyrus aufzunehmen. Ist dieser Punkt so nahe gelegen, dass man die Ocularröhre nicht weit genug ausziehen kann, um ihn zu sehen, so ist es nöthig, auf dem Theodolithenfernrohr ein Diopter anzubringen, wie dergleichen auf den Fernrohren der Kippregel und des Reichenbach'schen Distanzmessers (Fig. 123 und 203 auf S. 150 und 279) zu sehen sind. Die Visirlinie dieses

Diopters soll mit der des Fernrohrs in einer zum Horizontalkreise senkrechten Ebene liegen. Will man die hiefür nothwendige Prüfung und Berichtigung nicht vornehmen, so genügt es, auf einen entfernteren, jedoch mit dem Diopter noch gut anzuvisirenden Gegenstand nach einander das Diopter und das Fernrohr einzustellen, jedesmal die Nonien des Horizontalkreises abzulesen nnd hierdurch den Winkel zu bestimmen, um welchen die zur Einstellung des Diopters auf den Stationspunkt gehörige Ablesung verbessert werden muss. Wenn diese Einstellung auch nicht so scharf als die des Fernrohrs auf die entfernteren Punkte ist, so hat dieses wegen des geringen Werthes der Excentricität e keine nachtheiligen Folgen. Bei grösseren Werthen von e gebraucht man das Diopter ohnehin nicht.

Ueber die Ausgleichung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler in den Richtungswinkeln der einzelnen Dreiecksseiten, welche nach Vollendung der Winkelmessungen vorzunehmen ist, findet man vollständige Belehrung in Gerling's „Ausgleichungsrechnungen der practischen Geometrie“, Hamburg und Gotha 1843, auf die wir hiermit verweisen. Mit Bezug auf das in §. 280 bereits gegebene Beispiel einer Ausgleichungsrechnung ist hier nur noch zu bemerken, dass man auf jedem Netzpunkte einen sogenannten Horizontalabschluss macht, d. h. die Summe aller im Kreise herum gemessenen Winkel auf 360^0 ausgleicht. Haben alle Beobachtungen eines Gyrus gleiche Genauigkeit, so vertheilt man die Differenz zwischen der gefundenen Winkelsumme und 360^0 gleichheitlich, ausserdem aber nach der in §. 280 durch ein Beispiel erläuterten Methode der kleinsten Quadrate.

4. Die Berechnung der Dreiecksseiten.

§. 315. Schon die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecks erster Ordnung, welches immer als ein sphärisches zu betrachten ist, erfordert eine Berechnung der Dreiecksseiten, weil in dem Ausdrucke für den sphärischen Excess eines Dreiecks zwei Seiten desselben vorkommen; Hauptzweck der Seitenberechnung aber ist die Bestimmung der gegenseitigen und geographischen Lage der Netzpunkte. Für den ersteren Zweck genügt eine annähernde (provisorische), für den letzteren aber nur eine genaue (definitive) Berechnung. Bei der provisorischen Berechnung der Dreiecksseiten zum Behufe der Winkelausgleichung und Centrirung der Winkel setzt man in die entsprechenden trigonometrischen Formeln die Dreieckswinkel so ein, wie sie aus der Messung hervorgingen, also noch mit den zufälligen Fehlern behaftet; bei der definitiven Seitenberechnung aber werden nur die verbesserten Winkel angewendet.

Geht man bei der Berechnung der Dreiecke erster Ordnung, wie es seyn muss, von der unmittelbar gemessenen Basis aus, so hat man in dem ersten Dreiecke diese auf das Niveau der Messung reducirte (sphärische) Basis und die drei Winkel, deren Summe auf $180^0 + \varepsilon$ ausgeglichen ist, wobei ε den sphärischen Excess (§. 279) bezeichnet. Man könnte somit

die zwei anderen sphärischen Seiten des ersten Dreiecks entweder nach dem bekannten Satze über die Proportionalität der Sinusse der Seiten und Gegenwinkel, oder auch aus der ebenfalls sehr bekannten Relation zwischen einer Seite und den ihr anliegenden Winkeln berechnen. Diese Formeln wendet man aber nicht an, sondern bedient sich statt derselben des nachfolgenden Lehrsatzes von Legendre, welcher es möglich macht, die sphärischen geodätischen Dreiecke wie ebene zu berechnen. Statt des Legendre'schen Satzes könnte auch ein von Delambre angegebenes Verfahren angewendet werden, wonach jede Bogenseite auf ihre Sehne und jeder sphärische Winkel auf den Sehnenwinkel reducirt wird; allein dieses Verfahren ist umständlicher als das nachfolgende, wesshalb wir es hier nicht weiter berühren wollen.

§. 316. Lehrsatz. Ein geodätisches Dreieck darf wie ein ebenes behandelt werden, wenn man jeden seiner Winkel um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert.

Der nachfolgende Beweis rührt von Gauss her und ist in Crelle's Journal der Mathematik, Bd. 22, S. 96 enthalten.

Bezeichnet man den ganzen sphärischen Excess eines Kugeldreiecks mit 3ω, die Winkel dieses Dreiecks mit $A + \omega$, $B + \omega$, $C + \omega$ und die gegenüberliegenden Seiten beziehlich mit a, b, c, so erhalten zwei bekannte Formeln der sphärischen Trigonometrie folgende Gestalt:

$$\sin^2 {}^1\!/_2 a = \frac{\sin {}^3\!/_2\omega \sin (A - {}^1\!/_2\,\omega)}{\sin (B + \omega) \sin (C + \omega)}$$

$$\cos^2 {}^1\!/_2 a = \frac{\sin (B - {}^1\!/_2\omega) \sin (C - {}^1\!/_2\omega)}{\sin (B + \omega) \sin (C + \omega)}.$$

Aus der Verbindung dieser Formeln durch Potenzirung und Division folgt:

$$\frac{\sin^6 {}^1\!/_2 a}{\cos^2 {}^1\!/_2 a} = \frac{\sin^3 ({}^3\!/_2\omega) \sin^3 (A - {}^1\!/_2\omega)}{\sin^2 (B + \omega) \sin (B - {}^1\!/_2\omega) \sin^2 (C + \omega) \sin (C - {}^1\!/_2\omega)}$$

$$\frac{\sin^6 {}^1\!/_2 b}{\cos^2 {}^1\!/_2 b} = \frac{\sin^3 ({}^3\!/_2\omega) \sin^3 (B - {}^1\!/_2\omega)}{\sin^2 (A + \omega) \sin (A - {}^1\!/_2\omega) \sin^2 (C + \omega) \sin (C - {}^1\!/_2\omega)}.$$

Dividirt man diese Gleichungen in einander und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$\frac{\sin^3 ({}^1\!/_2 a) \cos ({}^1\!/_2 b)}{\cos {}^1\!/_2 a \sin^3 ({}^1\!/_2 b)} = \frac{\sin (A + \omega) \sin^2 (A - {}^1\!/_2\omega)}{\sin (B + \omega) \sin^2 (B - {}^1\!/_2\omega)}.$$

Macht man die linke Seite dieser Gleichung durch Division gleich 1 und multiplicirt beide Seiten mit dem Cubus des Verhältnisses von a sin B : b sin A, so erhält man

$$\left(\frac{a \sin B}{b \sin A}\right)^3 = \frac{a^3 \cos {}^1\!/_2 a \sin^3 ({}^1\!/_2 b)}{b^3 \sin^3 ({}^1\!/_2 a) \cos {}^1\!/_2 b} \times$$

$$\frac{\sin (A + \omega) \sin^2 (A - {}^1\!/_2\omega)}{\sin^3 A} \times \frac{\sin^3 B}{\sin (B + \omega) \sin^2 (B - {}^1\!/_2\omega)}$$

und somit, wenn man die rechte Seite dieser Gleichung = D setzt,

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \sqrt[3]{D}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (319)$$

Diese Formel ist strenge richtig und gilt für jedes sphärische Dreieck; geht man aber auf ein geodätisches Dreieck über, dessen Seiten im Vergleich zum Erdhalbmesser sehr klein sind (indem sie in der Regel kaum den tausendsten Theil desselben betragen), so wird jeder der drei Factoren, aus denen der Ausdruck für D besteht, so nahe der Einheit gleich, dass die Abweichungen hievon nur noch Grössen vierter Ordnung sind, wenn die Dreiecksseiten a, b, c als Grössen erster Ordnung angesehen werden. Unter dieser Voraussetzung wird also

$$\sqrt[3]{D} = 1$$

und daher auch für das geodätische Dreieck:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (320)$$

Nennt man die sphärischen Winkel des geodätischen Dreiecks A', B', C' und setzt man $3\omega = \varepsilon$, so ist

$$A = A' - \tfrac{1}{3}\varepsilon, \; B = B' - \tfrac{1}{3}\varepsilon, \; C = C' - \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

und daher nach der letzteren Gleichung:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin (A' - \tfrac{1}{3}\varepsilon)}{\sin (B' - \tfrac{1}{3}\varepsilon)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \quad (321)$$

d. h. es gilt für ein solches Dreieck der Satz von der Proportionalität der Seiten und Sinusse der Gegenwinkel, welcher für ebene Dreiecke bekannt ist, wenn man nur jeden sphärischen Winkel um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert.

Um den Grad der Genauigkeit vorstehender Formel in einem bestimmten Falle zu übersehen, nehmen wir an, in einem geodätischen Dreiecke A'B'C' sey $C' = 90^0$ und $a = b = \frac{r\pi}{180} = 1^0 = 15$ Meilen. Berechnet man die Winkel A' und B' nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie, welche

$$\operatorname{tg} A' = \operatorname{tg} B' = \frac{\cot 45^0}{\cos a}$$

liefert, so wird

$$A' = B' = 45^0\,0'\,15'',708;$$

und bestimmt man die dritte Seite c aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c = \operatorname{tg} a \cos B',$$

so ergibt sich

$$c = 1^0\,24'\,51'',0396.$$

Der sphärische Excess ε des Dreiecks A'B'C' findet sich nach der Formel (273) gleich

$$\varepsilon = \frac{ab \sin c'}{2r^2 \operatorname{tg} 1''} = 31'',416,$$

womit erhalten wird

$$A = A' - \tfrac{1}{3}\varepsilon = 45^0\ 0'\ 5'',236,$$
$$B = B' - \tfrac{1}{3}\varepsilon = 45^0\ 0'\ 5'',236,$$
$$C = C' - \tfrac{1}{3}\varepsilon = 89^0 59' 49'',528.$$

Schreibt man die Formel (321) so um, dass statt b die Seite c darin vorkommt, so wird

$$c = a \frac{\sin (C' - \frac{1}{3} \varepsilon)}{\sin (A' - \frac{1}{3} \varepsilon)}$$

und wenn man die eben gefundenen Winkelwerthe substituirt, so folgt

$$c = 1^0 24' 51'',0396,$$

also derselbe Werth, welcher oben erhalten wurde.

Abweichungen in den Werthen von c würden sich erst zeigen, wenn die geodätischen Dreiecke noch grösser wären als das, welches der Berechnung unterworfen wurde.

§. 317. Aufgabe. Eine Controle der Messung und Berechnung der Dreiecksseiten zu bezeichnen.

Das Verfahren für die definitive Berechnung der Dreiecke erster Ordnung stellt sich nun so. Nachdem eine provisorische Berechnung der Dreiecksseiten vorliegt und mit dieser die Winkel ausgeglichen sind, rechnet man, von der Basis ausgehend und den Legendre'schen Satz anwendend, ein Dreieck nach dem andern wie ein ebenes. Ist auf diese Weise das Hauptnetz durchgerechnet, so beginnt man die Rechnung von Neuem, wobei zwar wiederum von der Basis ausgegangen, aber ein anderes an dieser liegendes Dreieck als erstes angesehen wird, um eine andere Reihenfolge der Dreiecke zu erhalten. An diese Rechnung kann man noch eine ähnliche dritte anschliessen, wenn die aus den beiden ersten erhaltenen doppelten Werthe der Dreiecksseiten merklich von einander abweichen sollten.

Stimmen die durch verschiedene Berechnungen erhaltenen Seitenlängen gut überein, so ist dieses zwar ein Beweis für die richtige Winkelmessung und die Berechnung, aber noch nicht für die Vollkommenheit des Hauptnetzes; denn diese Uebereinstimmung wäre auch bei einem bedeutenden Fehler in der Basis möglich, da sie die Grundlage der beiden Rechnungen bildet. Um sich völlig beruhigen zu können, ist es nöthig, das Hauptnetz an eine zweite unmittelbar gemessene Basis anzuschliessen. Aus diesem Netze lässt sich diese zweite Basis, welche eine Dreiecksseite bildet, berechnen, und da sie auch mit derselben Sorgfalt wie die erste Basis gemessen wurde, so gibt die Vergleichung der berechneten und gemessenen Längen der zweiten Basis, welche Verificationsbasis heisst, Aufschluss über die Genauigkeit der Gesammtarbeit.

Für die bayerische Landesvermessung hat man drei Basen gemessen: eine Hauptbasis zwischen München und Erding, und zwei Verificationsbasen: die erste zwischen Nürnberg und Erlangen und die zweite in der Rheinpfalz zwischen Speyer und Oggersheim. Alle drei haben recht beruhigende Resultate bezüglich des Hauptnetzes geliefert. Eine weitere Probe hat dieses Netz durch den Anschluss an die württemberger Basis zwischen dem Schlosse Solitude und der Stadt Ludwigsburg bestanden. Diese Basis wurde durch unmittelbare und auf die Meeresfläche reducirte Messung = 40 118,718 P. Fuss, durch Rechnung aus dem ebenfalls auf den Meeresspiegel reducirten

bayerischen Hauptnetze aber = 40 118, 90 P. Fuss gefunden. Beide Längen sind also nur um 1,8 Dezimalzolle oder um weniger als $\frac{1}{200\,000}$ ihrer ganzen Länge verschieden.

5. Die Coordinatenberechnung der Netzpunkte.

§. 318. Durch die definitive Berechnung der Dreiecksseiten ist die gegenseitige Lage aller Netzpunkte bestimmt. Soll aber die Lage dieser Punkte gegen den Aequator und einen bestimmten Meridian der Erde angegeben werden, so muss erst dieser Meridian festgesetzt und dessen Lage gegen den Hauptmeridian, worauf die geographischen Längen bezogen werden, bekannt seyn. Der Meridian, auf welchen man die Netzpunkte zunächst bezieht, geht in der Regel durch die Sternwarte des Landes, deren geographische Lage genau bekannt ist, und welche desshalb als astronomischer Punkt der Landesvermessung benützt wird. Es ist jedoch nicht gerade nothwendig, dass man die Netzpunkte auf den Meridian der Sternwarte bezieht, es kann hiezu auch der Meridian eines andern genau bestimmten Netzpunktes, welcher dann der Normalpunkt heisst, gewählt werden, wie z. B. für die bayerische Landesvermessung die Spitze des nördlichen Thurms der Frauenkirche in München. Senkrecht zu diesem Meridian denkt man sich durch den Normalpunkt einen grössten Kreis der Erdkugel gelegt, welcher das Perpendikel genannt wird und in der Richtung Ostwest liegt. Der Meridian und das Perpendikel des Normalpunktes, auf das Niveau der Messung projicirt gedacht, stellen nunmehr kreisförmige Coordinatenaxen vor und auf diese werden alle Punkte der Vermessung durch kreisförmige Abscissen und Ordinaten bezogen.[1] Die Abscissen sind Meridianbögen und werden entweder nach Süden oder nach Norden hin als positiv betrachtet. Die Ordinaten sind grösste Kreise, die auf dem Meridian des Normalpunktes senkrecht stehen und folglich ihre Pole in dem Aequator der Erde haben, ihre positive Richtuug kann nach Osten oder Westen laufen: wir werden für die Ordinaten die Richtung vom Normalpunkt nach Westen und für die Abscissen jene vom Normalpunkte nach Süden als die positive annehmen.

Bei kleineren Dreiecknetzen, für welche man den von ihnen eingeschlossenen Theil der Erdkugel als eben ansehen darf, werden selbstverständlich die Axen und die Coordinaten senkrecht auf einander stehende gerade Linien.

§. 319. Aufgabe. Ein für eine Landesvermessung hergestelltes Dreiecknetz hat eine so geringe Ausdehnung, dass es als eben angesehen werden kann; man soll aus den gegebenen Bestimmungsstücken die Coordinaten der Netzpunkte berechnen.

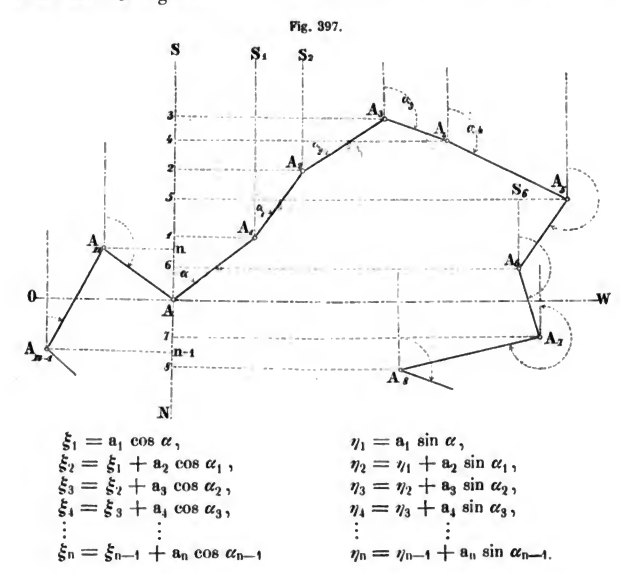
[1] Statt dieser Linear-Coordinaten gebrauchen manche Geodäten auch Polarcoordinaten, wobei der Normalpunkt als Pol und dessen Meridian als Axe angesehen wird.

Es sey die vom Normalpunkte A ausgehende erste Dreiecksseite $A A_1 = a_1$, die anstossende zweite $A_1 A_2 = a_2$, die dritte $A_2 A_3 = a_3$ u. s. f., die n^{te} $A_{n-1} A_n = a_n$. Ist das Azimuth der Seite a_1 (vom Südpunkte über West bis zu 360^0 gezählt) in $A = \alpha$, so ist es in $A_1 = 180^0 + \alpha$; setzt man ferner den ersten Richtungswinkel der Seite a_2 in $A_1 = \alpha_1$, so ist der zugehörige zweite im Punkte $A_2 = 180^0 + \alpha_1$. Für die Seite a_3 hat man den ersten Richtungswinkel in $A_2 = \alpha_2$ und den zweiten in $A_3 = 180^0 + \alpha_2$, und so fortfahrend erhält man für a_n den ersten Richtungswinkel $= \alpha_{n-1}$ und den zweiten $= 180^0 + \alpha_{n-1}$.

Ueber die Richtungswinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots . \alpha_n$ ist zu bemerken, dass sie aus den nach §. 314 bei der Messung bestimmten Richtungswinkeln erhalten werden, wenn man an diesen die nöthigen Reductionen δ wegen der früher nur annähernd bekannten Lage des Meridians anbringt. Diese Lage ist aber jetzt, nachdem alle Dreieckswinkel ausgeglichen sind und das Azimuth von a_1 genau bekannt ist, zunächst für a_2, hiermit für a_3, damit für a_4 u. s. f. mit a_{n-1} für a_n bekannt.

Bezeichnen die Buchstaben $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \ldots \xi_n$ die Abscissen und $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \ldots \eta_n$ die Ordinaten der Netzpunkte $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots A_n$, so ist nach der Figur 397:

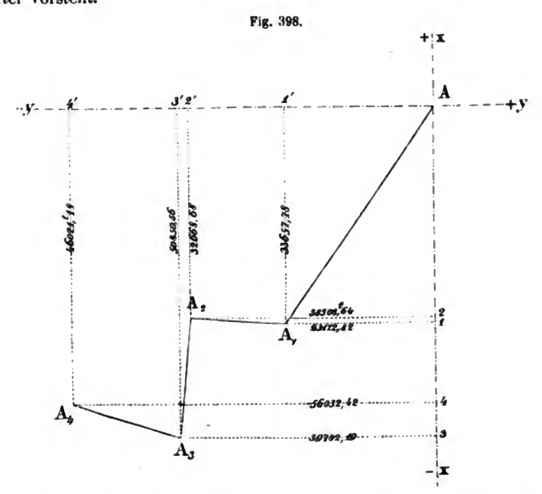
Fig. 397.



$$\xi_1 = a_1 \cos \alpha, \qquad \eta_1 = a_1 \sin \alpha,$$
$$\xi_2 = \xi_1 + a_2 \cos \alpha_1, \qquad \eta_2 = \eta_1 + a_2 \sin \alpha_1,$$
$$\xi_3 = \xi_2 + a_3 \cos \alpha_2, \qquad \eta_3 = \eta_2 + a_3 \sin \alpha_2,$$
$$\xi_4 = \xi_3 + a_4 \cos \alpha_3, \qquad \eta_4 = \eta_3 + a_4 \sin \alpha_3,$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\xi_n = \xi_{n-1} + a_n \cos \alpha_{n-1} \qquad \eta_n = \eta_{n-1} + a_n \sin \alpha_{n-1}.$$

Theils um die practische Anwendung dieser Formeln zu zeigen, theils aber auch um nachzuweisen, dass die hieraus erhaltenen Werthe von den genaueren sphärischen Coordinaten, welche im folgenden Paragraph berechnet werden, nur sehr wenig abweichen, lassen wir hier ein aus der Gradmessung von Bessel und Baeyer entlehntes und auch von Hansen in seiner Instruction für die thüringische Triangulation benütztes Beispiel folgen. Zur leichteren Uebersicht der Lage der Punkte, welche in demselben vorkommen, mag die Fig. 398 dienen, in welcher $+ x\ A + y$ das positive Viertel vorstellt.

Fig. 398.



Netzpunkt.	Dreiecksseite.	Logarithmus derselben.	Richtungswinkel.
	Trunz (A).		
Galtgarben (A_1)	$40863^t,50$	4,6113356	214° 32′ 48″,32
	Galtgarben (A_1).		
Trunz (A)	. . . .	. . . .	34° 34′ 50″,72
Kondehnen (A_2)	$15168^t,11$	4,1809313	273° 46′ 22″,32
	Kondehnen (A_2).		
Galtgarben (A_1)	. . . .	. . . .	93° 11′ 2″,30
Lattenwalde (A_3)	$18241^t,50$	4,2610605	184° 4′ 42″,61
	Lattenwalde (A_3).		
Kondehnen (A_2)	. . . .	. . . .	4° 50′ 27″,14
Gilge (A_4)	$16952^t,67$	4,2292381	286° 45′ 31″,70

Für den Normalpunkt A (Trunz) ist die geographische Breite $\varphi = 54^0 13' 11'',47$ und das Azimuth der Seite AA_1, (Trunz-Galtgarben) $\alpha = 214^0 32' 48'', 32$. Damit nun die in Galtgarben (A_1) stattfindenden Richtungswinkel auf den richtigen Meridian bezogen werden, ist an denselben eine Verbesserung anzubringen, welche sich wie folgt ergibt: Offenbar muss nach Fig. 397 $S_1 A_1 A_2 = \alpha_1 = 214^0 32' 48'',32 - 180^0 = 34^0 32' 48'', 32$ seyn, während nach der früheren Bestimmung laut obiger Tabelle der um δ_1 fehlerhafte Richtungswinkel

$$\omega + \delta_1 = 34^0 34' 50'',72$$

ist. Hieraus folgt die Verbesserung δ_1 für den Punkt $A_1 = 2' 2'',40$, und es ist dieser Betrag von jedem der Winkel zu subtrahiren, wesshalb der eine von $34^0 34' 50'',72$ in $34^0 32' 48'',32$ und der andere von $273^0 46' 22'', 32$ in $272^0 44' 19'',92$ übergeht. Dieser letzte Werth sey $= \omega_1$.

Für den Punkt A_2 (Kondehnen) findet man die zu addirende Verbesserung $\delta_2 = 33' 17'',62$, wodurch der in der Tabelle aufgeführte Richtungswinkel von $93' 11' 2'',30$ in $93^0 44' 19'',92$ und der von $184^0 4' 42'',61$ in $184^0 38' 0'',23$ verwandelt wird. Der letzte Werth sey $= \omega_2$.

Für den Punkt A_3 (Lattenwalde) ist die zu subtrahirende Verbesserung $\delta_3 = 12' 26'',91$, wesshalb der Richtungswinkel von $4^0 50' 27'',14$ in $4^0 38' 0'',23$ und der von $286^0 45' 31'',70$ in $286^0 33' 4'',79$ übergeht. Der letzte Werth sey $= \omega_3$.

Mit Hilfe der verbesserten Richtungswinkel und der gegebenen Dreiecksseiten findet man

die Abscisse $\xi_1 = 40863,^t 50 \cos 214^0 32' 48'',32 = -33657,^t 78$
„ Ordinate $\eta_1 = 40863,^t 50 \sin 214^0 32' 48'',32 = -23172,^t 82$
„ Abscisse $\xi_2 = -33657,^t 78 + a_2 \cos \omega_1 = -32688,^t 68$
„ Ordinate $\eta_2 = -23172,^t 82 + a_2 \sin \omega_1 = -38308,^t 64$
„ Abscisse $\xi_3 = -32688,^t 68 + a_3 \cos \omega_2 = -50850,^t 56$
„ Ordinate $\eta_3 = -38308,^t 64 + a_2 \sin \omega_2 = -39782,^t 19$
„ Abscisse $\xi_4 = -50850,^t 56 + a_4 \cos \omega_3 = -46021,^t 18$
„ Ordinate $\eta_4 = -39782,^t 19 + a_4 \sin \omega_3 = -56032,^t 42$

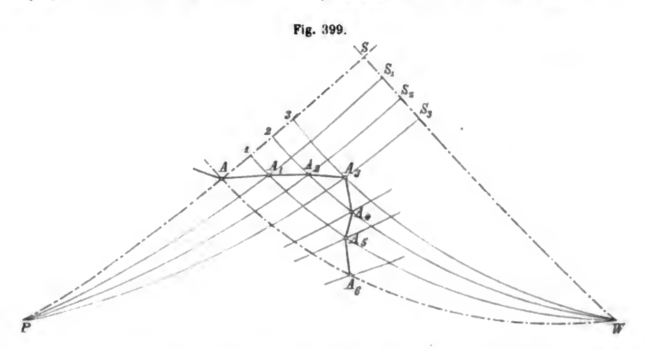
Nach diesen Coordinatenwerthen ist die Fig. 398 construirt.

§. 320. Aufgabe. Es sollen aus den berechneten Dreiecksseiten, der bekannten geographischen Breite des Normalpunktes und dem Azimuth einer Seite die Linearcoordinaten eines sphärischen Dreiecknetzes entwickelt werden.

Stellt in Fig. 399 der Bogen PS den Meridian des Normalpunktes A und AW das Perpendikel dieses Punktes, folglich SP die Abscissen- und AW die Ordinatenaxe der sphärischen Linearcoordinaten vor; sind ferner A_1, A_2, A_3, A_4 ... aufeinander folgende Netzpunkte, deren Coordinaten bestimmt werden sollen; haben die Kreisbögen AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 .... beziehlich die Längen a_1, a_2, a_3, a_4 ....; ist φ die geographische Breite des Normalpunkts A und α das Azimuth SAA_1 der Dreiecksseite AA_1 in dem Punkte A; zieht man durch A_1, A_2, A_3, A_4 .... Meridiane und

Perpendikel und nennt die hierdurch erzeugten Coordinaten dieser Punkte beziehlich x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; ....; sowie die Azimuthe der Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ .... in den Punkten A_1, A_2, A_3, ... nach einander $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ....; und heissen endlich die sphärischen Winkel $A A_1 P$, $A_1 A_2 P$, $A_2 A_3 P$ ... $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ..., die Complemente AP, $A_1 P$, $A_2 P$, $A_3 P$ ....

Fig. 399.



der geographischen Breiten von A, A_1, A_2, A_3 ... b, b_1, b_2, b_3 ....; und die sphärischen Winkel APA_1, $A_1 P A_2$, $A_2 P A_3$ .... μ_1, μ_2, μ_3 ....: so ist in dem sphärischen Dreiecke $A A_1 P$ bekannt: die Seite $AP = b = 90^0 - \varphi$;

die Seite $A A_1 = a_1$ im Längenmasse und $= \mathfrak{a}_1 = 206265 \frac{a_1}{r}$ Sekunden im Gradmasse; endlich der Winkel $A_1 A P = 180^0 - \alpha$.

Aus diesen drei Stücken findet man mit Hilfe der Gauss'schen Formeln:

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 (\beta_1 - \mu_1) = \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \alpha \sin {}^1\!/_2 (b - \mathfrak{a}_1)}{\sin {}^1\!/_2 (b + \mathfrak{a}_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (322)$$

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 (\beta_1 + \mu_1) = \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 \alpha \cos {}^1\!/_2 (b - \mathfrak{a}_1)}{\cos {}^1\!/_2 (b + \mathfrak{a}_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (323)$$

Hat man hiermit $\beta_1 - \mu_1 = \delta_1$ und $\beta_1 + \mu_1 = \sigma_1$ berechnet, so wird

$$\beta_1 = {}^1\!/_2 (\sigma_1 + \delta_1) \text{ und } \mu_1 = {}^1\!/_2 (\sigma_1 - \delta_1)$$

gefunden. Ist aber β_1 bekannt, so hat man auch das Azimuth der Seite a_1 im Punkte A_1 oder den über West gezählten Winkel $S_1 A_1 A$ gleich

$$\alpha' = 180^0 + \beta_1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (324)$$

Zieht man hievon den ebenfalls über West gezählten Dreieckswinkel $A_2 A_1 A$, welcher die Differenz $A - A_2$ der in A_1 gemessenen und in dem Winkeljournale enthaltenen Richtungswinkel nach A und A_2 ist, ab, so wird das Azimuth

$$\omega_1 = \alpha' - (A - A_2) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (325)$$

Man sieht nun leicht ein, dass die bisherige Betrachtung auch für die Seite $A_1 A_2$ gilt, wenn vorher nur noch der Bogen b_1 oder sein Gradmass $\mathfrak{b}_1$

bestimmt ist, was aber sofort aus der Proportion $\sin \mathfrak{a}_1 : \sin \mathfrak{b}_1 = \sin \mu_1 : \sin \alpha$ erhalten wird, indem diese liefert

$$\sin \mathfrak{b}_1 = \frac{\sin \mathfrak{a}_1 \sin \alpha}{\sin \mu_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (326)$$

Die Abscisse x_1 und die Ordinate y_1 des Punktes A_1 erhält man aus dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke $A A_1 1$, in welchem die Hypotenuse $A A_1 = a_1$ oder $\mathfrak{a}_1$ und der Winkel $A_1 A 1 = \alpha$ bekannt ist. Nennt man den Winkel, welcher zu dem Bogen x_1 gehört, $\mathfrak{x}_1$, und jenen, welcher dem Bogen y_1 angehört, $\mathfrak{y}_1$, so dienen zur Berechnung von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ die beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \mathfrak{x}_1 = \operatorname{tg} \mathfrak{a}_1 \cos \alpha \text{ und } \sin \mathfrak{y}_2 = \sin \mathfrak{a}_1 \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (327)$$

und folglich zur Bestimmung der Bögen x_1 und y_1 die Formeln:

$$x_1 = \frac{r \mathfrak{x}_1}{260265} \text{ und } y_1 = \frac{r \mathfrak{y}_1}{260265}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (328)$$

wobei jedoch $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ in Sekunden ausgedrückt seyn müssen.

Die Abscisse $x_2 = A 2$ und die Ordinate $A_2 2$ des Punktes A_2 folgen aus dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke $2 A_2 P$, in welchem bekannt ist die Hypotenuse $A_2 P = \mathfrak{b}_2$ und der Winkel $A P A_2 = \mu_1 + \mu_2$. Es ist somit

$$\operatorname{tg} \mathfrak{x}_2 = \operatorname{tg} \mathfrak{b}_2 \cos (\mu_1 + \mu_2) \text{ und } \sin \mathfrak{y}_2 = \sin \mathfrak{b}_2 \sin (\mu_1 + \mu_2) \quad (329)$$

und folglich, wenn man die Bögen x_2 und y_2 selbst will:

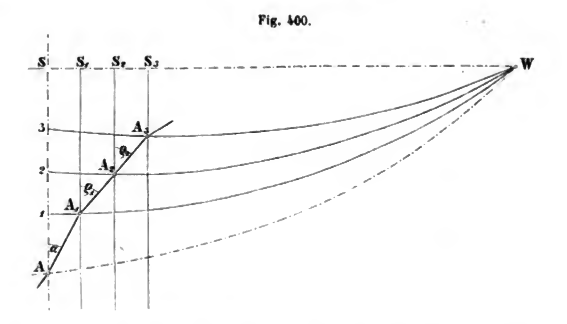
$$x_2 = \frac{r \mathfrak{x}_2}{206265} \text{ und } y_2 = \frac{r \mathfrak{y}_2}{206265}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (330)$$

Auf gleiche Weise findet man $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{y}_3$ und x_3, y_3, $\mathfrak{x}_4$, $\mathfrak{y}_4$ und x_4, y_4 u. s. w. Auch ist klar, dass die Winkel $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3 \ldots$ die Complemente der geographischen Breiten der Punkte A_1, A_2, $A_3 \ldots.$ vorstellen und dass also diese Breiten selbst gleich $90^0 - \mathfrak{b}_1$, $90^0 - \mathfrak{b}_2$, $90^0 - \mathfrak{b}_3$ etc. wären, wenn keine Rücksicht auf die elliptische Gestalt der Erdmeridiane genommen würde. Diese Rücksicht darf jedoch nicht ausser Acht gelassen werden, wesshalb weiter unten noch besonders von den geographischen Lagen der Netzpunkte die Rede ist. Dagegen stellen die Winkel μ_1, μ_2, $\mu_3 \ldots.$ die wirklichen Längenunterschiede zwischen A und A_1, A_1 und A_2, A_2 und A_3 etc. vor, da hierauf die elliptische Gestalt der Erdmeridiane fast gar keinen Einfluss hat, wenigstens so lange nicht, als nicht Netze zu berechnen sind, welche die bis jetzt berechneten an Ausdehnung weit übertreffen.

Obwohl die vorstehenden Formeln nicht sehr zusammengesetzt sind, so veranlassen sie doch sehr viel Rechnung, wesshalb man es vorzieht, statt dieser strengen Formeln Näherungsausdrücke anzuwenden, welche einen hinreichenden Grad von Genauigkeit gewähren. Die nachfolgend entwickelten sind bei der Berechnung des bayerischen und württembergischen Hauptnetzes zur Anwendung gekommen.

Es ist keineswegs nothwendig, die Richtungswinkel der Dreiecksseiten auf die Mittagslinien ihrer Endpunkte zu beziehen, wie wir bisher gethan haben; man kann vielmehr statt der Meridiane solche Curven wählen, welche

Fig. 400.



dem Hauptmeridian parallel laufen, d. h. auf allen Ordinatenkreisen gleich weit von diesem Meridiane abstehen. In der Fig. 400 stellt SA den Hauptmeridian, $S_1 A_1$ eine durch A_1 und $S_2 A_2$ eine durch A_2 gehende Richtungscurve vor. Die Richtungswinkel der Seiten $A A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ etc. sind hier beziehlich α, ϱ_1, ϱ_2 etc. und die zu lösende Aufgabe ist folgende:

Es sind die Coordinaten x_1 und y_1 eines Punktes A_1 nebst der Grösse a_2 und dem Richtungswinkel ϱ_1 der Seite $A_1 A_2$ gegeben; man sucht erstens die Coordinaten x_2 und y_2 des Punktes A_2, und zweitens den Richtungswinkel ϱ'' der Seite $A_1 A_2$ in dem Punkte A_2.

Hiernach sind in dem sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 W$ bekannt: die Seite $A_1 W$ = dem Bogen $W A_1 1$ weniger y_1 oder auf eine Kugel vom Halbmesser 1 reducirt $= 90^0 - \mathfrak{y}_1$; die Seite $A_1 A_2$ = dem Bogen a_2 oder auf eine Kugel vom Halbmesser 1 reducirt $= \mathfrak{a}_2$; und der Winkel $A_2 A_1 W = 90^0 - \varrho_1$. Da der Bogen $A_2 W = 90^0 - \mathfrak{y}_2$ ist, so findet die Gleichung statt:

$$\sin \mathfrak{y}_2 = \cos \mathfrak{a}_2 \sin \mathfrak{y}_1 + \sin \mathfrak{a}_2 \cos \mathfrak{y}_1 \sin \varrho_1$$

und weil $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ und $\mathfrak{a}_2$ nur sehr kleine Theile des Erdumfangs sind, so kann man in dieser Gleichung mit hinreichender Annäherung setzen:

$$\sin \mathfrak{y} = \mathfrak{y} - \frac{1}{6} \mathfrak{y}_3 = \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6 r^3},$$

$$\cos \mathfrak{y} = 1 - \frac{1}{2} \mathfrak{y}_2 = 1 - \frac{y^2}{2 r^2};$$

denn indem man diese Werthe für $\sin \mathfrak{y}$ und $\cos \mathfrak{y}$ einführt, vernachlässigt man erst Grössen, deren Nenner die vierte Potenz vom Erdhalbmesser r enthalten.

Führt man die Rechnung durch und setzt zur Abkürzung

$$a_2 \cos \varrho_1 = u, \quad a_2 \sin \varrho_1 = v,$$

so erhält man zunächst die gesuchte Ordinate

$$y_2 = y_1 + v - \frac{u^2}{2 r^2} \left(y_1 + \frac{1}{3} v \right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (331)$$

Berücksichtigt man, dass nach Seite 559 der Ausdruck $y_1 + v = y_1 + a_2 \sin \varrho_1 = \eta_2$ ist, so folgt aus der vorstehenden Gleichung: dass die sphärische Ordinate y_2 aus der ebenen η_2 erhalten wird, wenn man an dieser die von der Erdkrümmung herrührende Verbesserung

$$x = -\frac{u^2}{2r^2}\left(y_1 + \frac{1}{3}v\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (332)$$

anbringt. Dabei versteht es sich von selbst, dass x einen positiven Werth erlangt, wenn der Factor $y_1 + \frac{1}{3}v$ negativ ist.

Darf man y_2 als bekannt voraussetzen, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 W$, wenn man sich dasselbe auf eine Kugel vom Halbmesser 1 reducirt denkt und erwägt, dass der Winkel $A_1 W A_2 = \varphi_1 = \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1$ ist, weiter:

$$\sin(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) = \frac{\sin \mathfrak{a}_2 \cos \varrho_1}{\cos \mathfrak{y}_2}.$$

Setzt man auch hier wieder für $\sin(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)$, $\sin \mathfrak{a}_2$ und $\cos \mathfrak{y}_2$ die zwei ersten Glieder der ihnen entsprechenden Reihen und entwickelt hieraus den dem Erdhalbmesser r angehörigen Bogen x_2, so ist das Ergebniss dieser Entwickelung folgendes:

$$x_2 = x_1 + u + \frac{u}{2r^2}\left(y_2{}^2 - \frac{1}{3}v^2\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (333)$$

Da nun $x_1 + u = x_1 + a_2 \cos \varrho_1 = \xi_2$, so lehrt diese Gleichung: dass die sphärische Abscisse x_2 gleich ist der ebenen ξ_2 nebst einer von der Erdkrümmung herrührenden Verbesserung

$$\lambda = \frac{u}{2r^2}\left(y_2{}^2 - \frac{1}{3}v^2\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (334)$$

Das Vorzeichen von λ hängt theils von u, d. h. von $\cos \varrho_1$, theils von dem Werthe des in Klammern eingeschlossenen Factors ab.

Sucht man endlich aus dem schon zweimal benützten sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 W$ den Winkel bei A_2, welcher $= \varrho'' - 90^0$ ist, durch die bekannten Winkel $\mathfrak{a}_2$, ϱ_1, $\mathfrak{y}_1$ auszudrücken und führt abermals die erlaubten Näherungswerthe für $\sin \mathfrak{y}$ und $\cos \mathfrak{y}$ ein, so erhält man nach einigen Umformungen schliesslich:

$$\varrho'' = 180^0 + \varrho_1 - \frac{u}{r^2 \sin 1''}\left(y_1 + \frac{1}{2}r\right). \quad . \quad . \quad . \quad (335)$$

Für ein ebenes Dreiecknetz ist der Richtungswinkel ω'' der Seite $A_1 A_2$ am Endpunkte $A_2 = 180^0 + \varrho_1$; daher folgt aus dem vorstehenden Ausdrucke: dass der sphärische Richtungswinkel ϱ'' aus dem ebenen ω'' erhalten wird, wenn man diesen mit der Grösse

$$\tau = -\frac{u}{r^2 \sin 1''}\left(y_1 + \frac{1}{2}r\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (336)$$

verbessert, wobei τ sowohl positiv als negativ seyn kann.

Zur näheren Erläuterung des Gebrauchs der Formeln (331) bis (335)

mag folgende Berechnung einiger Dreiecke der württembergischen Landesvermessung dienen.

1. Erste Seite $A A_1 = a_1 = 9592^t,921$
Richtungswinkel $S A A_1 = \alpha = 169^0\ 12'\ 59'',88$

$$\log r = 6,5155492$$

$$\log \frac{1}{2 r^2} = 6,66787 - 20$$

$$\log \frac{1}{6 r^2} = 6,19075 - 20$$

a) Die Ordinate $y_1 = y_0 + v - \frac{u^2 y_0}{2 r^2} - \frac{u^2 v}{6 r^2}$

$y_0 = \ldots\ldots\ldots \quad 0^t,000$
$+ v = a_1 \sin\alpha = \ldots \quad + 1794^t,798$
$- \frac{u^2 y_0}{2 r^2} = \ldots\ldots \quad 0^t,000$
$- \frac{u^2 v}{6 r^2} = \ldots\ldots - \quad 0^t,0025$

$y_1 = + 1794^t,796$

b) Die Abscisse $x_1 = x_0 + u + \frac{u\, y_1^{\,2}}{2 r^2} - \frac{u\, v^2}{6 r^2}$

$x_0 = \ldots\ldots\ldots \quad 0^t,000$
$+ u = a_1 \cos\alpha = \ldots - 9423^t,527$
$+ \frac{u\, y_1^{\,2}}{2 r^2} = \ldots\ldots - \quad 0^t,0014$
$- \frac{u\, v^2}{6 r^2} = \ldots\ldots + \quad 0^t,0015$

$x_1 = - 9423^t,527$

c) Der Richtungswinkel $\varrho' = 180^0 + \alpha - \frac{u\, y_0}{r^2 \sin 1''} - \frac{u\, v}{2 r^2 \sin 1''}$

$180^0 = \ldots\ldots + 180^0\ 0'\ 0''$
$+ \varrho' = \alpha = \ldots + 169^0\ 12'\ 59'',88$
$- \frac{u\, y_0}{r^2 \sin 1''} = \ldots \quad 0^0\ 0'\ 0''$
$- \frac{u\, v}{2 r^2 \sin 1''} = \ . + \quad 0^0\ 0'\ 0'',16$

$\varrho' = 349^0\ 13'\ 0'',04$

2. Zweite Seite $A_1 A_2 = a_2$; $\log a_2 = 4,3136942$
Dreieckswinkel $A A_1 A_2 = \ldots\ldots 132^0\ 54'\ 27'',70$
Der vorige Richtungswinkel $\varrho' = \ldots 349^0\ 13'\ 0'',04$

Der neue Richtungswinkel $S_1 A_1 A_2 = \varrho_1 = 122^0\ 7'\ 27'',74$

a) Die Ordinate $y_2 = y_1 + v - \frac{u^2 y_1}{2 r^2} - \frac{u^2 v}{6 r^2}$

$$y_1 = \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad + \; 1794^t{,}7955$$
$$+ \, v = a_2 \sin \rho_1 = \quad . \quad + \; 17439^t{,}1040$$
$$- \frac{u^2 y_1}{2 r^2} = \quad . \; . \; . \; . \; . \quad - \qquad 0^t{,}0080$$
$$- \frac{u^2 v}{6 r^2} = \quad . \; . \; . \; . \; . \quad - \qquad 0^t{,}0324$$
$$y_2 = + \; 19233^t{,}859$$

b) Die Abscisse $x_2 = x_1 + u + \frac{u \, y_2{}^2}{2 r^2} - \frac{u \, v^2}{6 r^2}$

$$x_1 = . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad - \; 9423^t{,}527$$
$$+ \, u = a_2 \cos \rho_1 = . \; . \; . \quad - \; 10949^t{,}870$$
$$+ \frac{u \, y_2{}^2}{2 r^2} = . \; . \; . \; . \; . \; . \quad - \qquad 0^t{,}188$$
$$- \frac{u \, v^2}{6 r^2} = . \; . \; . \; . \; . \; . \quad + \qquad 0^t{,}052$$
$$x_2 = - \; 20373^t{,}533$$

c) Der Richtungswinkel $\rho'' = 180^0 + \rho_1 - \frac{u \, y_1}{r^2 \sin 1''} - \frac{u \, v}{2 r^2 \sin 1''}$

$$180^0 = \quad . \; . \; . \; . \quad + \; 180^0 \; 0' \;\; 0''$$
$$+ \, \rho_1 = \quad . \; . \; . \; . \; . \quad + \; 122^0 \; 7' \; 27'',74$$
$$- \frac{u \, y_1}{r^2 \sin 1''} = \quad . \; . \quad + \quad 0^0 \; 0' \;\; 0'',377$$
$$- \frac{u \, v}{2 r^2 \sin 1''} = \quad . \quad + \quad 0^0 \; 0' \;\; 1'',833$$
$$\rho'' = 302^0 \; 7' \; 29'',95$$

3. Dritte Seite $A_2 A_3 = a_3$; $\log a_3 = 4{,}5361063$

Dreieckswinkel $A_1 A_2 A_3 = \; . \; . \; . \;\; 194^0 \; 49' \; 29'',6$

Der vorige Richtungswinkel $\rho'' = 302^0 \;\; 7' \; 29'',95$

Der neue Richtungswinkel $\rho_2 = 136^0 \; 56' \; 59'',55$

a) Die Ordinate $y_3 = y_2 + v - \frac{u^2 y_2}{2 r^2} - \frac{u^2 v}{6 r^2}$

$$y_2 = . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad + \; 19233^t{,}859$$
$$+ \, v_3 = a_3 \sin \rho_2 = . \; . \; . \quad + \; 23460^t{,}746$$
$$- \frac{u^2 y_2}{2 r^2} = . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad - \qquad 0^t{,}564$$
$$- \frac{u^2 v}{6 r^2} = \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad - \qquad 0^t{,}220$$
$$y_3 = + \; 42693^t{,}821$$

b) Die Abscisse $x_3 = x_2 + u + \frac{u \, y_3{}^2}{2 r^2} - \frac{u \, v^2}{6 r^2}$

$$
\begin{array}{lr}
x_2 = \ldots\ldots & -\ 20373^t{,}533 \\
+\ u = a_3 \cos \varrho_2 = \ldots & -\ 25109^t{,}600 \\
+\ \frac{u\, y_3{}^2}{2\, r^2} = \ldots\ldots & -\quad 2^t{,}130 \\
-\ \frac{u\, v^2}{6\, r^2} = \ldots\ldots & +\quad 0^t{,}214 \\
\hline
x_3 = & -\ 45485^t{,}049
\end{array}
$$

c) Der Richtungswinkel $\varrho''' = 180^0 + \varrho_2 - \frac{u\, y_2}{r^2 \sin 1''} - \frac{u\, v}{2\, r^2 \sin 1''}$

$$
\begin{array}{lr}
180^0 = \ldots & +\ 180^0\ \ 0'\ \ 0'' \\
+\ \varrho_2 = \ldots & +\ 136^0\ 56'\ 59'',55 \\
-\ \frac{u\, y_2}{r^2 \sin 1''} = \ . & +\quad 0^0\ \ 0'\ \ 9'',272 \\
-\ \frac{u\, v}{2\, r^2 \sin 1''} = \ . & +\quad 0^0\ \ 0'\ \ 5'',655 \\
\hline
\varrho''' = & 316^0\ 56'\ 54'',48.
\end{array}
$$

Wie unbedeutend die Verbesserungen x, λ, τ sind, ergibt sich aus dem eben berechneten Beispiele; denn wenn die ebenen Coordinaten mit η und ξ bezeichnet werden, so ist bei der ersten Dreiecksseite $A\,A_1$:

$$
\begin{array}{llll}
\eta_1 = + & 1794^t{,}798 & \text{und} & x = -\ 0^t{,}0025 \\
\xi_1 = - & 9423^t{,}527 & \text{„} & \lambda = +\ 0^t{,}0001 \\
\varrho^1 = & 349^0\ 12'\ 59'',88 & \text{„} & \tau = +\ 0'',16;
\end{array}
$$

bei der zweiten Dreiecksseite $A_1\,A_2$:

$$
\begin{array}{llll}
\eta_2 = + & 19233^t{,}899 & \text{und} & x = -\ 0^t{,}0404 \\
\xi_2 = - & 20373^t{,}397 & \text{„} & \lambda = -\ 0^t{,}136 \\
\varrho'' = & 302^0\ 7'\ 27'',74 & \text{„} & \tau = +\ 2'',21;
\end{array}
$$

bei der dritten Dreiecksseite $A_2\,A_3$:

$$
\begin{array}{llll}
\eta_3 = + & 42694^t{,}605 & \text{und} & x = -\ 0^t{,}784 \\
\xi_3 = - & 45483^t{,}133 & \text{„} & \lambda = -\ 1^t{,}916 \\
\varrho''' = & 316^0\ 56'\ 59'',55 & \text{„} & \tau = +\ 14'',93.
\end{array}
$$

Dieselbe Ueberzeugung gewährt das Beispiel, welches Hansen in seiner Instruction für die thüringische Landesvermessung nach folgenden Formeln berechnet hat. Will man nämlich die bereits auf Seite 561 berechneten ebenen Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \ldots$ und $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \ldots$ auf die kugelförmige Erdoberfläche reduciren, so hat man erst folgende Hilfsgrössen zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_2 &= \varrho'\,(\eta_2\,\xi_1 - \xi_2\,\eta_1) \\
\varepsilon_3 &= \varrho'\,(\eta_3\,\xi_2 - \xi_3\,\eta_2) \\
\varepsilon_4 &= \varrho'\,(\eta_4\,\xi_3 - \xi_3\,\eta_4)\ \text{etc.,}
\end{aligned}
$$

wobei $\varrho' = \frac{1}{2\, r^2}$ und für das berührte Beispiel $\log \varrho' = 6{,}66844 - 20$ ist.

Sind diese Hilfsgrössen berechnet, so wird

$x_1 = \xi_1$

$x_2 = \xi_2 - \varepsilon_2\,\eta_2 + {}^1\!/_3\,\varepsilon_2\,(\eta_2 + \eta_1)$

$x_3 = \xi_3 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\,\eta_3 + {}^1/_3\,\varepsilon_2\,(\eta_2 + \eta_1) + {}^1/_3\,\varepsilon_3\,(\eta_3 + \eta_2)$
$x_4 = \xi_4 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)\,\eta_4 + {}^1/_3\,\varepsilon_2\,(\eta_1 + \eta_1) + {}^1/_3\,\varepsilon_3\,(\eta_3 + \eta_2) + {}^1/_3\,\varepsilon_4$
$(\eta_4 + \eta_3)$ etc.
$y_1 = \eta_1$
$y_2 = \eta_2 + \varepsilon_2\,\xi_2 - {}^1/_3\,\varepsilon_2\,(\xi_2 + \xi_1)$
$y_3 = \eta_3 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\,\xi_3 - {}^1/_3\,\varepsilon_2\,(\xi_2 + \xi_1) - {}^1/_3\,\varepsilon_3\,(\xi_3 + \xi_2)$
$y_4 = \eta_4 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)\,\xi_4 - {}^1/_3\,\varepsilon_2\,(\xi_2 + \xi_1) - {}^1/_3\,\varepsilon_3\,(\xi_3 + \xi_2) - {}^1/_3\,\varepsilon_4$
$(\xi_4 + \xi_3)$ etc.

Werden für ξ und η die auf Seite 561 angeführten Werthe gesetzt, so erhält man

$$\varepsilon_2 = +\,0{,}00002481,\quad \varepsilon_3 = -\,0{,}00003022,\quad \varepsilon_4 = +\,0{,}00004746,$$

und hiermit die

Reduction zu $\xi_2 = +\,0^t{,}442$, also $x_2 = -\,32668^t{,}24$
„ „ $\xi_3 = +\,0^t{,}064$, „ $x_3 = -\,50850^t{,}50$
„ „ $\xi_4 = +\,1^t{,}119$, „ $x_4 = -\,46020^t{,}06$ etc.,
„ „ $\eta_2 = -\,0^t{,}261$, „ $y_2 = -\,38308^t{,}90$
„ „ $\eta_3 = -\,0^t{,}017$, „ $y_3 = -\,39782^t{,}21$
„ „ $\eta_4 = -\,0^t{,}694$, „ $y_4 = -\,56033^t{,}11$ etc.

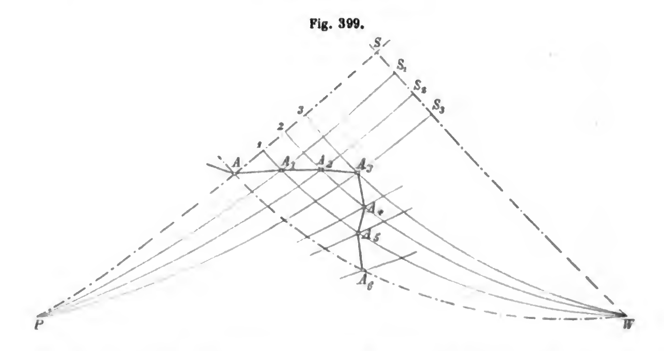
Die Berechnung der Coordinaten der Netzpunkte dritter Ordnung geschieht ohne Anwendung der Verbesserungen wegen der Erdkrümmung, und es kann diese Berechnung keine Schwierigkeit machen, da jedes Dreieck dritter Ordnung sich an eine Seite zweiter Ordnung anschliesst und für deren beide Enden die Coordinaten und Richtungswinkel bekannt sind. Ist ein Punkt dritter Ordnung von mehreren Seiten zweiter Ordnung aus eingeschnitten worden, so kann man seine Coordinaten mehrmals berechnen, was auch der Controle wegen nicht unterlassen werden darf. Weichen die Coordinatenwerthe nur äusserst wenig von einander ab, so genügt es meistens, diese Abweichungen durch die arithmetischen Mittel der Coordinatenwerthe auszugleichen; wollte man aber strenger verfahren, so müsste die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen werden, worüber in den betreffenden Werken näherer Aufschluss zu suchen ist.

6. Die geographische Lage der Netzpunkte und Seiten.

§. 321. Die in §. 320 entwickelten Formeln Nr. 322 bis Nr. 330 enthalten bereits eine Auflösung der vorliegenden Aufgabe; bei wirklichen Ausrechnungen bedient man sich aber jener Formeln in der Regel nicht, sondern gebraucht Näherungsausdrücke, welche bequemer zu handhaben sind. Dergleichen Ausdrücke sollen hier entwickelt werden, und zwar mit Bezug auf dieselbe Fig. 399, welche den früheren Entwickelungen zu Grunde lag, und aus strengen Formeln, welche zuerst aufzustellen sind. Die zu lösende Aufgabe kann nunmehr so ausgedrückt werden:

Auf der Erdoberfläche seyen zwei Punkte A und A_1 in der Art gegeben, dass man von A die geographische Breite (φ) und

Fig. 399.



Länge (λ), von A_1 seine kürzeste Entfernung a_1 von A, und von dem Bogen $A A_1$ das Azimuth α in dem Punkte A kennt: es soll die geographische Breite (φ') und Länge (λ') des Punktes A_1 nebst dem Azimuth (α') der Seite $A A_1$ in dem Punkte A_1 bestimmt werden.

Wie bisher nehmen wir auch jetzt die Fläche, auf der das Netz liegt, als eine Kugel vom Halbmesser r an. Soll demnach der auf dieser Kugel gegebene Bogen $A A_1 = a_1$ in Sekunden ausgedrückt und $= \mathfrak{a}_1$ gesetzt werden, so haben wir nach früheren Entwickelungen:

$$\mathfrak{a}_1 = 206265 \cdot \frac{a_1}{r} \text{ Sekunden.}$$

In dem sphärischen Dreiecke $A A_1 P$, das durch die Seite $A A_1$ und die beiden Meridiane von A und A_1 gebildet wird, ist bekannt:

$$\begin{aligned} &\text{die Seite } A A_1 \text{ oder } \mathfrak{a}_1 = 206265 \frac{a_1}{r} \text{ Sek.} \\ &\text{die Seite } A P \text{ oder } \mathfrak{b} \quad = 90^0 - \varphi \text{ und} \\ &\text{der Winkel } A_1 A P \quad = 180^0 - \alpha. \end{aligned}$$

Setzen wir nun wie früher den Winkel $A P A_1 = \mu_1$, den Winkel $A A_1 P = \beta_1 = \alpha' - 180^0$, und die Seite $P A_1 = \mathfrak{b}_1 = 90^0 - \varphi'$, so liefern einige bekannte Formeln der sphärischen Trigonometrie folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos\varphi \quad \operatorname{tg}\varphi' &= \sin\varphi \cos\mu_1 - \sin\mu_1 \operatorname{cotg}\alpha \\ \sin\alpha \operatorname{cotg}\mu_1 &= \cos\varphi \operatorname{cotg}\mathfrak{a}_1 + \sin\varphi \cos\alpha. \end{aligned}$$

Berechnet man nach dem Vorgange von Gauss[1] den Hilfswinkel ψ aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\mathfrak{a}_1 \cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (337)$$

und führt ψ als bekannte Grösse in die folgenden Entwickelungen ein, so erhält man zunächst aus der vorletzten Gleichung:

[1] Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Göttingen 1844.

$$\operatorname{tg} \mu_1 = \operatorname{tg} \alpha \sin \psi \sec (\varphi - \psi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (338)$$

und hierauf aus der ersten Grundgleichung, wenn man den Werth von $\operatorname{tg} \mu_1$ substituirt:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \cos \mu_1 \operatorname{tg} (\varphi - \psi). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (339)$$

Führt man noch einen zweiten Hilfswinkel χ ein, welcher aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \chi = \sin \alpha \sin \mathfrak{a}_1 \operatorname{tg} (\varphi - \psi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (340)$$

berechnet wird; setzt man die algebraische Winkelsumme

$$\varphi - \psi - \varphi' = \sigma; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (341)$$

zieht $\operatorname{tg} \varphi'$ von $\operatorname{tg} (\varphi - \psi)$ ab und berücksichtigt, dass $\cos \varphi' \sin \mu_1 = \sin \mathfrak{a}_1 \sin \alpha$, so folgt nach kurzer Entwickelung

$$\sin \sigma = \operatorname{tg} \chi \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \, \mu_1 \cos (\varphi - \psi). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (342)$$

Zur Berechnung des Azimuths $\alpha' = 180^0 + \beta_1$ dient zunächst folgende aus den Neper'schen Analogien entspringende Gleichung:

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 (\alpha - \beta_1) \cos {}^1\!/_2 (\varphi' - \varphi) = \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \, \mu_1 \sin {}^1\!/_2 (\varphi' + \varphi).$$

Entwickelt man hieraus $\operatorname{cotg} (\alpha - \beta_1)$ und zieht davon $\operatorname{cotg} \chi$ ab, so wird

$$\sin \chi \sin (\alpha - \beta_1) [\operatorname{cotg} (\alpha - \beta_1) - \operatorname{cotg} \chi] = \sin (\alpha - \beta_1 - \chi).$$

Setzt man den Winkel

$$\alpha - \beta_1 - \chi = \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (343)$$

und eliminirt mit Hilfe der vorausgehenden Gleichungen aus dem Ausdrucke für $\sin \tau$ alle Grössen bis auf α, $\mathfrak{a}_1$ und ψ, so ergibt sich:

$$\sin \tau = \sin \alpha \operatorname{tg} {}^1\!/_2 \, \mathfrak{a}_1 \sin \psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (344)$$

Ist der Hilfswinkel τ berechnet, so erhält man aus der Gleichung (343) den Winkel

$$\beta_1 = \alpha - \chi - \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (345)$$

und damit das Azimuth

$$\alpha' = \pm 180^0 + \alpha - \chi - \tau. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (346)$$

Liefert diese Gleichung das gesuchte Azimuth der Linie $A A_1$ in dem Punkte A_1, so erhält man aus Gleichung (321) die Breite jenes Punktes gleich

$$\varphi' = \varphi - \psi - \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (347)$$

und aus Gleichung (342) den Längenunterschied μ_1 zwischen A und A_1. Diese Formeln sind strenge richtig, aber die Bestimmung der in ihnen vorkommenden kleinen Bögen aus den Logarithmen der Sinusse und Tangenten erheischt eine mühsame Interpolation, wesshalb man sie nicht unmittelbar anwendet, sondern mittelbar dadurch, dass man die trigonometrischen Functionen in Reihen entwickelt, wie im Nachstehenden an einigen dieser Formeln gezeigt wird.

Setzt man nämlich

$$\mathfrak{a}_1 \cos \alpha = \mathrm{m} \text{ und } \mathfrak{a}_1 \sin \alpha = \mathrm{n}$$

und berücksichtigt, dass, wenn $\mathfrak{a}_1$ als Grösse erster Ordnung gilt, bis auf Grössen fünfter Ordnung genau

$$\operatorname{tg} \psi = \psi \sin 1'' (1 + {}^1\!/_3 \, \psi^2 \sin^2 1'')$$

gesetzt werden darf, so folgt aus der Gleichung (344), wenn man für tg a_1 einen ähnlichen Werth substituirt:

$$\psi (1 + \tfrac{1}{3} \psi^2 \sin^2 1'') = m (1 + \tfrac{1}{3} a_1^2 \sin^2 1'').$$

Da nach derselben Gleichung sehr nahe $\varphi = a_1 \cos \alpha = m$, so darf man innerhalb der vorhin bezeichneten Genauigkeitsgrenze $\psi^3 = m^3$ und desshalb

$$\varphi = m [1 + \tfrac{1}{3} (a_1^2 - m^2) \sin^2 1'']$$

setzen. Nun ist aber $m^2 + n^2 = a_1^2$, folglich $a_1^2 - m^2 = n^2$ und daher

$$\psi = m (1 + \tfrac{1}{3} n^2 \sin^2 1''). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (348)$$

Drückt man diese Gleichung logarithmisch aus, wodurch der Genauigkeit Nichts vergeben, aber an Bequemlichkeit der Rechnung gewonnen wird, so erhält man

$$\log \psi = \log m + \log (1 + \tfrac{1}{3} n^2 \sin^2 1'').$$

Bezeichnet M den Modul des Logarithmensystems, also hier, wo briggische Logarithmen angewendet werden, die Zahl 0,43429448 ...., so wird nach der Reihe $\log (1 + z) = M (z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 + \ldots.)$ genau genug

$$\log (1 + \tfrac{1}{3} n^2 \sin^2 1'') = \tfrac{1}{3} M n^2 \sin^2 1''$$

und folglich, wenn das Product $\tfrac{1}{12} M \sin^2 1'' = k$, also

$$\log k = 7{,}9397528 - 20$$

ist, die an dem Logarithmus von m anzubringende Verbesserung $= 4 k n^2$ und somit

$$\log \psi = \log m + 4 k n^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (349)$$

Aus der Gleichung (338), welche den Längenunterschied μ_1 liefert, folgt, wenn man wieder mit der früheren Genauigkeitsgrenze

$$\operatorname{tg} \mu_1 = \mu_1 \sin 1'' (1 + \tfrac{1}{3} \mu_1^2 \sin^2 1'')$$
$$\sin \psi = \psi \sin 1'' (1 - \tfrac{1}{6} \psi^2 \sin^2 1'')$$

setzt, für ψ seinen Werth aus der Gleichung (348) einführt und das Product $\tfrac{1}{18} n^2 \psi^2 \sin^4 1''$ weglässt,

$$\mu_1 = m \operatorname{tg} \alpha \sec (\varphi - \psi) (1 + \tfrac{1}{3} n^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{6} m^2 \sin^2 1'') - \tfrac{1}{3} \mu_1^2 \sin^2 1''.$$

Wird zur Abkürzung

$$m \operatorname{tg} \alpha \sec (\varphi - \psi) = n \sec (\varphi - \psi) = u$$

geschrieben und berücksichtigt, dass $\mu_1^3 = u^3$ genommen werden darf, so erhält man zunächst

$$\mu_1 = u [1 + \tfrac{1}{3} (n^2 - u^2) \sin^2 1'' - \tfrac{1}{6} m^2 \sin^2 1'']$$

und hierauf, da $n^2 - u^2 = - v^2$ ist, wenn

$$n \operatorname{tg} (\varphi - \psi) = v$$

gesetzt wird, den zur Berechnung von μ_1 geeigneten Ausdruck:

$$\mu_1 = u (1 - \tfrac{1}{3} v^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{6} m^2 \sin^2 1''). \quad . \quad . \quad . \quad (350)$$

Diese Gleichung geht aber, wenn man sie logarithmisch ausdrückt und das Product k beizieht, in folgende über:

$$\log \mu_1 = \log u - 2 k m^2 - 4 k v^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (351)$$

Wird die Gleichung (342), welche den Winkel σ liefert, zuvörderst so geschrieben:

$$\sin \sigma = \sin a_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mu_1 \sin \alpha \sin (\varphi - \psi);$$

werden hierauf folgende Werthe substituirt:

$$\sin \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \sin 1'' (1 - \tfrac{1}{6} \mathfrak{a}_1^2 \sin^2 1''),$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mu_1 = \tfrac{1}{2} \mu_1 \sin 1'' (1 + \tfrac{1}{12} \mu_1^2 \sin^2 1''),$$
$$\sin (\varphi - \psi) = \mathfrak{v} : \mathfrak{u},$$

und wird berücksichtigt, dass die Grösse σ in Bezug auf $\mathfrak{a}_1$ selbst schon von der zweiten Ordnung ist, und dass also $\sin \sigma = \sigma \sin 1''$ gesetzt werden darf, da das zweite Glied der Reihe für $\sin \sigma$ schon Grössen sechster Ordnung enthält; so findet man nach kurzer Entwickelung:

$$\sigma = \tfrac{1}{2} \mathfrak{n} \mathfrak{v} \sin 1'' (1 - \tfrac{1}{6} \mathfrak{a}_1^2 \sin^2 1'' + \tfrac{1}{12} \mu_1^2 \sin^2 1'') \frac{\mu_1}{\mathfrak{u}}.$$

Nimmt man den Werth von $\frac{\mu_1}{\mathfrak{u}}$ aus der Gleichung (350), setzt $\mu_1^2 = \mathfrak{u}^2 = \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{n}^2 = \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{m}^2$, und vollzieht die angezeigten Operationen und Reductionen, so wird

$$\sigma = \tfrac{1}{2} \mathfrak{v} \mathfrak{n} \sin 1'' [1 - \tfrac{1}{12} \sin^2 1'' (\mathfrak{a}_1^2 + 3 \mathfrak{m}^2 + 3 \mathfrak{v}^2)]; \quad . \quad (352)$$

und wenn man diese Gleichung wieder logarithmisch ausdrückt und das constante Product k beizieht:

$$\log \sigma = \log (\tfrac{1}{2} \mathfrak{v} \mathfrak{n} \sin 1'') - k \mathfrak{a}_1^2 - 3 k \mathfrak{m}^2 - 3 k \mathfrak{v}^2. \quad . \quad (353)$$

In gleicher Weise kann man aus den Gleichungen (343) und (344) die Werthe von χ und τ, sowie von $\log \chi$ und $\log \tau$ bestimmen; wir überlassen jedoch die Entwickelung derselben dem eigenen Fleisse des Lesers und setzen bloss die Resultate hieher:

$$\chi = \mathfrak{v} (1 - \tfrac{1}{6} \mathfrak{a}_1^2 \sin^2 1''). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (354)$$
$$\log \chi = \log \mathfrak{v} - 2 k \mathfrak{a}_1^2 - 4 k \mathfrak{v}^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (355)$$
$$\tau = \tfrac{1}{2} \mathfrak{m} \mathfrak{n} \sin 1'' (1 + \tfrac{5}{12} \mathfrak{a}_1^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{2} \mathfrak{m}^2 \sin^2 1''). \quad . \quad . \quad (356)$$
$$\log \tau = \log (\tfrac{1}{2} \mathfrak{m} \mathfrak{n} \sin 1'') + 5 k \mathfrak{a}_1^2 - 6 k \mathfrak{m}^2. \quad . \quad . \quad (357)$$

Sind nach den vorausgehenden Gleichungen die Grössen ψ, σ, χ, τ bestimmt, so findet man aus Gleichung (347) die Breite φ', aus Gleichung (346) das Azimuth α' und aus Gleichung (350) den Längenunterschied μ_1, also alle Grössen, welche die vorliegende Aufgabe als zu suchende bezeichnet.

Die so gefundenen Längenunterschiede, Breiten und Azimuthe beziehen sich alle auf eine Kugelfläche vom Halbmessser r, während die mathematische Oberfläche der Erde ein Umdrehungsellipsoid ist. Es käme also darauf an, zu zeigen, wie die Grössen μ_1, φ' und α' gefunden werden, wenn man ihrer Bestimmung ein Ellipsoid zu Grunde legte, dessen Dimensionen nach Bessel folgende sind:

grosse Halbaxe	a = 3 272077	Toisen,	log a = 6,5148235
kleine Halbaxe	b = 3 261139	„	log b = 6,5133692
Excentricität	e = 0,081696	„	log e = 8,9122052 — 10.

Der Zweck dieses Buches fordert jedoch, dass wir uns hierüber nicht verbreiten, sondern lediglich, auf die ausgezeichneten Arbeiten von Gauss [1]

[1] Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher 1825. Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, 1844.

und Bessel [1] verweisend, einige Ergebnisse der hieher gehörigen Rechnungen anführen.

Was zunächst die Azimuthe der Dreiecksseiten betrifft, so ist zu bemerken, dass deren Werthe für die Kugel auch für das Sphäroid gelten, da die Unterschiede selbst bei den grössten Landesvermessungen oft kaum $^1/_{100}$ Sekunde betragen. Um diese Behauptung wenigstens theilweise zu begründen, führen wir folgende numerische Berechnung eines Beispiels von Gauss an.

In dem hannover'schen Dreiecknetze ist das Dreieck Brocken-Hohehagen-Inselsberg eines der grössten und vom mittleren Parallelkreise des Landes am weitesten entfernt. Die Logarithmen der in Toisen gegebenen Dreiecksseiten sind:

Hohehagen - Inselsberg = 4,6393865,
Inselsberg - Brocken = 4,7353929,
Brocken - Hohehagen = 4,5502669,

und die von Gauss berechneten Reductionen, wie sie mit ihren Vorzeichen zu den Azimuthen auf dem Sphäroid addirt werden müssten, um die Azimuthe auf der Kugel zu erhalten, folgende:

Brocken - Inselsberg = + 0,″00055,
Brocken - Hohehagen = + 0, 00196,
Hohehagen - Brocken = − 0, 00238,
Hohehagen - Inselsberg = − 0, 00332,
Inselsberg - Hohehagen = + 0, 00428,
Inselsberg - Brocken = − 0, 00083.

Demnach müssen die auf dem Sphäroid zwischen geodätischen Linien gemessenen Dreieckswinkel wie folgt abgeändert werden, um die zwischen grössten Kreisbögen liegenden Winkel auf der Kugel zu erhalten:

Winkel Brocken um + 0,″00141,
„ Hohehagen „ − 0, 00094,
„ Inselsberg „ − 0, 00511.

Auch der Unterschied zwischen den geographischen Längen auf der Kugel und dem Sphäroid ist im Allgemeinen nur sehr klein, und es besteht zwischen beiden die Beziehung

$$\mu_1 = \gamma \, \mu, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (358)$$

wobei μ_1 die Länge auf der Kugel, μ jene auf dem Ellipsoid und γ einen Factor bezeichnet, der sich aus folgenden Gleichungen, in denen φ die Breite des Normalpunktes vorstellt, ergibt:

$$\gamma = \frac{1}{\cos \zeta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (359)$$

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \cos^2 \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (360)$$

$$\sin \varepsilon = e \quad \ldots \ldots \ldots \quad (361)$$

$$\varepsilon = 4^0 \, 41' \, 9'',9826. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (362)$$

[1] Gradmessung in Ostpreussen, Berlin 1838. Astronomische Nachrichten, herausgegeben von Schumacher, Nr. 86.

Ist beispielsweise $\varphi = 52^0\,42'\,2'',532$, so wird der Hilfswinkel $\zeta = 1^0\,43'\,26'',804$ und

$$\log \gamma = 0{,}0001966.$$

Hat man nun für einen Ort, dessen Breite und Länge von der des Normalpunktes nur höchstens 5^0 bis 6^0 verschieden ist, den Längenunterschied auf der Kugel

$$\mu_1 = 2^0\,16'\,10'' = 8170''$$

gefunden, so erhält man den Längenunterschied μ auf dem Ellipsoid aus der Gleichung

$$\log \mu = \log \mu_1 - \log \gamma = 3{,}9120255,$$

welche $\mu = 8166'',305 = 2^0\,16'6'',305$ liefert. Die Differenz $\mu_1 - \mu$ beträgt somit nur 3,7 Sekunden.

Bedeutender ist die Abweichung zwischen den geographischen Breiten auf der Kugel und dem Ellipsoide. Wie man die einen auf die anderen in der einfachsten Weise reduciren kann, hat Gauss in seinen schon mehrmals angeführten „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" gezeigt, auf die wir desshalb verweisen. Ebendaselbst hat er aber auch eine Tafel mitgetheilt, welche alle Rechnungen in dieser Beziehung erspart, indem sie die einander entsprechenden Breiten auf der Kugel und dem Sphäroide zwischen $46^0\,10'$ und $58^0\,40'$ enthält. Wir haben diese Tafel unter Nr. XVIII im Anhange aufgenommen und dazu nur noch zu bemerken, dass die erste Columne die Breiten auf der Kugel und die zweite jene auf dem Sphäroide angibt.

7. Verbindung der Messtischblätter mit dem Dreiecknetze.

§. 322. Ist die Triangulation des Landes vollendet, so besteht die nächste Arbeit in der Eintheilung der aufzunehmenden Fläche in Vierecke von solcher Ausdehnung, dass jedes derselben in dem Massstab der Aufnahme ein Messtischblatt von $1^1/_2'$ bis $2'$ Seitenlänge nahezu ausfüllt. Diese unter sich zusammenhängenden Vierecke bilden im Gegensatze des trigonometrischen Netzes das graphische Netz und es bestehen dieselben entweder aus Quadraten, Rechtecken oder Paralleltrapezen, welche sich an den Meridian und das Perpendikel (beziehungsweise den Parallelkreis) des Normalpunktes der Aufnahme anschliessen. Die Form der Netzvierecke hängt lediglich von den Bestimmungen der Direction der Landesvermessung ab; welche Form aber auch gewählt werden mag, so kommt es doch immer darauf an, die Begrenzungslinien der Vierecke auf die Detailblätter [1] und innerhalb derselben die auf sie treffenden Netzpunkte genau aufzutragen, damit der Geometer auf dem Felde den Messtisch oder seine Operationslinien so gut als möglich orientiren kann. Wir werden die Lösung dieser Aufgabe für zwei Formen des graphischen Netzes geben, nämlich:

[1] Wenn in der Folge manchmal der Ausdruck »Messblatt« gebraucht wird, so ist derselbe mit »Detailblatt« gleichbedeutend und folglich auch für die Aufnahmen mit dem Theodolithen gültig.

a) für eine Abtheilung der Terrainoberfläche nach Paralleltrapezen, welche (wie in Preussen und Sachsen-Gotha) aus Abschnitten von Meridianen und Parallelkreisen gebildet sind, und

b) für eine Eintheilung der Landesfläche in Quadrate, welche (wie in Bayern und Württemberg) aus Abschnitten von Curven gebildet werden, die dem Meridian und Perpendikel des Normalpunktes nahezu parallel laufen.

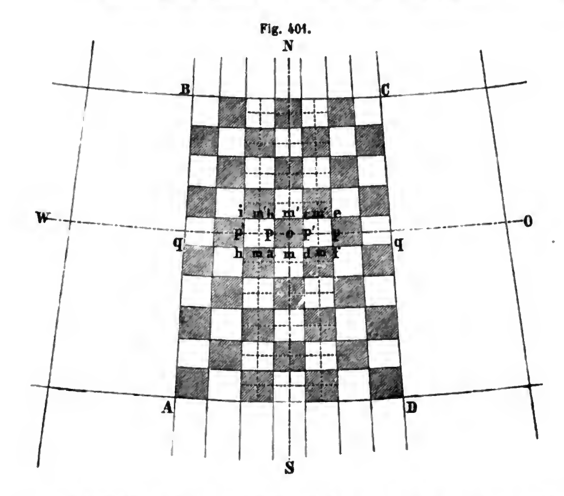
§. 323. **Aufgabe. Es sollen auf Grund einer vorausgegangenen Triangulirung die Messblätter für die Detailaufnahme vorbereitet werden, wenn das graphische Netz aus Abschnitten von Meridianen und Parallelkreisen gebildet wird.**

In Preussen und Sachsen-Gotha geschieht die topographische Vermessung im Massstabe von 1 : 25000; man hat daher zu dem graphischen Netze Vierecke gewählt, welche in der Richtung von Osten nach Westen von zwei Meridianabschnitten begrenzt werden, die 6 Minuten der geographischen Breite umfassen, während sie in der Richtung von Süden nach Norden ans zwei Abschnitten von Parallelkreisen bestehen, die einem Längenunterschied von 10 Minuten entsprechen. Auf diese Weise wird ein Stück der Erdoberfläche, welches einen Grad Länge und Breite umfasst, auf 60 Blättern dargestellt. Die Abschnitte der Meridiane und Parallelkreise sind zwar in aller Strenge krumme Linien, aber so lange diese Abschnitte sich nur über 6 und 10 Minuten Breite und Länge ausdehnen, können sie unbedenklich als gerade Linien angesehen werden.

Die Höhen und Breiten der einzelnen Blätter müssen aus den bekannten Dimensionen des Erdsphäroids und den geographischen Längen und Breiten der Blattmittelpunkte berechnet werden. Will man, dass auch die Parallelkreise, welche ganzen Breitengraden angehören, als Mittellinien der Netzvierecke erscheinen, so muss man von einem Normalpunkte ausgehen, dessen Breite ein Vielfaches von 6 Minuten ist, wobei man aus anderen Gründen gut thut, diesen Punkt soviel als möglich in der Mitte des zu vermessenden Landes anzunehmen. Eine ähnliche Rücksicht kann man bezüglich der Länge dieses Punktes eintreten lassen, welche demnach ein Vielfaches von 10 Minuten seyn müsste. Auf den Meridian und das Perpendikel dieses Normalpunktes sind alle Coordinaten der Netzpunkte zu reduciren, wenn sie nicht ursprünglich darauf bezogen wurden. Wir nehmen an, dass diese Reduction schon geschehen sey, und dass $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$, $x_3\, y_3$ etc. die für den Normalpunkt geltenden Coordinaten der Netzpunkte A_1, A_2, A_3 etc. vorstellen. Ist die geographische Länge des Normalpunktes z. B. $= 28^0\, 20'$ und seine Breite $= 50^0\, 36'$ gegeben, so sind die den Mitten der Messtischblätter entsprechenden geographischen Lagen folgende:

Breiten von Süd nach Nord:	Längen von West nach Ost:
$50^0\,36'$; $50^0\,42'$; $50^0\,48'$; $50^0\,54'$ etc.	$28^0\,20'$; $28^0\,30'$; $28^0\,40'$; $28^0\,50'$ etc.
Breiten von Nord nach Süd:	Längen von Ost nach West:
$50^0\,36'$; $50^0\,30'$; $50^0\,24'$; $50^0\,18'$ etc.	$28^0\,20'$; $28^0\,10'$; $28^0\,0'$; $27^0\,50'$ etc.

Fig. 401.



Um die Abmessungen der Netzvierecke kennen zu lernen, sind dieselben beispielsweise für die Breite von 50⁰ bis 51⁰ in der nachfolgenden von Hansen berechneten Tabelle in preussischen Fussen zusammengestellt. Die Blattdimensionen ergeben sich selbstverständlich durch Division mit 25000.

Geograph. Breite.	Höhe	Breite	Geograph. Breite.	Höhe	Breite
	des Vierecks.			des Vierecks.	
		31754′	50° 30′	29531′	31358′
50° 0′	29529′	31690′	50° 36′	29532′	31292′
50° 6′	29530′	31624′	50° 42′	29532′	31226′
50° 12′	29530′	31558′	50° 48′	29533′	31160′
50° 18′	29530′	31492′	50° 54′	28533′	31092′
50° 24′	29531′	31424′	51° 0′	29534′	31026′

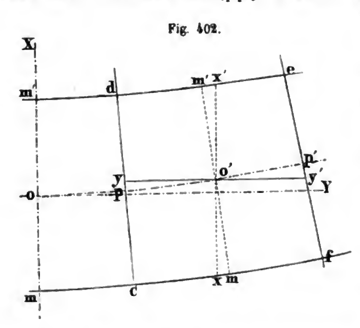
Nachdem diese Dimensionen berechnet sind, hat man auf jedes mit Papier bespannte Messtischblatt zunächst den ihm zugehörigen mittleren Meridian und die Begrenzungen mit feinen Tuschlinien zu zeichnen, was mit genauen Massstäben und Stangenzirkeln so sorgfältig als möglich geschieht. Es wird zu dem Ende jedes Blatt durch eine von Süden nach Norden laufende Linie (mm′) halbirt, diese Linie wird gleich der berechneten Blatthöhe gemacht, an ihren Endpunkten werden Senkrechte zu ihr errichtet, auf diesen

trägt man die halben Blattbreiten und zwar an der Nordseite die kleineren (m'b = m'c) und an der Südseite die grösseren (ma = md) ab, und endlich verbindet man die Eckpunkte (a, b, c, d) durch gerade Linien.

Sind alle Blätter so weit zubereitet, so kommt es darauf an, ob die einzelnen Netzpunkte mittels ihrer Coordinaten oder ihrer geographischen Längen und Breiten in die Blätter eingetragen werden sollen. Ist letzteres der Fall, so theilt man jedes Netzviereck (abcd) an der Südseite (ad) und an der Nordseite (bc) in 10, an der Ost- und Westseite aber in je 6 gleiche Theile und verbindet die Theilungspunkte so durch gerade Linien, dass man 60 kleine Vierecke erhält, wovon jedes eine Minute Länge und Breite umfasst. In diesen kleinen Vierecken werden alsdann die durch ihre geographischen Längen und Breiten ausgedrückten Netzpunkte mittels senkrechter Abstände, oder, wenn man will, durch fortgesetzte Theilung der Vierecke aus Meridian- und Parallelkreisabschnitten bestimmt. Hat man es dagegen unterlassen, die geographischen Längen und Breiten der Netzpunkte zu berechnen, so muss man, wie bei der thüringischen Landesvermessung geschieht, in jedem Messtischblatte die in der Mitte seines Meridianabschnittes entspringenden Coordinatenaxen dieses Blattes einzeichnen, was auf folgende Weise geschieht.

Für die Blätter, deren mittlerer Meridian mit dem Hauptmeridian zusammenfällt, ist selbstverständlich der mittlere Meridian (mm') die Abscissenaxe und die Senkrechte (pp') in seiner Mitte (o) die Ordinatenaxe. Auf allen Blättern aber, welche östlich oder westlich vom Hauptmeridian liegen, weicht die Abscissenaxe von dem mittleren Meridiane und folglich die Ordinatenaxe von dem mittleren Parallelkreis ab; denn die Seitenmeridiane convergiren gegen den Hauptmeridian und die Parallelkreise stehen auf ihnen senkrecht, während die Abscissenaxen dem Hauptmeridian und die Ordinatenaxen dessen Perpendikel parallel laufen. Die beigedruckte Fig. 402, in welcher

Fig. 402.



mm' die Meridiane, pp' die Parallelkreise, xx' die Abscissen- und yy' die Ordinatenaxen vorstellen, macht dieses anschaulich, und man entnimmt daraus leicht, dass, um die Axen xx' zu erhalten, auf allen Blättern der Ostseite des Hauptmeridians oben die Abweichung m'x' rechts und unten dieselbe Abweichung = mx links von mm' anzutragen ist, während auf allen Blättern der Westseite des Hauptmeridians m'x' links und mx rechts von mm' liegen muss. Wie gross die Abweichungen mx = m'x' für die

einzelnen Blätter sind, lässt sich aus den Dimensionen des Erdsphäroids berechnen. Wir wollen indess auf diese Rechnungen hier nicht näher eingehen, da wir bei den Kartenprojectionen umständlicher davon zu reden haben, sondern lediglich bemerken, dass für jene vom Hauptmeridian gerechnete Länge von 10 Minuten die Abweichung der x Axe = 33′, für 20 Minuten = 66′, für 30 Minuten = 99′, für 40 Minuten = 133′, für 50 Minuten = 166′ und für 60 Minuten = 199′ ist. Entspricht demnach der Abstand oo′ der Blattmitten 10 Minuten, so ist $m'x' = \frac{33'}{25000} = \frac{3300'''}{25000}$ = 0‴,13, bei dem östlichen (rechtseitigen) Blatte rechts, bei dem westlichen (linkseitigen) Blatte aber links und mx = 0‴,13 bei dem östlichen Blatte links, bei dem westlichen aber rechts vom Meridian mm′ aufzutragen.

Es bleibt nun noch übrig, zu zeigen, wie die Coordinaten der Dreieckspunkte in die nunmehr auch mit den Axen versehenen Detailblätter eingetragen werden; dieses Eintragen setzt jedoch voraus, dass man die Coordinaten der Blatt-Mittelpunkte kenne. Da indessen diese Punkte nicht von der Triangulirung abhängen, sondern auf beliebigen Annahmen beruhen, so kann man sie im Voraus ein für allemal berechnen und in einer Tabelle zusammenstellen. Einen Theil einer solchen von Hansen berechneten Tabelle theilen wir nachstehend mit dem Bemerken mit, dass die in der Ueberschrift vorkommenden Längenunterschiede 0, ± 10 und ± 20 Minuten sich auf den Hauptmeridian der Messung beziehen, und dass die Coordinaten in preussischen Ruthen ausgedrückt sind.

Geograph. Breite φ.	Längenunterschied = 0.		Längenunterschied = ± 10′.		Längenunterschied = ± 20′.	
	x	± y	x	± y	x	± y
51° 12′	− 17720,04	0	− 17723,52	3092,60	− 17733,98	6185,18
51 6	14766,57	0	14770,06	3099,27	14780,53	6198,53
51 0	11813,15	0	11816,64	3105,93	11827,14	6211,86
50 54	8859,78	0	8863,28	3112,59	8873,79	6225,18
50 48	5906,47	0	5909,97	3119,24	5920,50	6238,49
50 42	− 2953,21	0	2956,72	3125,90	2967,27	6251,79
50 36	0	0	− 3,52	3132,55	− 14,08	6265,08
50 30	+ 2953,15	0	+ 2949,62	3139,18	+ 2939,06	6278,35
50 24	5906,26	0	5902,62	3145,80	5892,13	6291,60
50 18	8859,32	0	8855,78	3152,42	8845,17	6304,84
50 12	11812,34	0	11808,79	3159.04	11798,17	6318,07
50 6	14765,30	0	14761,75	3165,65	14751,11	6331,29
50 0	+ 17718,21	0	+ 17714,66	3172,25	+ 17704,00	6344,50

Was den Gebrauch dieser Tafel betrifft, so ist derselbe folgender. Hat man die Coordinaten des einzutragenden Dreieckspunktes, so findet man

damit das Messtischblatt, in welches er fällt, indem man in der Tafel die Coordinatenwerthe aufsucht, welche den seinigen am nächsten kommen. Sind z. B. die Coordinaten eines solchen Punktes

$$x = +12734^0{,}94 \text{ und } y = -2783^0{,}12,$$

so liegen diesen Werthen am nächsten die Coordinaten

$$x' = +11808^0{,}79 \text{ und } y' = -3159^0{,}04,$$

welche zu der geographischen Breite $\varphi = 50^0\,12'$ und zu dem östlichen Längenunterschiede $\lambda = 10'$ gehören. Der Punkt fällt somit auf das Blatt, dessen Mitte diese Breite und Länge hat. Stellt man hierauf die Coordinatenunterschiede

$$x - x' = +926^0{,}15 \text{ und } y - y' = +375^0{,}92$$

her, so ist die Länge $x - x'$ südlich und $y - y'$ westlich von der Mitte des Blattes auf den in dasselbe eingetragenen Axen abzuschneiden und durch Perpendikel der Punkt, den man sucht, zu bestimmen.

§. 324. Aufgabe. Die Messblätter für die Detailaufnahme eines Landes in dem Falle vorzubereiten, wo das graphische Netz aus Quadraten besteht, deren Seiten dem Hauptmeridian und dessen Perpendikel parallel laufen.

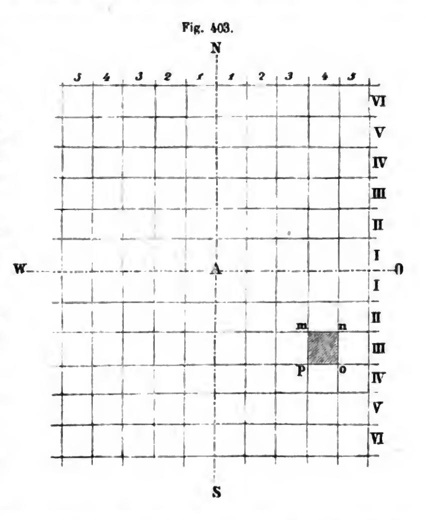
Ein graphisches Netz von Quadraten mit 8000' Seite ist in Bayern und eines mit 4000' Seite in Württemberg zur Anwendung gekommen. In dem erstgenannten Lande beträgt der Massstab der Detailmessung (mit geringen Ausnahmen) 1 : 5000 und in letzterem 1 : 2500; in beiden Ländern erhalten folglich die Messblätter Seiten von 16 Dezimalzoll Länge. Da das württembergische Masssystem im Wesentlichen mit dem bayerischen übereinstimmt, so werden wir die vorliegende Aufgabe lösen, indem wir lediglich das in Bayern beobachtete Verfahren zur Vorbereitung der Messtischblätter für die Detailaufnahme beschreiben.

Stellt der Punkt A in Fig. 403 den Normalpunkt der Messung (nördl. Frauenthurm), SN dessen Meridian und OW das Perpendikel desselben vor, so wird zunächst die ganze Landesoberfläche in vier Theile zerlegt, welche durch Südwest (SW), Nordwest (NW), Nordost (NO) und Südost (SO) bezeichnet werden. Theilt man hierauf den Meridian SN in lauter gleiche Theile von 8000' Länge und zieht durch die Theilungspunkte grösste Kreise, welche auf SN senkrecht stehen, so wird jedes Viertel in Schichten zerlegt, welche fast durchgehends gleich breit sind, da die Ordinatenkreise (s. §. 318) auf die Breite des Landes nur äusserst wenig convergiren. Diese Schichten werden mit römischen Ziffern bezeichnet, wie aus der Figur zu entnehmen ist. Theilt man ferner jeden Ordinatenkreis vom Meridian ab in lauter gleiche Theile von 8000' Länge und verbindet die Theilungspunkte durch gerade Linien, so wird jede Schichte in Vierecke zerlegt, welche nahezu Quadrate sind und auf die in der Figur angegebene Weise durch arabische Ziffern (Nummern) bezeichnet werden. Will man nun irgend ein Viereck (Messtischblatt, Steuerblatt) benennen, so geschieht diess durch Angabe des Viertels, der Schichte und der Nummer. Das schraffirte

Blatt m n o p z. B. wird genannt und auch überschrieben: S O. III. 4.

Nach dieser geometrischen Eintheilung der Oberfläche des Landes stellen die Detailblätter Theile der Kugelfläche vor, welche in der Richtung von Ost nach West stets gleich breit sind, in der Richtung von Süd nach Nord aber eine etwas kleinere Höhe als 8000 Fuss haben, da die Ordinatenkreise convergiren und sich im Aequator schneiden. Diese Verschiedenheit der Höhe wächst mit dem Abstande der Blätter vom Münchener Meridiane und beträgt für ein Blatt, dessen Nummer = n ist, 0,0005344 n² Fuss. Ein Blatt also, das die Nummer 100 hat, von München somit im Mittel 804000 Fuss östlich oder westlich entfernt ist, hat eine Höhe von 8000′ — 5,344 = 7994,656 Fuss. Die Differenz von 5′,344 = 534‴,4 beträgt aber im Massstabe von 1 : 5000 nur 0‴,106 oder nahezu 1 Zehntel Linie, was in der Zeichnung des Vierecks kaum zu bemerken ist. Wegen dieses geringen Unterschiedes — der noch dazu der grösste ist, da weder die östlichen noch die westlichen Grenzen des Landes mehr als 804000 Fuss vom Münchener Meridian abliegen — kann man wohl alle Netzvierecke als Quadrate bezeichnen, wenn sie es auch in aller Strenge nicht sind.

Fig. 403.



Soll nun ein trigonometrischer Punkt, dessen Coordinaten

$$x = + 124824',5 \text{ und } y = - 93218',3$$

sind, wobei die positive Axe der x der südliche Theil (A S) des Meridians und die positive Axe der y der westliche Theil (A W) des Perpendikels ist, aufgetragen werden, so ist zunächst das Blatt zu bestimmen, in das er fällt. Dieses Blatt liegt aber offenbar in dem südöstlichen Viertel, und zwar in der 12. Nummer der XVI. Schichte; seine Bezeichnung ist demnach SO. XVI. 12. Man findet nämlich die Schichte, wenn man die Abscisse, und die Nummer, wenn man die Ordinate durch 8000′ dividirt und die Ganzen des Quotienten um 1 vermehrt.

Demgemäss erhält man im vorliegenden Falle

$$\frac{x}{8000} = \frac{124824',5}{8000'} = 15{,}6,\ \text{also die Schichte} = \text{XVI},$$

$$\frac{y}{8000} = \frac{93218',3}{8000'} = 11{,}6,\ \text{mithin die Nummer} = 12.$$

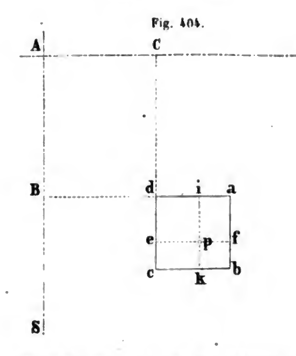


Fig. 404.

Stellt in der Fig. 404 das Viereck abcd das Blatt SO. XVI. 12. vor, so ist die Abscisse des Punktes d oder

$$AB = Cd = 15 \cdot 8000 = 120000'$$

und die Ordinate desselben Punktes d oder

$$AC = Bd = 11 \cdot 8000 = 88000'.$$

Es sind folglich auf der westlichen Seite und vom nördlichen Rande (da) des Blattes gegen den südlichen (cb) hin noch

$$124824',5 - 120000' = 4824',5 = de$$

aufzutragen, um die Abscisse des gegebenen Punktes

$$Ce = x = + 124824',5$$

zu erhalten, und auf der nördlichen Seite (da) vom westlichen Rande (dc) gegen den östlichen (ab)

$$93218',3 - 88000' = 5218',3 = di$$

abzuschneiden, um durch die Parallelen zu ad und cd den gesuchten Punkt p zu finden. Es versteht sich von selbst, dass die Abmessungen de und di durch ihre Ergänzungen ec und ai controlirt werden, und dass man die Parallelen ef, ik nur durch die Punkte f und k zieht, welche ebenso auf den Quadratseiten einzumessen sind, wie e und i.

Sind die Abscissen der aufzutragenden Punkte sehr gross, so bedürfen sie wegen der Convergenz der Ordinatenkreise noch einer kleinen Reduction. Nennt man diese Reduction δ, die Ordinate y, den Erdhalbmesser r, und bezeichnet u den Rest, welcher sich bei der Bestimmung der Schichte eines Blattes ergibt, nachdem man die Ganzen des Quotienten gefunden hat, so ist

$$\delta = \frac{u^2 y^2}{2 r^2} \qquad \qquad (363)$$

und diese Grösse wird von der Abscisse u, die nach der Lage des Blattes von der Ecke an auf der östlichen oder westlichen Grenzlinie nach Norden oder Süden hin aufzutragen ist, abgezogen, so dass man also statt u die Länge

$$u - \delta = u - \frac{u^2 y^2}{2 r}$$

abzumessen hat, um die Abscisse des trigonometrischen Punktes auf dem ihm angehörigen Blatte zu erhalten. Diese Reductionen δ sind freilich sehr klein, wie das folgende Beispiel zeigt, müssen aber doch berücksichtigt

werden, wenn die Ordinate y gross ist, d. h. wenn das Blatt weit vom Hauptmeridiane abliegt. Berechnet man δ für den Punkt p, der dem vorigen Beispiele zu Grunde lag, so ist hier

$$u = x - 15 \cdot 8000 = 4824',5 = 482^0,45$$
$$y = - 93218',3 = - 9321^0,83$$
$$\log r = 6,3402033; \ \log \frac{1}{2\,r^2} = 0,01856 - 13;$$

folglich, wenn man substituirt und ausrechnet, $\delta = 0,00437$ Ruthen $= 0,0437$ Fuss. Würde die Abscisse x bleiben, y_1 aber 10 mal so gross seyn als y, so erhielte man selbstverständlich für δ_1 die 100fache Grösse des vorigen Werthes, also $\delta_1 = 4,37$ Fuss. Diese Reduction entspräche somit einem Blatte, dessen Nummer

$$n = \frac{932183'}{8000'} = 117$$

wäre, und welches über 36 Meilen vom Hauptmeridiane entfernt läge. In dem Massstabe von 1 : 5000 ist aber die absolute Grösse von 4,37 Fuss $= 0',00087 = 0''',087$, somit kleiner als $^1/_{10}$ Linie. Es sind demnach auch auf den entferntesten Detailblättern die Reductionen δ ganz unbedeutend.

8. Die Detailmessung der Bodenfläche.

§. 325. Die Aufnahme der Einzelnheiten der Bodenfläche eines Landes zerfällt in zwei besondere Verrichtungen, nämlich in die Bestimmung der Richtpunkte und Richtungslinien, und in die Vermessung der einzelnen Parzellen. Mit dem ersteren Geschäfte haben sich nach den in mehreren Ländern üblichen Titeln die „Obergeometer,“ mit dem letzteren die „Geometer“ zu befassen, während die unter Nr. 1 bis 6 betrachteten Arbeiten, welche sich auf die Anlage und Berechnung des Dreiecknetzes beziehen, den „Trigonometern,“ die Bestimmungen der geographischen Lage des Normalpunktes und des Azimuths einer Dreiecksseite aber dem „Astronomen“ des Landes übertragen werden. Hier ist fast nur von dem Geschäfte der Obergeometer die Rede, da die Arbeiten der Geometer schon im Abschnitte C besprochen wurden. Nur das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische kommt beiden zu.

Die bisherige Vorbereitung der Messblätter, wenn sie nach Nr. 7 von den Obergeometern vollzogen ist, reicht weder zur Orientirung des Messtisches auf dem Felde, noch zum Eintragen der Abscissenlinien hin, weil bei einem Massstabe der Aufnahme von 1 : 5000 von den Punkten erster, zweiter, dritter Ordnung selten mehr als einer auf ein Blatt trifft, während viele Blätter gar keinen enthalten. Es müssen also ausser den schon bestimmten Netzpunkten noch so viele neue abgesteckt, eingemessen und auf die Blätter übergetragen werden, dass der Geometer im Stande ist, behufs der Parzellarmessung seinen Messtisch oder seine Abscissenlinien vollständig zu orientiren.

Zur einfachen Orientirung des Messtisches genügen zwar zwei Punkte (A, B) des Feldes, welche in verjüngter Entfernung (a, b) auf dem Blatte bezeichnet sind; aber die Prüfung der Aufstellung erfordert ausser diesen zwei Punkten entweder noch einen dritten Punkt (C, c) auf dem Felde und dem Messtische, oder aber eine Visirrichtung (ef) zwischen zwei anderen Punkten (E, F), die zwar ausserhalb des Blattbezirkes liegen dürfen, wovon aber doch stets einer von den beiden ersten Punkten (A, B) aus sichtbar seyn muss.

Wird zur Aufnahme der Einzelnheiten des Terrains gar kein Messtisch verwendet, so muss die trigonometrische Bestimmung von Terrainpunkten so weit fortgesetzt werden, dass ihre gegenseitige Verbindung eine hinreichende Anzahl von Abscissenlinien gewährt, an welche man mittels Ordinaten alle übrigen Punkte antragen kann. Bei der Landesvermessung in Schwarzburg-Sondershausen z. B. werden mit Hilfe des Theodolithen so viele Punkte bestimmt, dass auf je 12 bis 14 Morgen einer trifft. [1]

Wo nun an den zur Orientirung oder zum Auftragen des Details erforderlichen drei Punkten oder zwei Abscissenlinien Mangel ist, müssen noch mehr Punkte bestimmt werden, und diese Bestimmungen können offenbar nur von dem trigonometrischen Netze ausgehen, da sie Nichts als eine weitere Fortsetzung dieses Netzes sind. So lange die hierauf bezüglichen Arbeiten bloss darin bestehen, neue auf dem Felde bezeichnete Punkte durch Vorwärtsabschneiden mit dem Theodolithen zu bestimmen, ist hier weiter Nichts mehr zu bemerken; sind aber die trigonometrischen Punkte, wie dieses namentlich bei denen dritter Ordnung häufig der Fall ist, unzugänglich, so dass kein Vorwärtsabschneiden stattfinden kann: so hat man eine der nachfolgenden Aufgaben zu lösen.

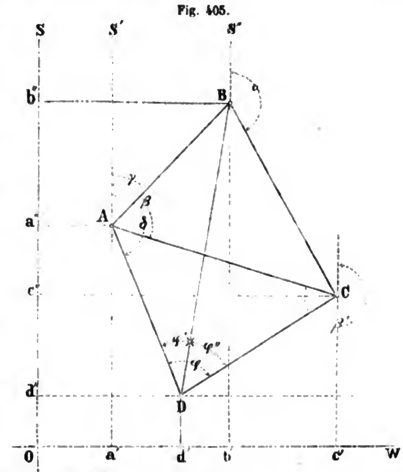
§. 326. Aufgabe. Mit Hilfe der bekannten Lage dreier unzugänglicher Punkte des Feldes die unbekannte Lage eines gegebenen vierten Punktes von dessen Stelle aus zu bestimmen.

Die verschiedenen graphischen Lösungen dieser sogenannten „Pothenot'schen Aufgabe“ wurden schon im §. 293 betrachtet; hier haben wir es nun mit der analytischen Auflösung desselben Problems zu thun, welche ausser der bekannten Lage der drei gegebenen Punkte nur noch die Messung zweier Winkel von dem vierten zu bestimmenden Punkte aus erfordert.

Es seyen (Fig. 405) A, B, C die drei Punkte des Feldes, deren Coordinaten x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 in Bezug auf die Abscissenaxe OS und die darauf senkrechte Ordinatenaxe OW gegeben sind, und D stelle den Punkt des Feldes vor, dessen Coordinaten x und y gesucht werden. Da man die Coordinaten der drei Eckpunkte des Dreiecks ABC kennt, so sind auch dessen Seiten $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, sowie seine Winkel A, B, C und die Neigungswinkel der Seiten gegen die Abscissenaxe, nämlich S'AB

[1] Baeyer, über die Figur und Grösse der Erde, S. 66.

$= \gamma$, S'AC $= \beta$, S''BC $= \alpha$ bekannt, oder doch aus den Coordinaten leicht zu berechnen.



Setzt man die unbekannte Länge der Linie AD = d und deren Neigungswinkel S'AD gegen die Abscissenaxe $= \delta$, so ist leicht einzusehen, dass

$$x = x_1 + d \cos \delta \quad (364)$$
$$y = y_1 + d \sin \delta \quad (365)$$

ist, und dass folglich nur die zwei Unbekannten d und δ zu bestimmen sind, um die Aufgabe zu lösen.

Nun folgt aber aus den beiden Dreiecken DAB und DAC sehr einfach

$$\frac{c \sin \varphi}{b \sin \varphi'} = \frac{\sin [\delta - (\beta - \varphi)]}{\sin [\delta - (\gamma - \varphi')]},$$

und wenn man den Hilfswinkel μ aus der Gleichung

$$\frac{c \sin \varphi}{b \sin \varphi'} = \operatorname{tg} \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (366)$$

berechnet und $\beta - \varphi = \varepsilon$, $\gamma - \varphi' = \varepsilon'$ setzt:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \mu}{1 - \operatorname{tg} \mu} = \frac{\sin (\delta - \varepsilon') + \sin (\delta - \varepsilon)}{\sin (\delta - \varepsilon') - \sin (\delta - \varepsilon)},$$

oder nach den bekannten Umformungen:

$$\operatorname{tg} (45^0 + \mu) = \cot {}^1\!/_2 (\varepsilon - \varepsilon') \,.\, \operatorname{tg} [\delta - {}^1\!/_2 (\varepsilon + \varepsilon')],$$

woraus, wenn man $\delta - {}^1\!/_2 (\varepsilon + \varepsilon') = \zeta$ setzt, weiter folgt:

$$\operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} (45^0 + \mu) \operatorname{tg} {}^1\!/_2 (\varepsilon - \varepsilon') . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (367)$$

Ist hieraus ζ berechnet, so erhält man

$$\delta = \zeta + {}^1\!/_2 (\varepsilon + \varepsilon') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (368)$$

und hiermit aus den Dreiecken DAB und DAC zwei Werthe von d, nämlich

$$d = \frac{b \sin (\delta - \varepsilon)}{\sin \varphi} = \frac{c \sin (\delta - \varepsilon')}{\sin \varphi'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (369)$$

Um die vorliegende Aufgabe numerisch zu lösen, wird man aus den gegebenen Coordinaten zuerst die zwei Seiten b, c und ihre Neigungswinkel mittels der Formeln:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}, \qquad \operatorname{tg} \gamma = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

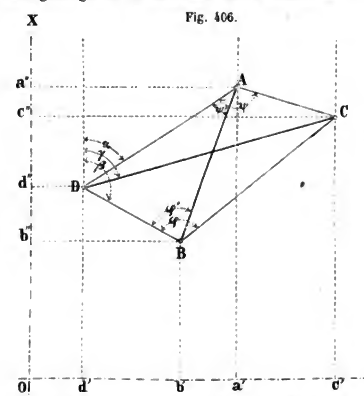
$$b = \frac{y_3 - y_1}{\sin \beta}, \qquad c = \frac{y_2 - y_1}{\sin \gamma};$$

und hierauf mit Hilfe der gemessenen Winkel φ und φ' die Differenzen $\beta - \varphi = \varepsilon$, $\gamma - \varphi' = \varepsilon'$ und nach Gleichung (366) den Hilfswinkel μ berechnen. Damit erhält man aus Gleichung (367) den Winkel ζ, mit diesem nach Gleichung (368) den Winkel δ, hiemit nach Gleichung (369) die Seite d, und, wenn auch diese gefunden ist, nach den Gleichungen (364) und (365) die gesuchten Coordinaten x und y. Dass bei diesen Rechnungen die algebraischen Vorzeichen gehörig zu berücksichtigen sind, bedarf wohl kaum der Erinnerung.

§. 327. **Aufgabe. Von zwei unzugänglichen Punkten des Feldes sind die Coordinaten bekannt und zwei andere Punkte sind auf dem Felde gegeben; man soll deren Lage durch blosse Winkelmessung bestimmen.**

Da diese Aufgabe zuerst von Hansen (in Nr. 419 der astronomischen Nachrichten von Schumacher) aufgestellt und gelöst wurde, so kann sie, wie die vorige nach Pothenot, füglich nach ihm benannt werden. Ihr Nutzen in der practischen Geometrie ist mindestens eben so gross als jener der Pothenot'schen Aufgabe, da sie aus der bekannten Lage von nur zwei Punkten die unbekannte Lage von zwei anderen Punkten finden lehrt, also mit geringeren Hilfsmitteln mehr leistet.

Fig. 406.



Bezeichnen (in Fig. 406) C, D die bekannten, A, B die unbekannten Punkte; sind ferner die Coordinaten von A, B, C, D der Reihe nach x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4; setzt man die Längen der Linien AD $= a$, BD $= b$, Cd $= c$ und ihre Neigungswinkel gegen die Axe der x in dem Punkte D nach einander $= \alpha$, β, γ, und heissen endlich die in A und B beobachteten und in der Figur angedeuteten Horizontalwinkel φ, φ' und ψ, ψ': so ergeben sich aus den drei Dreiecken ACD, CBD, ABD folgende vier Gleichungen:

$$a \sin \psi = c \sin (\psi + \gamma - \alpha)$$
$$b \sin \varphi = c \sin (\varphi + \beta - \gamma)$$
$$a \sin \psi' = b \sin \varphi'$$
$$\beta - \alpha = 180^0 - (\varphi' + \psi'),$$

welche gerade hinreichen, die vier unbekannten Grössen a, b, α, β zu bestimmen. Hat man aber diese, so ist für die Punkte A und B

$$x_1 = x_4 + a\cos\alpha \;,\; y_1 = y_4 + a\sin\alpha \quad . \; . \; . \quad (370)$$

$$x_2 = x_4 + b\cos\beta \;,\; y_2 = y_4 + b\sin\beta \quad . \; . \; . \quad (371)$$

und folglich Alles gefunden, was man sucht.

Setzt man die bekannte Differenz $\beta - \alpha = 2\delta$ und die noch unbekannte Summe $\beta + \alpha = 2\sigma$, so findet man hieraus

$$\alpha = \sigma - \delta \text{ und } \beta = \sigma + \delta,$$

und setzt man ferner die bekannten Winkel

$$\psi + \gamma + \delta = \zeta \text{ und } \varphi - \gamma + \delta = \eta,$$

so nehmen die zur Bestimmung der noch übrigen drei unbekannten Grössen a, b, σ dienenden drei Gleichungen folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} a\sin\psi &= c\sin(\zeta - \sigma) \\ b\sin\varphi &= c\sin(\eta + \sigma) \\ a\sin\psi' &= b\sin\varphi'. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (372)$$

Dividirt man die erste durch die zweite und nimmt den Werth von a : b aus der dritten, so fallen alle Entfernungen weg und man erhält:

$$\frac{\sin\varphi' \sin\psi}{\sin\varphi \sin\psi'} = \frac{\sin(\zeta - \sigma)}{\sin(\eta + \sigma)}.$$

Setzt man die bekannte erste Seite dieser Gleichung = tg μ, so gelangt man durch dasselbe Verfahren, welches im vorigen Paragraph beobachtet wurde, zu der Gleichung

$$\mathrm{tg}\,[\sigma + \tfrac{1}{2}(\eta - \zeta)] = \mathrm{tg}\,(45^0 - \mu)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(\eta + \zeta),$$

aus welcher somit σ gefunden werden kann. Denn setzt man $\mathrm{tg}\,[\sigma + \tfrac{1}{2}(\eta - \zeta)] = \mathrm{tg}\,\omega$, so ist ω als bekannt anzusehen und daher

$$\sigma = \omega + \tfrac{1}{2}(\zeta - \eta). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (373)$$

Mit σ sind aber auch α und β gefunden, da

$$\alpha = \sigma - \delta$$

$$\beta = \sigma + \delta$$

ist, und damit sind auch a und b bekannt, denn aus den Gleichungen (372) folgt:

$$a = \frac{c\sin(\zeta - \sigma)}{\sin\psi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (374)$$

$$b = \frac{c\sin(\eta + \sigma)}{\sin\varphi}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (375)$$

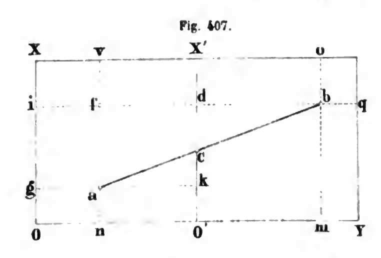
Führt man diese Werthe von a, b, α, β in Gleichung (370) und (371) ein, so findet man die gesuchten Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2, und die vorliegende Aufgabe ist somit gelöst.

Der oben benützte Ausdruck für tg μ nimmt die Form $^0/_0$ an, wenn die zwei Punkte A und B gleichzeitig auf der Linie CD liegen; denn in diesem Falle ist der Winkel $\psi = \varphi = 180^0$ und folglich $\sin\psi = 0$. Man muss also zu vermeiden suchen, dass A und B auf CD oder auch nur sehr nahe an CD liegen. Liegt jedoch nur einer der unbekannten Punkte auf der Linie CD, so geben die entwickelten Formeln ohne Anstand die Lage der beiden Punkte A und B.

Es versteht sich von selbst, dass man aus den Coordinaten von A und B die Länge A B berechnen und diese Coordinaten wieder als gegeben ansehen kann, um zwei andere unbekannte Punkte daraus zu bestimmen.

§. 328. **Aufgabe. Auf zwei aneinanderstossenden Messblättern sind zwei trigonometrische Punkte A, B unter a, b eingetragen; man soll die Orientirungslinie zwischen diesen Punkten berechnen und auftragen** (Fig. 407).

Fig. 407.



Sind die Coordinaten des Punktes a in Bezug auf die Axen OX, $OY = x_1, y_1$, und die des Punktes b in Bezug auf die Axen O'X', $O'Y = x_2, y_2$ gegeben, so handelt es sich darum, den Abstand $O'c = x$ zu bestimmen, um auf dem einen Blatte die Orientirungslinie ac, welche durch B, b geht, und auf dem anderen Blatte die Richtung bc, welche durch A, a geht, auftragen und bei der Aufstellung des Messtisches benützen zu können.

Zieht man durch b die Linie bi senkrecht zu O'X' und OX, durch a aber av parallel zu O'X' und OX, so entstehen zwei rechtwinkelige ähnliche Dreiecke abf und cbd, in denen, wenn man $OO' = O'X' = l$ setzt,

$$af = x_2 - x_1, \; fb = l - y_1 + y_2, \; db = y_2$$

bekannt ist; man kann folglich

$$cd = \frac{x_2 - x_1}{l - y_1 + y_2} \cdot y_2$$

berechnen. Hat man aber cd, so ist $cd + cO' = x_2$ und daher

$$x = cO' = x_2 - cd = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{l - y_1 + y_2} \cdot y_2. \quad . \quad . \quad (376)$$

Trägt man die Länge x von O' auf der Seite O'X' der beiden Blätter ab, so ist c und damit auf dem einen Blatte ac, auf dem anderen bc bestimmt. Als Controle der Zeichnung ist anzuwenden, dass man von X_1 aus die Länge $l - x$ abschneidet.

So wie die Richtungen ac, bc zwischen den Punkten A, a und B, b berechnet und aufgetragen wurden, lassen sich zwischen irgend zwei anderen Punkten Absehlinien herstellen; die dabei vorkommenden Rechnungen und Zeichnungen sind aber in allen Fällen (auch wenn die Punkte auf nicht aneinanderstossenden Blättern liegen) so einfach, dass wir sie unbedenklich dem Leser selber überlassen können. Hinsichtlich der Zeichnung der Richtungslinien ist nur noch zu bemerken, dass man sie so scharf und so lang als möglich zieht und die Bezeichnung derselben ausserhalb der Randlinien (d. i. der Viereck- oder Quadratseiten) anbringt.

Zweiter Abschnitt.

Vertikalmessungen.

A. Messung der Vertikalwinkel.

§. 329. **Aufgabe. Den Einfluss der atmosphärischen Strahlenbrechung auf die Messungsresultate zu bestimmen.**

So lange die Schenkel der zu messenden Vertikalwinkel nicht eine bedeutende Länge haben, also der beobachtete Punkt von dem Standorte des Beobachters nicht sehr weit entfernt ist, sind die in den §§. 136, 137, 140, 152 angegebenen Verfahrungsweisen zur Bestimmung jener Winkel vollständig ausreichend; überschreitet jedoch die gegenseitige Entfernung der zwei Punkte, zwischen denen eine genaue Vertikalmessung vorzunehmen ist, die Grösse von ungefähr 1000 Fuss, so muss an den nach der früheren Anleitung gefundenen Winkeln eine Verbesserung (ϱ) angebracht werden, welche von der atmosphärischen Strahlenbrechung herrührt und desshalb die Refraction heisst.

Mit dieser Strahlenbrechung hat es folgende Bewandtniss. Stellt man sich nämlich die Atmosphäre der Erde ganz ruhig und mit einerlei Temperatur begabt vor, so werden sich die concentrischen Luftschichten, in welche man sich die Atmosphäre zerlegt denken kann, nach ihren specifischen Gewichten über einander lagern und diese Gewichte werden nach einer leicht zu bestimmenden geometrischen Reihe von unten nach oben abnehmen. Ein Lichtstrahl nun, der von einem hochgelegenen Punkte der Atmosphäre herabkommt, wird in immer dichtere Luftschichten gelangen und folglich von Schichte zu Schichte eine Brechung erleiden, welche ihn immer mehr von seiner geraden Bahn ablenkt und diese in eine gegen die Erde concave Curve verwandelt. In der Fig. 408 stellt ED diese, den ungleich hoch gelegenen Punkten D und E angehörige Lichtcurve vor, während DC und EC die durch D und E gehenden Erdhalbmesser sind. Ein in D befindliches Auge empfängt das von E kommende Licht in der Richtung DG, welche die Curve ED in D berührt, und versetzt desshalb die Lage des Punktes E in diese Richtung (nach E_1); ein Auge aber, das sich in E befindet, sieht den Punkt D, von dem die Curve DE ausgeht, in der Richtung EG des letzten Curvenelementes (in D_1). Die Höhe des Punktes D_1 ist grösser als die von D, und die von E_1 grösser als die von E: folglich besteht die Wirkung der Strahlenbrechung in der gedachten Atmosphäre darin, dass sie alle Gegenstände höher erscheinen lässt, als sie liegen, und folglich alle Zenithwinkel zu klein und alle Höhenwinkel zu gross macht. Der Winkel, um welchen man einen anvisirten Punkt über seiner wahren Lage sieht, heisst der Refractionswinkel oder auch kurz: die Refraction. Für den leuch-

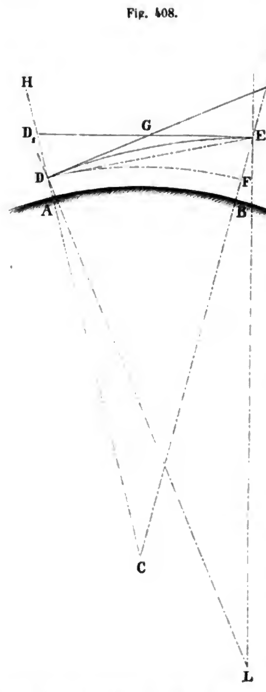


Fig. 408.

tenden Punkt E und den Beobachtungsort D ist dieser Winkel $\rho = EDE_1$ und für D und E die Refraction $\rho_1 = DED_1$.

Befände sich die Atmosphäre der Erde wirklich in dem einfachen Zustande, den wir bis jetzt angenommen haben, so liesse sich die Gleichung der Lichtcurve DE und damit auch der Betrag der Refraction in den Punkten D und E gleich ρ und ρ_1 strenge bestimmen.[1] Dieser Zustand der Atmosphäre ist aber nicht vorhanden, und es können sogar Fälle eintreten, in welchen die an der Erdoberfläche stärkere Erwärmung der Luft bewirkt, dass die unteren Luftschichten dünner sind als die oberen: in diesem Falle wird die Lichtcurve convex gegen die Erdfläche und folglich die Refraction negativ. Zwischen dem negativen und positiven Werth gibt es selbstverständlich auch einen gleich Null, und dieser tritt ein, wenn in Folge der ungleichen Erwärmung die Luftschichten, durch welche das Licht geht, gleich dicht werden. Unter diesen Verhältnissen ist also wenig Aussicht auf eine für alle Fälle passende genaue Bestimmung der Refractionsgrösse gegeben und desshalb die Hypothese erlaubt, dass die Lichtcurve DE ein sehr flacher Kreisbogen sey, welcher in der Regel gegen die Erdoberfläche concav ist.

Auf Grund dieser Annahme kann man wie folgt einen Ausdruck für den Refractionswinkel ρ finden. Bezeichnet nämlich

r den Erdhalbmesser DC in dem Beobachtungspunkte D,

r_1 den Erdhalbmesser EC in dem leuchtenden Punkte E,

R den Halbmesser DL der Lichtcurve ED,

C den Mittelpunktswinkel DCE und

L den Mittelpunktswinkel DLE,

so ist, da die Länge der Curve DE von ihrer Horizontalprojection DF ausserordentlich wenig verschieden ist und dieser folglich gleich gesetzt werden kann,

[1] Vergl. Prof. Winkler's Aufsatz in Crelle's Journal der Mathematik Bd. 50 S. 32 u. s. f.

$$r C = R L,$$

und da ferner $L = 2 (E D E_1) = 2 \varrho$, so findet man

$$\varrho = \frac{r C}{2 R} = k C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (377)$$

wobei k das Verhältniss von $r : 2R$ vorstellt und die Refractionsconstante[1] heisst.

Diese Constante wird dadurch bestimmt, dass man in den beiden Punkten D und E, deren Horizontalabstand (arc. DF) bekannt ist, gleichzeitig die Zenithwinkel der Linie DE misst und aus der Beziehung, welche zwischen diesen Winkeln und dem Winkel ϱ stattfindet, den letzteren berechnet. Gleichzeitig werden die Zenithwinkel desshalb gemessen, weil man alsdann berechtigt ist, anzunehmen, es sey $\varrho_1 = \varrho$.

Der Theodolith in D gibt in Folge der Strahlenbrechung nicht den wahren Zenithwinkel $H D E = Z$, sondern den scheinbaren $H D E_1 = z$; es ist aber $Z = z + \varrho$. Ebenso erhält man in E statt des wahren Zenithwinkels $J E D = Z_1$ den scheinbaren $J E D_1 = z_1$; es ist aber wieder $Z_1 = z_1 + \varrho$.

Aus der Figur findet man leicht, wenn man die beiden Aussenwinkel Z und Z_1 des Dreiecks DLE mit dessen inneren Winkeln vergleicht:

$$2 \varrho = 180^0 + C - z - z_1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (378)$$

Da aber nach Gleichung (377) auch $2 \varrho = 2 k C$, so erhält man folglich die gesuchte Constante

$$k = \frac{180^0 + C - z - z_1}{2 C} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (379)$$

Aus vielfachen Beobachtungen, von verschiedenen Astronomen und Geodäten in verschiedenen Ländern und zu verschiedenen Jahres- und Tageszeiten, jedoch bei ruhiger und klarer Luft[2] gemacht, erhielt man folgende Werthe von k:

Lambert	fand k = 0,0625;	Bessel	fand k = 0,0685;
Tob. Mayer	„ k = 0,0625;	Struve	„ k = 0,0618;
Gauss	„ k = 0,0653;	Coraboeuf	„ k = 0,0642.

Die meisten Franzosen nehmen nach Laplace und Delambre k = 0,08 und die Engländer sogar k = 0,10 an. In Deutschland benützt man in der Regel den von Gauss angegebenen Coeffizienten, welcher von dem Bessel'schen nur sehr wenig abweicht.

Am besten verfährt man aber, wenn man die Vertikalmessungen so einrichtet, dass die Refraction in dem Resultate gar nicht mehr vorkommt. Wie man dieses bewirken kann, wird in der Folge an mehreren Stellen gezeigt.

Nach Gauss beträgt die mittlere Unsicherheit des Werthes von k bei

[1] Häufig wird auch das Verhältniss $r : R = k$ gesetzt; in diesem Falle ist also die Refractionsconstante doppelt so gross als hier.

[2] An einem sehr heissen stürmischen Tage fand Delambre $k = -0,0035$ und bei schlechtem Wetter $k = -0,0351$.

ruhiger und klarer Luft den achten Theil seiner eigenen Grösse, so dass demnach bei solcher Beschaffenheit der Atmosphäre der wahre Werth von k zwischen 0,0735 und 0,0571 liegt; andere Beobachter fanden jedoch die Schwankungen der Refractionsconstanten viel grösser, wie schon die von den Franzosen und Engländern angewendeten Werthe zeigen, und wie insbesondere aus den Messungen von Baeyer hervorgeht, der „bei ruhiger Luft und angenehmer Temperatur" einen grössten Werth von $k = 0{,}1334$ und „bei empfindlicher Kälte und ziemlich heftigem Winde" einen kleinsten Werth von $k = 0{,}0415$ erhielt. Baeyer's Beobachtungen machen es überhaupt sehr wahrscheinlich, dass die Strahlenbrechung um so grösser ist, je mehr die Beobachtungszeit von dem wahren Mittage absteht. Darnach würde

$$k = b k' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (380)$$

seyn, wenn man unter k' die Strahlenbrechungsconstante bei Sonnen-Auf- und Untergang und unter b die in halben Tagebögen [1] ausgedrückte Zeit versteht. Geht die Sonne z. B. um 4 Uhr auf, so ist die Zeit b von 4 bis 12 Uhr und von 12 bis 8 Uhr Abends gleich dem halben Tagebogen $= 1$; die Zeit von 8 bis 12 Uhr oder von 12 bis 4 Uhr Nm. gleich der Hälfte des halben Tagebogens, also $b = 0{,}5$ u. s. w. Geht dagegen die Sonne um 6 Uhr auf, so bezeichnet der halbe Tagebogen eine Zeit von 6 Stunden, und es würde demnach für Beobachtungen, die um 8 Uhr Vm. oder um 4 Uhr Nm. gemacht werden, $b = 0{,}666$ zu setzen seyn. Wie gross aber auch der ganze Tagebogen seyn mag, so ist doch immer für Beobachtungen, die während des wahren Mittags gemacht werden, $b = 0$; es müsste folglich für diese Beobachtungszeit auch $k = 0$ seyn, wenn der oben angeführte Satz von Baeyer richtig ist. Bestätigende Versuche hierüber fehlen indessen noch. Den Werth von k' hat Baeyer $= 0{,}1016$ gefunden; der Werth von $k = 0{,}0653$ fände somit statt, wenn

$$b = \frac{k}{k'} = \frac{0{,}0653}{0{,}1016} = 0{,}6427$$

wäre, oder wenn an einem Tage, dessen Bogen 12 Stunden Zeit entspricht, die Beobachtungen um $8^h\, 9'$ Vm. oder $3^h\, 51'$ Nm. gemacht würden.

§. 330. Aufgabe. Die Reduction der Vertikalwinkel auf den wahren Scheitelpunkt vorzunehmen.

Bei dem früher beschriebenen Verfahren, den Zenithwinkel einer Linie zu messen, wurde vorausgesetzt, dass die Drehaxe des Vertikalkreises des Theodolithen in einem Endpunkte der Linie liege. Dieses ist aber in der Regel nicht möglich, und es steht (wenn kein Heliotropenlicht angewendet wird) entweder das Instrument über oder unter dem genannten Endpunkte. Dieser Umstand veranlasst einen kleinen Fehler im Zenithwinkel, welcher berücksichtigt werden muss. Die Verbesserung des letzteren nennt man dessen Reduction auf den wahren Scheitel.

[1] Tagebogen = dem Bogen, den scheinbar die Sonne zwischen Auf- und Untergang beschreibt.

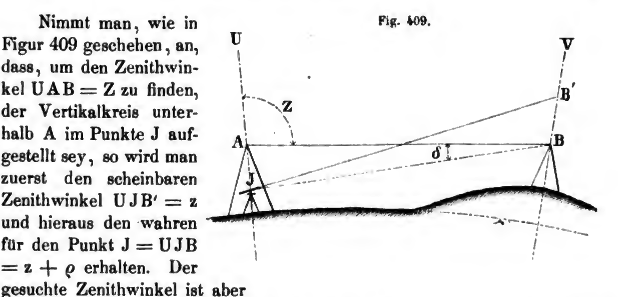


Fig. 409.

Nimmt man, wie in Figur 409 geschehen, an, dass, um den Zenithwinkel UAB = Z zu finden, der Vertikalkreis unterhalb A im Punkte J aufgestellt sey, so wird man zuerst den scheinbaren Zenithwinkel UJB' = z und hieraus den wahren für den Punkt J = UJB = z + ϱ erhalten. Der gesuchte Zenithwinkel ist aber

$$Z = z + \varrho + \delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (381)$$

wenn ABJ = δ gesetzt wird. Aus dem Dreiecke ABJ folgt, wenn AJ = h und AB = b gegeben ist:

$$\sin \delta = \frac{h}{b} \sin (z + \varrho),$$

und da δ jedenfalls sehr klein ist, also $\sin \delta : \sin 1'' = \delta'' : 1''$ gesetzt werden darf,

$$\delta = \frac{h \sin (z + \varrho)}{b \sin 1''}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (382)$$

Läge der Punkt über A, so würde, wie leicht einzusehen,

$$Z = z + \varrho - \delta$$

seyn, δ aber seinen absoluten Werth behalten, wenn h und b unverändert bleiben und Z nicht viel von 90° abweicht.

§. 331. Aufgabe. Die Kimmtiefe oder die Depression des Meereshorizonts zu bestimmen.

Nach §. 152 S. 229 wird auf dem Meere oder in dessen Nähe mit dem Spiegelsextanten oder dem Spiegelkreise der Höhenwinkel eines Gestirns dadurch gemessen, dass man die Bilder des Meereshorizonts und Gestirns zur Deckung bringt: bezeichnet also in Fig. 410 der Punkt A den Sextanten, S das Gestirn und B die in der Vertikalebene AS liegende äusserste sichtbare Stelle des Meeresspiegels, so liefert der Sextant, wenn man von der atmosphärischen Strahlenbrechung absieht, den Winkel SAB = w.

Dieser Winkel ist aber der gesuchte Höhenwinkel noch nicht; denn erstens ist der Schenkel AB nicht horizontal, und zweitens sieht man die Punkte B und S in Folge der Strahlenbrechung der Luft höher als sie sind. Nimmt man an, dass S in S' und B in B' erscheint, so liest man auf dem Sextanten den Winkel S'AB' = w' ab, während der Winkel SAH = u mit dem horizontalen Schenkel AH gesucht wird. Setzt man den Winkel SAS', welcher die nach Tab. Nr. XIX zu bestimmende astronomische Strahlenbrechung vorstellt, = ϱ', den Winkel BAB' oder die terrestrische Strahlen-

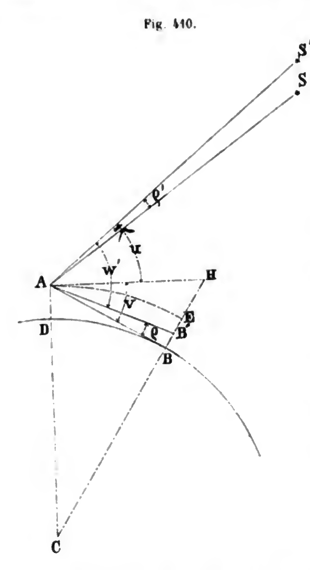


Fig. 410.

brechung $= \varrho$, und den Winkel $HAB = v$, so ist offenbar der gesuchte Höhenwinkel

$$u = w' - \varrho' - (v - \varrho). \quad (383)$$

Der Winkel $HAB' = v - \varrho = \delta$ stellt nun die Kimmtiefe oder die Depression des Meereshorizonts vor, und es lässt sich dieselbe in folgender Weise bestimmen.

Nach der Construction der Figur sind die Dreiecke ACH, ABC, ABH alle rechtwinkelig und einander ähnlich, folglich ist auch der Winkel

$$HAB = v = ACB = C,$$

und somit die Kimmtiefe

$$\delta = v - \varrho = (1 - k)\, C, \quad (384)$$

da nach §. 329 der Winkel $\varrho = kC$ ist.

Nach §. 5 ist aber der Mittelpunktswinkel

$$C = 206265 \, \frac{b}{r} \text{ Sekunden,}$$

wenn b den Bogen BD und r den Erdhalbmesser DC vorstellt; und aus der ebenen Geometrie ist bekannt, dass

$$AB^2 = AD\,(2r + AD),$$

oder, wenn man die Höhe $AD = h$ und die Entfernung $AB = e$ setzt und AD gegen $2r$ vernachlässigt,

$$e^2 = 2rh. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (385)$$

Die Länge e darf man gleich dem Bogen $BD = b$ und somit den Winkel

$$C = 206265 \, \frac{e}{r} = 206265 \sqrt{\frac{2h}{r}} \text{ Sek.}$$

setzen; folglich wird nach Gl. (384) die Kimmtiefe

$$\delta = 206265\,(1 - k) \sqrt{\frac{2h}{r}} \text{ Sek.} \quad \ldots\ldots \quad (386)$$

Nimmt man $k = 0{,}0653$ und $r = 3266608$ Toisen an, so wird für $AD = h$ Toisen:

$$\delta = 150{,}85 \sqrt{h} \text{ Sek.}$$

Für $h = 4$ Toisen würde man also $\delta = 301{,}7$ Sek. $= 5{,}03$ Minuten erhalten. Wäre für diese Höhe des Instrumenten-Standpunktes die Ablesung auf dem Spiegelsextanten $= w' = 33^0\,40'$ gewesen, so würde nach Tab. Nr. XIX die astronomische Refraction $\varrho' = 1'\,26'',5$ und folglich der gesuchte Höhenwinkel

$$u = w' - \varrho' - (v - \varrho) = 33^0\,33'\,31'',8$$

seyn. Da in dem vorliegenden Falle ein Stern beobachtet wurde, so fällt die Höhenparallaxe, und da der Winkelschenkel $AB = e = \sqrt{2rh} = \sqrt{26\,132\,864} = 5112$ Toisen, also sehr lang ist, so fällt auch die Schiefenparallaxe weg, welche ausserdem an dem Winkel u noch anzubringen wären.

§. 332. Aufgabe. Die Mittagslinie eines Ortes und das Azimuth einer gegebenen Geraden annähernd zu bestimmen.

Genaue Bestimmungen der Mittagslinie oder des Meridians eines Ortes sind nur durch astronomische Hilfsmittel ausführbar; der Geodät muss aber oft die Richtung der Mittagslinie eines Punktes ohne jene Hilfsmittel herstellen. Ist — wie gewöhnlich in solchen Fällen — keine grosse Schärfe der Bestimmung gefordert, so kann er seinen Zweck auf folgende Weise durch Beobachtung gleicher oder correspondirender Sonnenhöhen, d. i. durch Messung horizontaler und vertikaler Winkel erreichen.

Er stellt nämlich seinen vollständig berichtigten Theodolithen an einem heiteren Tage mehrere Stunden vor Mittag über dem Punkte P (Fig. 411), durch den die Mittagslinie gehen soll, centrisch und horizontal auf, versieht hierauf das Ocular des Fernrohrs mit einem Sonnenglase und stellt das Fadenkreuz auf die Sonnenscheibe so ein, dass es z. B. deren oberen Rand in der Mitte schneidet. Ohne an dem Instrumente das Geringste zu ändern, liest er die Nonien des Horizontal- und Vertikalkreises ab und bemerkt sich die Zeit der Beobachtung nach seiner Taschenuhr. Die Ablesungen auf dem Horizontalkreise seyen a und $180^0 + a$, die auf dem Vertikalkreise v und $180^0 + v$, und die Beobachtung habe m Stunden vor Mittag stattgefunden. Nun bleibt das Instrument verdeckt und unberührt stehen, bis gegen die m^{te} Stunde nach dem Mittage, um welche man die Alhidade des Horizontalkreises löst und mit dem noch wie am Vormittage geneigten Fernrohre der Sonne folgt, bis das Fadenkreuz wieder auf die obere Mitte des Sonnenrandes einsteht. Ist dieses der Fall, so liest man wieder die zwei Nonien des Horizontalkreises ab. Diese Ablesungen seyen $= a'$ und $180^0 + a'$. Dreht man nun die Alhidade des Horizontalkreises so weit nach der Linken zurück, dass die Ablesungen der Nonien $= \frac{1}{2}(a + a')$ und $180^0 + \frac{1}{2}(a + a')$ werden und steckt in der Richtung der Absehlinie ein Signal aus, so bezeichnet dieses mit dem Standpunkte des Instrumentes die gesuchte Mittagslinie. Denn wenn als bekannt angenommen wird: erstens, dass der wahre Mittag eines Punktes der Erde in dem Augenblicke stattfindet, wo die Meridianebene dieses Punktes durch die Mitte der Sonne geht; zweitens, dass die Richtung nach der Sonne in dem Augenblicke, wo sie im Meridian steht oder culminirt, die Mittagslinie bezeichnet; und drittens, dass die Sonnenhöhe in gleichen Zeitabständen vom wahren Mittage gleich gross ist: so folgt von selbst, dass die gesuchte Mittagslinie PS (Fig. 411) den Horizontalwinkel VPN, welcher aus der vor- und nachmittägigen Beobachtung gleicher Sonnenhöhen hervorging, halbiren muss; ist aber dieses der Fall und bezeichnet PO den Halbmesser des Limbus, welcher durch dessen Nullpunkt

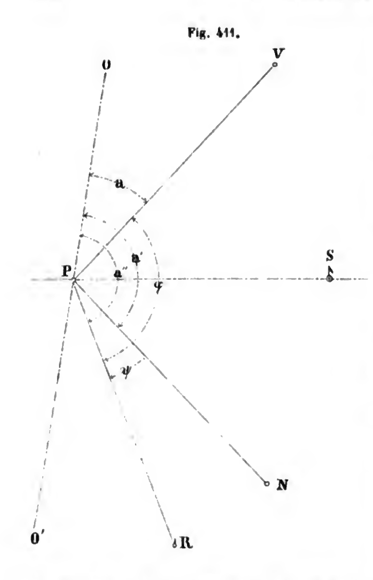


Fig. 411.

geht, so entsprechen die Winkel OPV und OPN den Ablesungen a und a' des Nonius I, und es muss folglich auch die Ablesung am ersten Nonius $= \frac{1}{2}(a + a')$ seyn, wenn die Absehlinie des Fernrohrs in der Mittagslinie liegen soll. Der Nonius II liefert selbstverständlich bei den Einstellungen auf V, N, S Ablesungen, welche genau oder sehr nahe 180° mehr oder weniger betragen, als die am ersten Nonius.

Hat man die Richtung der Mittagslinie PS gefunden, so ergibt sich sofort das Azimuth einer durch den Standpunkt des Instrumentes gehenden Richtung PR, indem man das Theodolithenfernrohr auf den Punkt R einstellt, an den Nonien des Horizontalkreises abliest und aus diesen Ablesungen den Horizontalwinkel SPR berechnet. War die Ablesung bei der Einstellung auf das Object R auf dem Nonius I $= a''$ und auf dem Nonius II $= 180^0 + a''$, so ist das gesuchte Azimuth SPR $= a'' - \frac{1}{2}(a + a')$. Mit diesem Azimuthe sind selbstverständlich die Azimuthe aller um P herum liegenden Punkte bekannt, sobald man deren Richtungswinkel gemessen hat.

Wäre es aus irgend einem Grunde nicht möglich, den Theodolithen behufs der Aufsuchung der Mittagslinie den ganzen Tag hindurch stehen zu lassen, so muss man Vormittags den Winkel RPV $= a'' - a = \varphi$ und Nachmittags bei der vormittägigen Neigung (v) des Fernrohrs den Winkel RPN $= \psi$ messen und alsdann den Winkel RPS $= \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ an RP antragen, was durch Einstellung des Nonius I auf eine Ablesung, welche um $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ kleiner ist als die bei der Visur nach R, geschieht.

Die vorstehende Bestimmungsweise der Mittagslinie fordert nur desshalb eine Zeitbeobachtung, damit man am Nachmittage zur rechten Zeit wieder am Platze ist, um die Sonnenhöhe, auf welche das Fernrohr eingestellt ist, nicht unbenützt vorübergehen zu lassen. Da jedoch die gewöhnlichen Uhren nur die mittlere oder bürgerliche Zeit und also nicht den wahren Mittag anzeigen, wodurch man hinsichtlich der nachmittägigen Beobachtungszeit leicht irre geführt werden kann, so ist es nöthig, sich vorher

über die an dem Beobachtungstage stattfindende Zeitdifferenz zu unterrichten und dieselbe zu beachten.

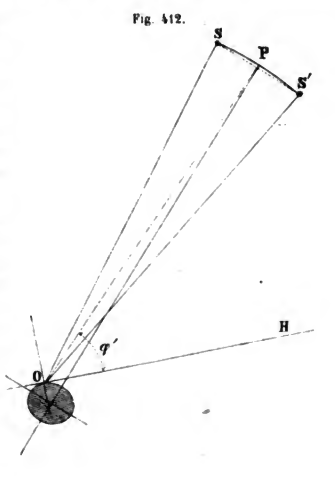
§. 333. Aufgabe. Die Polhöhe oder geographische Breite eines gegebenen Ortes der Erde annähernd zu bestimmen.

Unter der Polhöhe eines Ortes versteht man den Höhenwinkel der Verbindungslinie desselben mit dem Himmelspole (einem in der Richtung der Erdaxe unendlich weit entfernten Punkte). Da nun jene Linie mit der Erdaxe parallel zu nehmen ist, so kann man auch sagen: die Polhöhe ist der Neigungswinkel der scheinbaren Horizontalebene eines Ortes gegen die Erdaxe. Vergleicht man damit die geographische Breite, welche der Neigungswinkel der Vertikallinie eines Ortes gegen die Aequatorebene ist (§. 4): so sieht man sofort ein, dass die Polhöhe und Breite eines und desselben Ortes der Grösse nach gleich sind, und dass man demnach die Breite durch die Polhöhe bestimmen kann.

Alle Methoden, die Polhöhe eines Ortes mit grösster Genauigkeit zu messen, erfordern einen vorzüglichen astronomischen Apparat (feine Winkelmessinstrumente, Chronometer, Hilfstafeln etc.); wenn man diesen aber nicht besitzt, so kann man mittels eines Theodolithen oder Spiegelkreises durch blosses Messen von Höhenwinkeln die Polhöhe für viele Zwecke (nur nicht für den Normalpunkt einer Landesvermessung) ausreichend genau finden.

Würden sich in den Verlängerungen der Erdaxe, also an den Himmelspolen Fixsterne befinden, so könnte man, je nach der Lage des Ortes, dessen Polhöhe gesucht wird, den einen oder den andern anvisiren, und man brauchte folglich nur den Höhenwinkel dieser Visirlinie zu messen, um die gesuchte Polhöhe zu erhalten. Es gibt aber keine Fixsterne, die gerade so gelegen sind. Dagegen können wir uns auf der nördlichen Halbkugel der Erde des Polarsterns bedienen, welcher dem nördlichen Pole der Himmelskugel am nächsten steht und durch das bekannte Sternbild des grossen Bären leicht aufzufinden ist, da er in der Verlängerung der durch die beiden hinteren Sterne jenes Bildes gehenden Linie liegt und sich durch seine Grösse und Helligkeit von den nächsten Sternen auszeichnet. In Folge der Axendrehung der Erde kommt der Polarstern (S. Fig. 412) täglich

Fig. 412.

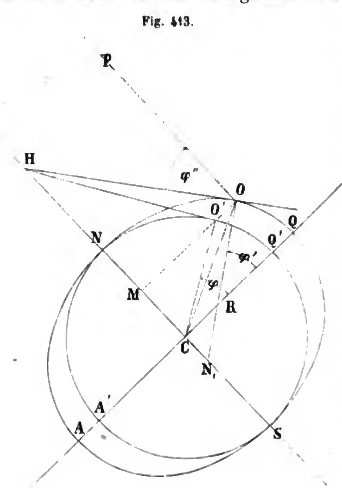


zweimal in die Ebene eines jeden Meridians, also auch des Orts O, dessen Polhöhe gesucht wird. Das Zusammentreffen mit der erweitert gedachten Meridianebene eines Orts nennt man die Culmination des Sterns für diesen Meridian und man unterscheidet eine obere und eine untere Culmination (S, S'). Stellt man nun einen Theodolithen über dem Punkte O horizontal und so auf, dass sich die Absehlinie in der Meridianebene dieses Punktes bewegt, und beobachtet man für die obere Culmination den Höhenwinkel $SOH = \psi$ und für die untere den Winkel $S'OH = \psi'$, so lässt sich aus diesen Winkeln derjenige Höhenwinkel φ' berechnen, welcher den Winkel SOS' halbirt und dessen geneigter Schenkel OP (wegen der ausserordentlichen Entfernung des Punktes P) der Erdaxe parallel ist: dieser Winkel ist aber die gesuchte Polhöhe und, wie man sofort einsieht, gleich

$$\varphi' = \tfrac{1}{2}(\psi + \psi'), \quad \ldots \ldots \quad (387)$$

vorausgesetzt, dass jeder der gemessenen Höhenwinkel ψ und ψ' schon seine Verbesserung wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung erhalten hat. Man liest nämlich in Folge dieser Strahlenbrechung für die obere Culmination nicht unmittelbar den Winkel ψ, sondern einen etwas grösseren γ und für die untere Culmination nicht ψ', sondern γ' ab. Bezeichnet nun ϱ die Refraction für γ und ϱ' die Refraction für γ', so ist $\psi = \gamma + \varrho$ und $\psi' = \gamma' + \varrho'$ zu setzen. Diese astronomischen Refractionen, welche sich nicht wie die terrestrischen nach der Formel $\varrho = kC$ berechnen lassen, findet man aber für den vorliegenden Zweck genau genug aus der Tafel Nr. XIX, welche dem Anhange beigefügt ist und einen Bestandtheil der Bessel'schen Refractionstafeln bildet. Es versteht sich, dass man die Winkel ψ und ψ' oder zunächst γ und γ' auch mit einem Spiegelkreise oder Sextanten bestimmen kann, sobald man nur die Zeiten der Culminationen des Polarsterns kennt.

Fig. 413.



Der Winkel φ', den man auf diese Weise erhält, ist gleich dem Winkel der Normale des Punktes O mit der Aequatorebene und heisst die scheinbare oder elliptische Polhöhe des Punktes O, weil er durch die scheinbare Horizontallinie dieses Punktes erhalten wird und

der Neigung der Normale des elliptischen Erdmeridians in jenem Punkte gleich ist. Diese Normale geht aber nur für die Breiten 0^0 und 90^0 durch den Mittelpunkt der Erde, in allen übrigen Fällen nicht. Will man nun die Breiten durch Winkel messen, welche alle ihre Scheitel in dem Erdmittelpunkte haben, so muss man nach Fig. 413, in welcher ANQS den Meridian von O und AQ den Schnitt der Aequatorebene vorstellt, statt der Normale ON_1 den Halbmesser OC und statt des Winkels $ORQ = \varphi'$ den Winkel $OCQ = \varphi$ setzen. Dieser Winkel heisst die wahre oder geocentrische Polhöhe von O und ist offenbar um den Winkel $CON_1 = \beta$ kleiner als die scheinbare Polhöhe φ', d. h. es ist

$$\varphi = \varphi' - \beta. \qquad (388)$$

Die Verbesserung β kann nach Bohnenberger auf folgende Weise gefunden werden. Beschreibt man mit der kleinen Halbaxe CN = b des elliptischen Meridians OQSAN einen in der Ebene dieses Meridians liegenden Kreis NO'SA', errichtet die Ordinate OM senkrecht zu SN, und zieht in dem Schnittpunkte O' eine Tangente O'H an den Kreis, so schneidet diese nach bekannten Sätzen der Curvenlehre die Tangente OH der Ellipse in dem Punkte H der verlängerten kleinen Axe SN und es ist, wenn man O'C zieht:

$$\begin{aligned} OHM &= MON_1 = ORQ = \varphi', \\ O'HM &= MO'C = O'CQ = \varphi, \\ \operatorname{tg} OHM : \operatorname{tg} O'HM &= OM : O'M = CQ : CN, \\ \operatorname{tg} MO'C : \operatorname{tg} MOC &= OM : O'M = CQ : CN. \end{aligned}$$

Multiplizirt man die beiden letzten Gleichungen miteinander und berücksichtigt, dass $\angle O'HM = MO'C$, $OHM = \varphi'$, $MOC = \varphi$, CQ gleich der grossen Halbaxe a und CN gleich der kleinen Halbaxe b des Erdmeridians ist, so folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi' = m \operatorname{tg} \varphi', \qquad (389)$$

wobei das Verhältniss von $b^2 : a^2 = m$ gesetzt wurde.

Es ist somit $\beta = \varphi' - \varphi = \varphi' - \operatorname{arc\,tg} (m \operatorname{tg} \varphi')$, und wenn man diese Gleichung differenziirt:

$$d\beta = d\varphi' - \frac{m\,d\varphi'}{(1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \varphi') \cos^2 \varphi}.$$

Setzt man das Verhältniss von $(a^2 - b^2) : (a^2 + b^2) = v$, so wird

$$d\beta = \frac{2v\,d\varphi'\,(v + \cos 2\varphi')}{1 + v^2 + 2v \cos 2\varphi'},$$

und wenn man den Bruch, womit $2v\,d\varphi'$ multiplizirt ist, in die Reihe $\cos 2\varphi' - v \cos 4\varphi' + v^2 \cos 6\varphi' - \ldots$ auflöst und vorstehende Gleichung integrirt, so folgt

$$\beta = v \sin 2\varphi' - \tfrac{1}{2} v^2 \sin 4\varphi' + \tfrac{1}{3} v^3 \sin 6\varphi' - \ldots \qquad (390)$$

Will man diesen in Theilen des Halbmessers bestimmten Winkel β, welcher die Neigung der Vertikallinie zu dem Erdhalbmesser eines Orts O vorstellt, in Sekunden ausdrücken, so muss man ihn noch mit der Anzahl

Sekunden, welche auf einen Bogen von der Länge des Halbmessers treffen, nämlich mit 206 265″ multipliziren. Hiernach wird, mit Weglassung des zweiten und dritten Gliedes des Ausdrucks für β, in dem vorliegenden Falle genau genug:

$$\beta = 206\,265 \text{ v} \sin 2\varphi' \text{ Sek.} \quad \ldots \ldots \quad (391)$$

und wenn man bedenkt, dass

$$v = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + ab}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a - b}{a}$$

sehr nahe der Abplattung der Erde (Gl. 1), also $= \frac{1}{300}$ ist, so folgt schliesslich

$$\beta = 687 \sin 2\varphi' \text{ Sek.} \quad \ldots \ldots \quad (392)$$

Für $\varphi' = 45^0$ ist $\sin 2\varphi' = \sin 90^0 = 1$ und daher der grösste Werth von $\beta = 11'27''$, woraus zu entnehmen, dass diese Verbesserung auch bei kleineren und grösseren Breiten nicht vernachlässigt werden darf.

B. Trigonometrische Höhenmessungen.

§. 334. Die trigonometrische Höhenmessung besteht darin, dass man die zu bestimmende Höhe mit zwei in der nämlichen Vertikalebene liegenden Linien zu einem Dreiecke vereinigt, in welchem drei Stücke (worunter eine Seite) durch mittel- oder unmittelbare Messung gefunden werden können, und dass man aus diesen Daten die gesuchte Höhe nach den bekannten Regeln der Trigonometrie berechnet.

Man theilt die Lehre von diesen Messungen gewöhnlich in zwei Abschnitte, von denen der eine die Höhenbestimmungen aus grossen Entfernungen behandelt. Als kleine Entfernungen werden hiebei diejenigen angesehen, welche keine Rücksicht auf Strahlenbrechung und Erdkrümmung erfordern, und als grosse jene, welche diese Rücksicht erheischen. Wir werden diese Eintheilung nicht machen, sondern sofort die Aufgaben behandeln, welche grosse Entfernungen zwischen dem Höhenobjecte und dem Beobachtungsorte voraussetzen, da in der Lösung dieser Aufgaben auch die Lösung der übrigen enthalten ist.

§. 335. Aufgabe. Die Sehne eines grössten Kreisbogens der Erde, welcher den Horizontalabstand zweier trigonometrischer Punkte misst, durch den Bogen und den Erdhalbmesser auszudrücken.

Sind A und B (Fig. 414) zwei Punkte der Erdoberfläche und stellt der Kreisbogen AH den wahren Horizont von A und BC eine Vertikallinie vor, so ist der Bogen AH der Horizontalabstand der Punkte A und B. Diesen letzteren Abstand könnte man berechnen, wenn in dem schiefwinkeligen Dreiecke ABH die Seite AH und zwei Winkel bekannt wären; es handelt sich also hier, wie in vielen anderen Fällen der trigonometrischen Höhenbestimmungen, um die Berechnung der Sehne AH = s aus dem Bogen AH = b,

wenn der Halbmesser $AC = r$ bekannt ist und vorausgesetzt wird, dass der Bogen b höchstens 8 bis 10 Meilen lang, d. h. nicht grösser ist als die Seite eines Dreiecks erster Ordnung für eine Landesvermessung. Diese Voraussetzung kommt also darauf zurück, dass der Bogen b im Vergleich zu r sehr klein ist und im ungünstigsten Falle $\frac{1}{80}$ r beträgt.

Fig. 414.

Drückt man den Winkel ACH im Bogenmasse aus, so wird $C = \frac{b}{r}$ und folglich die Sehne

$$s = 2r \sin\frac{1}{2} C = 2r \sin\left(\frac{b}{2r}\right).$$

Da das Verhältniss von $b : 2r$ höchstens $\frac{1}{160}$ beträgt, so ist genau genug:

$$\sin\left(\frac{b}{2r}\right) = \frac{b}{2r} - \frac{1}{6}\left(\frac{b}{2r}\right)^3,$$

und folglich auch, wenn man substituirt und reducirt:

$$s = b - \frac{1}{24}\frac{b^3}{r^2}. \qquad (393)$$

Setzt man beispielsweise den Bogen $b = 32\,666{,}08$ Toisen und $r = 3\,266\,608$ Toisen, also das Verhältniss von $b : r = 1 : 100$, so wird

$$s = 32\,666{,}08 - 0{,}137 = 32\,665{,}943 \text{ Toisen},$$

woraus zu entnehmen ist, dass man fast in allen Fällen den Bogen b und die Sehne s als gleich gross ansehen darf, da selbst in einem so ungünstigen Falle, wie der vorliegende ist, der Unterschied zwischen Sehne und Bogen nur $\frac{1}{240\,000}$ der Bogenlänge beträgt.

§. 336. **Aufgabe. Zwei trigonometrische Punkte sind durch ihren Horizontalabstand gegeben: man soll ihren Höhenunterschied bestimmen.**

1) **Mittels einseitiger Zenithwinkel.**

Es seyen A und B (Fig. 414) diese zwei Punkte und $HB = h$ der gesuchte Höhenunterschied.

Misst man in A den scheinbaren Zenithwinkel der Linie $AB = z$, so ist nach §. 329 der wahre Zenithwinkel $VAB = z + \varrho$. Aus dem bekannten Bogen $AH = b$ folgt nach Gl. (2) der Centriwinkel $ACH = C = 206\,265$

$\frac{b}{r}$ Sekunden, wenn $AC = r$ gesetzt wird. Es ist somit der Winkel $HAC = AHC = 90^0 - \frac{1}{2} C$ und folglich der Winkel

$$BAH = A = 90^0 - (z + \varrho) + \tfrac{1}{2} C,$$
$$ABH = B = z + \varrho - C,$$
$$AHB = H = 90^0 + \tfrac{1}{2} C.$$

Da nun in dem vertikalen Dreiecke ABH die drei Winkel A, B, H und eine Seite $AH = s = 2r \sin \frac{1}{2} C$ bekannt sind, so findet man hieraus die gesuchte Höhe

$$h = \frac{s \sin A}{\sin B} = \frac{s \cos (z + \varrho - \frac{1}{2} C)}{\sin (z + \varrho - C)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (394)$$

Berücksichtigt man, dass nach §. 329 der Refractionswinkel $\varrho = k C$ ist, so lässt sich der letzte Ausdruck für h auch so schreiben:

$$h = s \frac{\cos [z - (\frac{1}{2} - k) C]}{\sin [z - (1 - k) C]}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (395)$$

Entwickelt man (nach Prof. Winkler's Vorgange) den letzteren Ausdruck mit Hilfe des Maclaurin'schen Satzes in eine Reihe und berücksichtigt, dass die Sehne $s = 2r \sin \frac{1}{2} C$ ist, so findet man bis auf Glieder dritter Ordnung genau:

$$h = s \cot z + \frac{1 - 2k}{2r} s^2 + \frac{1 - k}{r} (s \cot z)^2. \quad . \quad . \quad . \quad (396)$$

Setzt man die Constanten

$$\frac{1 - 2k}{2r} = m,$$
$$\frac{1 - k}{r} = n,$$

so wird schliesslich der mit den strengen Ausdrücken für h fast übereinstimmende Näherungsausdruck:

$$h = s \cot z + m s^2 + n (s \cot z)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (397)$$

Dass beide Ausdrücke nahezu ganz gleiche Resultate geben, geht aus einem von Winkler (in Crelle's Journal der Mathematik Bd. 50, S. 36) berechneten Beispiele hervor, nach welchem für

$$s = 5880^m,4, \quad \log r = 6,804\,1294,$$
$$z = 73^0 47' 35'', \quad \log m = -\,7,170\,6609,$$
$$k = 0,07, \quad \log n = -\,6,835\,6465,$$

die strengen Formeln (394) und (395) die Höhe

$$h = 1711^m,392$$

und die Näherungsformeln (396) und (397)

$$\begin{aligned} s \cot z &= 1708^m,630 \\ m s^2 &= 2,334 \\ n (s \cot z)^2 &= 0,426 \\ \hline h &= 1711^m,390 \end{aligned}$$

liefern.

Vernachlässigt man den Einfluss der Erdkrümmung, d. h. sieht man

das in Fig. 414 enthaltene Dreieck ABH als ein bei H rechtwinkeliges und folglich den Centriwinkel C als null an, so wird nach Gl. (394) die Höhe

$$h = s \cot (z + \varrho); \quad \ldots \ldots \ldots \quad (398)$$

und darf man auch, wegen des unbedeutenden Horizontalabstandes s, die Refraction ϱ ausser Acht lassen, so erhält man

$$h = s \cot z = s \operatorname{tg} A; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (399)$$

wobei A den Höhenwinkel der Linie AB vorstellt. Vernachlässigt man bloss die Refraction, aber nicht die Erdkrümmung, so liefern die Gleichungen (394) und (395)

$$h = s \frac{\cos (z - \frac{1}{2} C)}{\sin (z + C)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (400)$$

und aus Gl. (396) folgt für diesen Fall der Näherungsausdruck:

$$h = s \cot z + \frac{s^2}{2r} + \frac{(s \cot z)^2}{r}. \quad \ldots \ldots \quad (401)$$

2) Mittels gegenseitiger und gleichzeitiger Zenithwinkel. Unter dieser Bedingung kann der Refractionswinkel ϱ oder dessen Werth kC aus den Gleichungen eliminirt werden, indem man nach Gl. (378), in welcher z_1 den scheinbaren Zenithwinkel von BA in B vorstellt,

$$2\varrho = 2kC = 180^0 + C - z - z_1$$

setzt. Hierdurch wird alsdann

$$z + \varrho - \tfrac{1}{2} C = 90^0 - \tfrac{1}{2} (z_1 - z)$$
$$z + \varrho - C = 90^0 - \tfrac{1}{2} (z_1 - z + C),$$

und folglich geht die Gleichung (394) und mit ihr Gl. (395) über in

$$h = s \frac{\sin \frac{1}{2} (z_1 - z)}{\cos \frac{1}{2} (z_1 - z + C)} \quad (402)$$

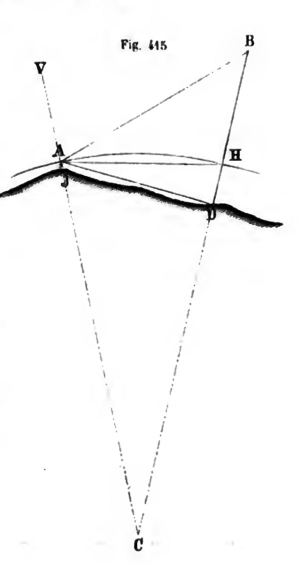
Will man hier die Erdkrümmung vernachlässigen, so braucht man nur $C = 0$ zu setzen, wodurch sich

$$h = s \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (z_1 - z) \quad . \; . \quad (403)$$

ergibt.

§. 337. **Aufgabe. Ein lothrechter Gegenstand ist gegeben: man soll dessen absolute Höhe bestimmen.**

1) Von einem gegebenen Punkte aus (Fig. 415).



Ist BD die gesuchte Höhe und in A die Drehaxe des Theodolithenfernrohrs, so ist zunächst nach §. 336 die Höhe des Punktes B über A oder

$$BH = h = s \frac{\cos (z + \varrho - \frac{1}{2} C)}{\sin (z + \varrho - C)}.$$

Für das Stück DH der Höhe BD

hat man ganz ähnliche Betrachtungen wie im vorigen Paragraph für BH anzustellen. Es ist nämlich, wenn der scheinbare Zenithwinkel der Linie $AD = z'$ gemessen wurde, der wahre Zenithwinkel $VAD = z' + \varrho$, und da der Winkel

$$VAH = 90^0 + \frac{1}{2}C$$

ist, so ergibt sich der Winkel

$$HAD = z' + \varrho - \frac{1}{2}C - 90^0.$$

Ferner ist, da der Winkel $B = z' + \varrho - C$, der Winkel

$$ADB = 180^0 - (z' + \varrho - C);$$

daher auch aus dem schiefwinkeligen Dreiecke AHD die Höhe

$$DH = h' = -s\frac{\cos(z' + \varrho - \frac{1}{2}C)}{\sin(z' + \varrho - C)}.$$

Addirt man die Werthe von h und h', so erhält man nach einer einfachen Reduction die gesuchte Höhe

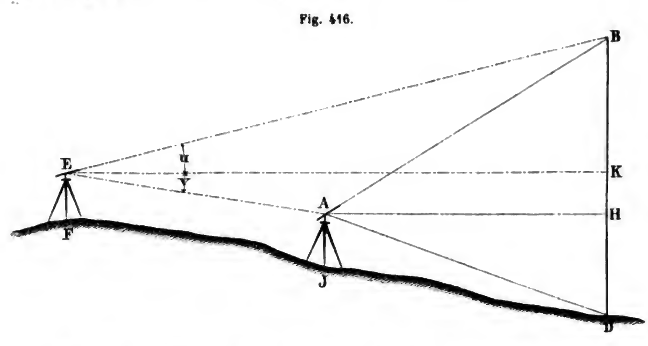
$$BD = h + h' = \frac{s\sin(z' - z - \frac{1}{2}C)}{\sin(z' + \varrho - C)\sin(z + \varrho - C)}. \quad . \quad (404)$$

Liegt der Gegenstand BD dem Punkte A so nahe, dass man die Erdkrümmung und Strahlenbrechung vernachlässigen darf, so wird

$$BD = s\frac{\sin(z' - z)}{\sin z' . \sin z}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (405)$$

2) Von einer mit BD in einer Ebene liegenden Standlinie aus (Fig. 416).

Fig. 416.



Es kann bei weniger weit entfernten Punkten vorkommen, dass man die Horizontale $AH = s$ nicht unmittelbar bestimmen kann: in diesem Falle ist das Messungsverfahren so einzurichten, dass man die Länge s mittelbar findet. Zu dem Ende nimmt man hinter dem Punkte A der Fig. 416 noch einen zweiten Standpunkt E so an, dass die Gerade AE in einer durch BD gehenden Vertikalebene liegt, macht die Instrumentenhöhe $EF = AJ$,

wodurch die Linie FJ = AE wird und misst die Länge FJ = l, so wie den Höhenwinkel BEK = u und den Tiefenwinkel KEA = v unmittelbar, und berechnet hieraus die Seite AB des Dreiecks AEB aus folgenden drei Stücken: der Seite AE = l, dem Winkel BEA = u + v und dem Winkel EBA = EBK − ABK = 90⁰ − (u + z). Hiernach wird

$$AB = l\,\frac{\sin(u + v)}{\cos(u + z)}$$

und somit

$$AH = AB \sin z = l \sin z\,\frac{\sin(u + v)}{\cos(u + z)}.$$

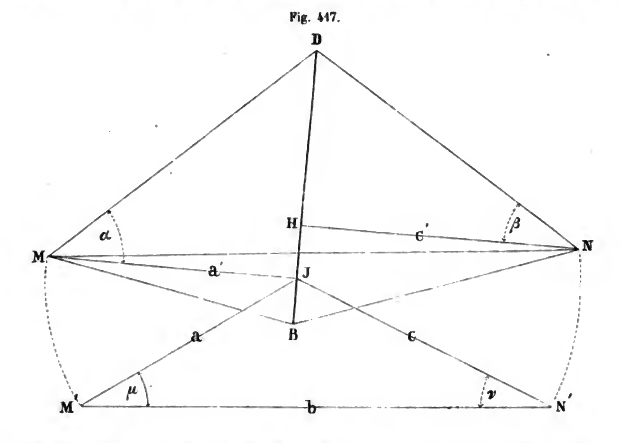
Substituirt man diesen Werth von AH für s in der Gleichung (405), so erhält man schliesslich

$$BD = l\,\frac{\sin(z' - z) \,.\, \sin(u + v)}{\sin z' \,.\, \cos(u + z)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (406)$$

3) Von einer mit BD nicht in einer Ebene liegenden Standlinie aus (Fig. 417).

Stellt BD die Höhe eines Thurmes vor, welcher rings von Häusern umgeben ist, so ist in der Regel weder das erste noch das zweite eben

Fig. 417.



beschriebene Verfahren anwendbar, da beide voraussetzen, dass man den Fusspunkt D der Vertikallinie BD anvisiren kann. In diesem Falle muss man den horizontalen Abstand des Instrumentes von der zu messenden Höhe mittelbar durch ein Dreieck bestimmen, welches über der gegebenen Standlinie dadurch errichtet wird, dass man die Vertikallinie BD als dritten Eckpunkt annimmt.

Man wird desshalb, nachdem die Basis MN (welche so liegen muss, dass man von M und N aus nach der Spitze D visiren kann, und dass das horizontal projicirte Dreieck MND von einem gleichseitigen nicht zu sehr abweicht) mit Messlatten gemessen und auf bekannte Weise auf den Horizont reducirt ist, die Horizontalprojectionen der Winkel $DMN = \mu$ und $DNM = \nu$ so genau als möglich messen und hieraus mit Hilfe der horizontalen Projection der Standlinie $MN = b$ die Projectionen der Dreiecksseiten $MD = a$ und $DN = c$ berechnen, wodurch man erhält:

$$a = \frac{b \sin \nu}{\sin (\mu + \nu)},$$

$$c = \frac{b \sin \mu}{\sin (\mu + \nu)}.$$

Wird hierauf in M der Höhenwinkel $DMJ = \alpha$ gemessen, so findet sich das Stück JD der gesuchten Höhe BD gleich

$$h = \frac{b \sin \nu \operatorname{tg} \alpha}{\sin (\mu + \nu)}.$$

Kann man von M aus nicht nach dem Fusspunkte B des Thurmes visiren, so muss der Höhenunterschied zwischen M und B durch ein genaues Nivellement ermittelt werden. Ist dieser $= JB = i$ gefunden, so wird die gesuchte Höhe

$$BD = JB + JD = i + h = i + \frac{b \sin \nu \operatorname{tg} \alpha}{\sin (\mu + \nu)} \quad . \quad . \quad . \quad (407)$$

Misst man in dem Punkte N auch den Höhenwinkel $DNH = \beta$, so ergibt sich aus dem rechtwinkeligen Dreiecke DHN, in welchem $HN = c$ ist, das Stück HD der Höhe BD gleich

$$h' = \frac{b \sin \mu \operatorname{tg} \beta}{\sin (\mu + \nu)}.$$

Ermittelt man nun wieder den Höhenunterschied i' zwischen N und B durch Nivelliren, so erhält man einen zweiten Ausdruck für die gesuchte Thurmhöhe, nämlich

$$BD = HB + BD = i' + h' = i' + \frac{b \sin \mu \operatorname{tg} \beta}{\sin (\mu + \nu)} \quad . \quad . \quad (408)$$

Stimmt dieser Werth mit dem ersten überein, so ist dieses jedenfalls ein sehr günstiges Zeichen für die Genauigkeit der Arbeit; und man wird mit dieser vollständig zufrieden seyn können, wenn man sich vorher davon überzeugt hat, dass die Standlinie so genau als möglich gemessen ist.

Dass man die Winkel μ und α ebenso wie ν und β mit ein- und derselben Aufstellung des Instruments misst, und dass man den Höhenunterschied der Punkte N und B aus dem Nivellement der Linien MB und MN erhält, bedarf wohl kaum mehr als dieser kurzen Erwähnung.

§. 338. **Aufgabe. In der Nähe des Meeres die Höhe eines Punktes über dem Meeresspiegel zu bestimmen.**

Die relativen Höhenbestimmungen der Hauptpunkte eines Landes, welche man in der Regel mit der Landesvermessung vornimmt, werden in der

Fig. 418.

Absicht gemacht, die absolute Höhe jener Punkte über dem Meere zu erfahren. Hiezu muss aber die absolute Höhe wenigstens eines Punktes des trigonometrischen Netzes bekannt seyn. Gewöhnlich wird diese Höhe durch Barometermessungen bestimmt; sicherer aber kann man diese absolute Höhe eines Punktes, der in der Nähe eines Meeres mit geringer Ebbe und Fluth liegt, durch trigonometrische Messungen, und am sichersten durch Nivelliren finden. Hier ist nur von trigonometrischen Bestimmungen die Rede.

1) Höhenbestimmung nach dem Zenithwinkel des Meeresspiegels.

Stellt in Fig. 418 der Bogen BD den Meeresspiegel vor und ist A der Punkt, dessen Höhe AD = h bestimmt werden soll, so kann man in A durch Anvisiren der fernsten Stelle B der Meeresfläche den wahren Zenithwinkel

$$VAB = z + \varrho,$$

wobei z den scheinbaren Zenithwinkel und $\varrho = kC$ die Refraction vorstellt, bestimmen und hieraus und aus dem bekannten Erdhalbmesser $BC = r$ die gesuchte Höhe h berechnen.

Aus dem rechtwinkeligen Dreiecke ABC folgt sofort die Höhe

$$h = CA - CD = \frac{r}{\sin(z+\varrho)} - r = r\,\frac{1-\sin(z+\varrho)}{\sin(z+\varrho)}.$$

Es ist aber nach einer bekannten trigonometrischen Relation

$$\frac{1-\sin x}{\sin x} = \cot x \operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2}x),$$

und daher, wenn man substituirt:

$$h = r\cot(z+\varrho)\operatorname{tg}[45^0 - \tfrac{1}{2}(z+\varrho)]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (409)$$

Will man, da in dem vorliegenden Falle z immer ein stumpfer Winkel ist, die Formel noch bequemer machen, so kann man

$$\cot(z + \varrho) = -\operatorname{tg}(z + \varrho - 90^0) \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}[45^0 - 1/2 (z + \varrho)] = -\operatorname{tg}[1/2 (z + \varrho) - 45^0]$$

schreiben, wodurch man schliesslich erhält:

$$h = r \operatorname{tg}(z + \varrho - 90^0) \operatorname{tg} 1/2 (z + \varrho - 90^0). \quad . \quad . \quad . \quad (410)$$

Da die Refraction ϱ von dem Winkel C abhängt, dieser aber nicht unmittelbar gegeben ist, so hat man vorerst C zu berechnen. Hiezu dient aber das rechtwinkelige Dreieck ABC, welches die Gleichung

$$VAB = z + \varrho = z + kC = 90^0 + C$$

liefert, aus der sofort folgt:

$$C = \frac{z - 90^0}{1 - k} \text{ und } \varrho = \frac{k}{1 - k}(z - 90^0). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (411)$$

Setzt man diesen Werth von ϱ in die Gleichung und schreibt $\frac{1}{1 - k} = 1 + k = m$, so erhält man

$$h = r \operatorname{tg} m (z - 90^0) \operatorname{tg} 1/2\, m (z - 90^0).$$

Da $z - 90^0$ ein sehr kleiner Winkel ist, so kann man auch annähernd $\operatorname{tg} m (z - 90^0) = m \operatorname{tg}(z - 90^0)$ setzen, und folglich

$$h = 1/2\, r\, m^2 \operatorname{tg}^2 (z - 90^0). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (412)$$

2) Höhenbestimmung mit Hilfe eines Pegels.

Stellt man am Ufer des Meeres, wie es an Flüssen geschieht, einen hinreichend starken und hohen Massstab oder Pegel auf, durch den man nicht nur den höchsten und niedrigsten, sondern auch für einen bestimmten Zeitraum den mittleren Stand des Wasserspiegels beobachten kann: so braucht man nur die Höhe des Berges über diesem Pegel zu messen, um damit auch sofort dessen Höhe über dem Meere zu erhalten.

Bezeichnet in Fig. 418 die Linie PW den Pegel und W den Wasserstand, auf welchen die Höhe AD des Punktes A bezogen werden soll, so findet man von A aus mittels einseitiger Zenithwinkel die Höhe $AQ = h_1$ nach Gl. (395) und, wenn man auch über P einen Theodolithen aufstellen kann, mittels gegenseitiger und gleichseitiger Zenithwinkel dieselbe Höhe h_1 nach Gl. (402). Addirt man in beiden Fällen den Abstand $PW = QD = i$ zu h_1, so ist die gesuchte Höhe

$$AD = h = i + h_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (413)$$

gefunden.

C. Höhenmessen durch Nivelliren.

§. 339. Die trigonometrischen Höhenbestimmungen setzen immer die Kenntniss einer Standlinie voraus und ihre Genauigkeit hängt wesentlich von der Schärfe, womit diese Linie gemessen wurde, und bei grossen Entfernungen von der atmosphärischen Strahlenbrechung und der Erdkrümmung ab.

Werden dergleichen Höhenbestimmungen gleichzeitig mit der Anlage eines Dreiecknetzes für eine Landesvermessung vorgenommen, so erfolgt die Bestimmung der Dreiecksseiten, welche hier als Standlinien erscheinen, nicht auf Rechnung der trigonometrischen Höhenmessung, wesshalb auch diese in einem solchen Falle entschieden den Vorzug vor jeder anderen Methode der Höhenbestimmung verdient.

Handelt es sich um Höhen von Thürmen, Bäumen und anderen erhabenen Gegenständen, welche in ausgedehnten Ebenen stehen, oder deren Spitzen unzugänglich sind, so ist wiederum die trigonometrische Höhenbestimmung die geeignetste, in vielen Fällen sogar die einzig mögliche.

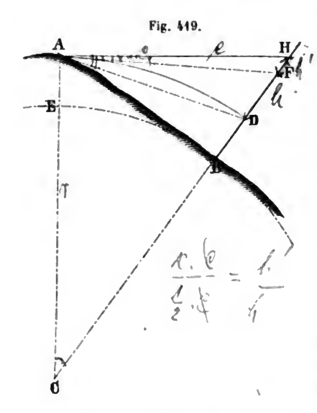
Wenn es aber, wie bei vielen technischen Unternehmungen, darauf ankommt, die relative Höhenlage einer grossen Reihe von Punkten mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, während ihre gegenseitigen Entfernungen nur mit geringer Genauigkeit gemessen zu seyn brauchen: so ist die trigonometrische Höhenmessung nicht mehr anwendbar, weil sie in Folge der nicht scharf gemessenen Standlinien und der veränderlichen Strahlenbrechung nur ungenaue Resultate liefern kann, abgesehen von der grösseren Arbeit, welche sie verursacht. In solchen Fällen erscheint das Nivelliren, welches keine Horizontalmessungen voraussetzt und dessen Resultate fast immer von den nachtheiligen Einflüssen der Strahlenbrechung und Erdkrümmung befreit werden können, als die vorzüglichste Art der Höhenmessung.

§. 340. Aufgabe. Den Einfluss der Erdkrümmung und der Strahlenbrechung auf die Resultate des Nivellirens darzustellen.

Im ersten Theile dieses Werks (S. 309) haben wir zur Erläuterung des Begriffs der Nivellirinstrumente angenommen, es handle sich bloss um die Ermittelung des Höhenunterschieds zweier nahe gelegener Punkte und unter dieser Voraussetzung war es nicht nöthig, auf die Krümmung der Erde und die Brechung des Lichts in der Luft Rücksicht zu nehmen. Jetzt muss der Begriff des Nivellirens etwas schärfer gefasst werden, damit man klar einsieht, in welchem Zusammenhange die Erdkrümmung und Strahlenbrechung mit dem Nivelliren stehen, und in welchen Fällen deren Einflüsse eliminirt oder doch unschädlich gemacht werden können.

1) Der Höhenunterschied zweier Punkte ist der senkrechte Abstand ihrer wahren Horizonte. Sind A und B (Fig. 419) zwei Punkte der Erdoberfläche und AD, BE ihre von dem Erdmittelpunkte C aus beschriebenen und in der Vertikalebene ABC liegenden wahren Horizontallinien, so bezeichnen die vertikalen Linien AE und BD den gesuchten Höhenunterschied. Denkt man sich nun in dem Punkte A eine in der Ebene ABC liegende horizontale Visirlinie AH, wie sie ein Nivellirinstrument liefert, so ist diese eine Tangente zum wahren Horizonte AD und gibt folglich auf einer in B lothrecht stehenden Nivellirlatte nicht die gesuchte Höhe BD, sondern (wenn man vorläufig von der Strahlenbrechung absieht) die Höhe BH an. Man findet

Fig. 419.



somit den Höhenunterschied der Punkte A und B in diesem Falle um den Abstand DH des scheinbaren und wahren Horizonts zu gross.

Bezeichnet man diesen Abstand mit h, die Entfernung der Latte vom Punkte A oder AH mit e und den Erdhalbmesser AC mit r, so ist nach einem bekannten geometrischen Satze $e^2 = h\,(2r + h)$, und da hier h gegen 2r verschwindet,

$$h = \frac{e^2}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad (414)$$

Um diese Grösse müsste jede Ablesung auf einer Nivellirlatte kleiner gemacht werden, wenn es nicht Nivellirmethoden gäbe, welche diese Verbesserung wegen der Erdkrümmung überflüssig machen.

2) Die Wirkung der atmosphärischen Strahlenbrechung besteht darin, dass sie (mit Bezug auf die vorige Figur) dem in A befindlichen Auge nicht den Punkt H, sondern einen um den Refractionswinkel tiefer liegenden Punkt F sichtbar macht. Man wird also auch auf der Latte in B nicht die Höhe BH, sondern BF ablesen, welche um das Stück $HF = h'$ kleiner ist. Die Grösse h′, welche den Einfluss der Strahlenbrechung auf die Entfernung e der Nivellirlatte von dem Punkte A bezeichnet, lässt sich wie folgt durch h ausdrücken.

Denkt man sich nämlich die Linien AF, AD in Fig. 419 gezogen, so verhalten sich die äusserst kleinen Winkel $HAF = \varrho$ und $HAD = \frac{1}{2}\,(ACB) = \frac{1}{2}\,C$ sehr nahe wie die Linien $HF = h'$ und $HD = h$, und da $\varrho = kC$, so wird

$$h' = 2kh = k\,\frac{e^2}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (415)$$

Setzt man nach Gauss die Refractionsconstante $k = 0{,}0653$, so ist

$$h' = 0{,}1306\,h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (416)$$

also der Einfluss der Strahlenbrechung ungefähr 8mal geringer als jener der Erdkrümmung.

3) Fasst man beide Einflüsse zusammen, so ergeben die bisherigen Betrachtungen leicht, dass die Strahlenbrechung den fehlererzeugenden Einfluss der Erdkrümmung theilweise aufhebt, und dass demnach durch das Zusammenwirken beider die Ablesung auf der Nivellirlatte nur um das Stück

$$DF = DH - HF = h - h' = c$$

zu verbessern ist. Diese Verbesserung, welche man die Reduction auf den wahren Horizont nennt, ist demnach allgemein gleich

$$c = (1 - 2k) \frac{e^2}{2r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (417)$$

und mit Berücksichtigung des Gauss'schen Coefficienten gleich

$$c = 0{,}4347 \frac{e^2}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (418)$$

Die nachstehende Tabelle gibt einen Ueberblick der Grösse c für verschiedene Werthe von e und für r = 3 266 608 Toisen.

Entfernung e	Reduction c	Entfernung e	Reduction c	Entfernung e	Reduction c
Toisen.	Par. Linien.	Toisen.	Par. Linien.	Toisen.	Par. Linien.
10	0,0115	80	0,736	400	18,396
20	0,0460	90	0,931	500	28,744
30	0,1035	100	1,150	600	41,391
40	0,1840	150	2,587	700	56,338
50	0,2874	200	4,599	800	73,585
60	0,4139	250	7,186	900	93,130
70	0,5634	300	10,348	1000	114,976

1. Die Methoden des Nivellirens.

§. 341. Beträgt der Höhenunterschied zweier Punkte nicht mehr als die Länge der Nivellirlatte und sind diese beiden Punkte nur so weit von einander entfernt, dass eine einzige Aufstellung des Nivellirinstruments hinreicht, jenen Unterschied zu finden: so nennt man das zur Bestimmung dieses Unterschiedes nöthige Messverfahren ein einfaches Nivellement; sind aber mehrere Aufstellungen des Nivellirinstrumentes zur Auffindung des Höhenunterschieds zweier Punkte nöthig, weil dieselben entweder in horizontaler oder vertikaler Projection zu weit auseinander liegen: so heisst die Verbindung dieser einfachen Nivellemente für den genannten Zweck ein zusammengesetztes Nivellement.

Die Nivellirmethoden unterscheiden sich lediglich durch die Lage des Standortes des Instrumentes gegen die einzunivellirenden zwei Punkte; und da der Standort nur entweder in einem der beiden Punkte oder zwischen denselben angenommen wird, so hat man auch nur zwei Arten des Nivellirens, nämlich das Nivelliren aus einem Endpunkte und das Nivelliren aus einem Zwischenpunkte zu betrachten.

§. 342. Aufgabe. Das Nivelliren aus einem Endpunkte darzustellen.

Sind A und B (Fig. 420 und 421) die einzunivellirenden Punkte, und stellt BG die in der Vertikalebene AB liegende wahre Horizontallinie des Punktes B, die Linie AJ aber eine Vertikale vor, so ist AG = u der gesuchte Höhenunterschied, welcher sowohl von A als von B aus bestimmt werden kann.

Stellt man das Instrument in A und die Latte in B auf (Fig. 420), so liefert das bekannte Verfahren eine Ablesung auf der Latte, welche dem

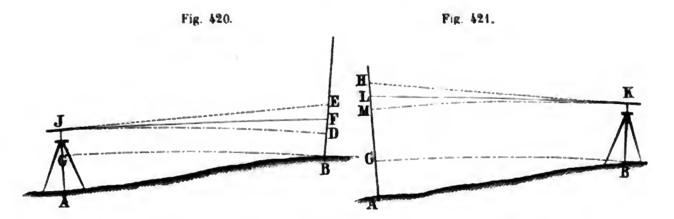


Fig. 420. Fig. 421.

Lattenabschnitte $BF = l$ entspricht, wenn F derjenige Punkt der Latte ist, welcher um den Refractionswinkel ϱ unter der horizontalen Absehlinie JE des Instruments liegt. Zieht man durch den Punkt J die wahre Horizontallinie JD, so wird der Lattenabschnitt nach §. 340 auf den wahren Horizont, d. i. auf den Punkt D, wo der Kreis JD die Latte trifft, reducirt, indem man c von l abzieht: es ist somit

$$BD = JG = l - c,$$

und folglich, wenn man die Instrumentenhöhe $AJ = i$ setzt, der gesuchte Höhenunterschied $AG = AJ - JG$ oder

$$u = i - l + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (419)$$

Befindet sich das Nivellirinstrument in dem höher gelegenen Punkte B und die Latte über A (Fig. 421), so gelangt durch das horizontal gerichtete Fernrohr das Bild des Punktes L, welcher um den Refractionswinkel ϱ unter der Visirlinie KH liegt, in's Auge. Steht dieser nun um die Länge l' von A ab und ist KM der wahre Horizont des in der Höhe $BK = i'$ aufgestellten Instruments, so ist auch, da die Reductionsgrösse c dieselbe bleibt:

$$AM = AL - LM = l' - c$$

und folglich der gesuchte Höhenunterschied AG der Punkte A und B oder

$$u = l' - i' - c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (420)$$

Vergleicht man die beiden für u erhaltenen Ausdrücke mit einander und berücksichtigt, dass B höher liegt als A, so folgt daraus der Satz: Die aus der Erdkrümmung und Strahlenbrechung hervorgehende Reduction c ist bei Steigungen zu dem positiven Unterschiede zwischen der Instrumentenhöhe und dem Lattenabschnitte zu addiren, bei Gefällen aber davon zu subtrahiren.

Addirt man die beiden Gleichungen (419) und (420), so erhält man

$$u = \tfrac{1}{2}(l' - l) + \tfrac{1}{2}(i - i'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (421)$$

d. h. es lässt sich dadurch, dass man das Nivellirinstrument nicht bloss in dem einen Endpunkte (A), sondern auch in dem anderen (B) aufstellt und das Nivellirverfahren vollzieht, der Einfluss der Erdkrümmung und der

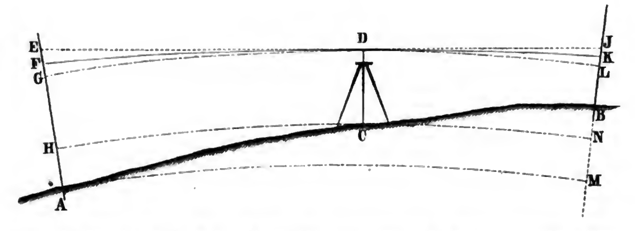
Strahlenbrechung auf das Resultat der Messung beseitigen, was bei einer einzigen Aufstellung nicht möglich ist.

§. 343. Aufgabe. Das Nivelliren aus einem Zwischenpunkte darzustellen.

Sind A und B (Fig. 422) die beiden gegebenen Punkte, deren Höhenunterschied

$$BM = AH + BN = u$$

Fig. 422.



ermittelt werden soll; steht ferner das Instrument auf einem in oder ausserhalb der Linie AB liegenden Punkte C, welcher von B um die Länge e und von A um die Länge e′ entfernt ist; setzt man weiter die Instrumentenhöhe $CD = i$ und die Ablesungen in $B = l$, in $A = l'$; und heissen endlich die Reductionen auf den wahren Horizont für den Punkt $B = c$ und für $A = c'$: so ist nach dem vorigen Paragraph die Steigung von C bis B oder

$$BN = i - l + c$$

und das Gefälle von C bis A oder

$$AH = l' - i - c'.$$

Addirt man beide Gleichungen, so folgt daraus der Höhenunterschied

$$u = l' - l - (c' - c). \qquad (422)$$

Für $e' = e$ wird $c' = c$ und folglich in diesem Falle

$$u = l' - l. \qquad (423)$$

Wenn man also das Nivellirinstrument in gleicher Entfernung von den beiden Endpunkten einer Station aufstellt, so eliminirt man dadurch den Einfluss sowohl der Erdkrümmung und Strahlenbrechung, als auch der Instrumentenhöhe auf das Messungsresultat.

Diesen Vortheil gewährt keine andere Art des Nivellirens, und desshalb ist auch das „Nivelliren aus der Mitte einer Station" jedem anderen Verfahren vorzuziehen; manchmal ist man jedoch durch Localverhältnisse gezwungen, sich in den Endpunkten aufzustellen.

Das Einhalten der Mitte der Station, d. i. gleicher Entfernungen von den Endpunkten, ist nicht strenge nöthig, da nach Gl. (422) der Einfluss der ungleichen Entfernungen e′ und e nur dem Unterschiede der ihnen entsprechenden Reductionen c′ und c gleich kommt und die Reductionsgrössen

selbst für ziemlich grosse Entfernungen nur wenig betragen. Gesetzt in einer Station stehe das Nivellirinstrument um 50 Toisen oder 300 Pariser Fuss von dem einen und nur um 30 Toisen oder 180 Pariser Fuss von dem anderen Endpunkte ab: so ist nach der in §. 340 mitgetheilten Tabelle $c' = 0{,}2874$ Pariser Linien, $c = 0{,}1035$ Pariser Linien, und folglich $c' - c = 0{,}184$ Pariser Linien; ein Fehler, der bei den meisten Nivellementen nicht beachtet zu werden braucht. Es genügt also vollständig, wenn man die Mitte der Station nach dem Augenmasse bestimmt und dabei auf einen festen Standpunkt des Instrumentes Rücksicht nimmt. (Es wird jedoch wiederholt erinnert, dass diese „Mitte“ nicht in der Vertikalebene der einzunivellirenden Punkte zu liegen braucht, sondern nach der Beschaffenheit des Terrains beliebig ausserhalb jener Ebene liegen darf.)

Mit dem in §. 220 beschriebenen Stampfer'schen Nivellirinstrumente kann man nicht bloss nach den beiden hier betrachteten Methoden nivelliren, sondern auch noch auf eine besondere Art den Höhenunterschied zweier Punkte bestimmen. Diese Bestimmungsweise gehört jedoch mehr in das Gebiet der trigonometrischen Höhenmessung als in das des Nivellirens, und da sie bereits in der ersten Abtheilung (S. 343 und 344) erörtert wurde, so kann sie hier ganz übergangen werden.

2. Das Nivelliren der Linien.

§. 344. Für technische Zwecke sind meist zusammengesetzte Nivellemente erforderlich, um die gegenseitige Höhenlage von mehr als zwei Punkten der Erdoberfläche zu erfahren. Liegen die einzunivellirenden Punkte alle in einer Vertikalebene oder in einer lothrechten Cylinderfläche von ganz beliebiger Leitlinie: so heisst das Verfahren zur Bestimmung der Höhenunterschiede aller Punkte der hierdurch bezeichneten geraden oder krummen Linie das Nivellement einer Linie. Sind dagegen die einzunivellirenden Terrainpunkte nach verschiedenen Richtungen zerstreut, aber doch einander so nahe gelegen, dass man aus ihrer gegenseitigen Höhenlage auch die geometrische Form der Fläche beurtheilen kann: so nennt man die Bestimmung der Höhenunterschiede dieser Punkte das Nivellement einer Fläche.

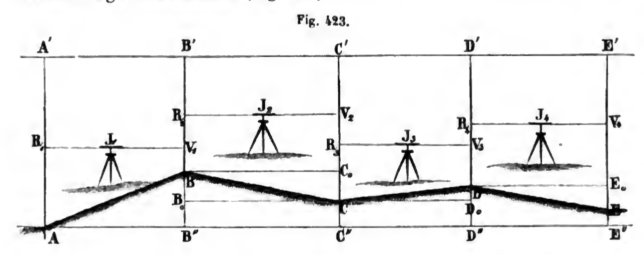
Hat man eine gerade Linie in bekannter Weise auf dem Felde abgesteckt und ausgemessen, so ist ihre Horizontalprojection gegeben; bestimmt man dazu auch die relative Höhenlage aller Punkte dieser Linie durch Nivelliren, so kann man offenbar ein Bild von dem Durchschnitte des Terrains mit der lothrechten Ebene, wodurch die gerade Linie bezeichnet ist, entwerfen und sich folglich eine klare Vorstellung von der Form des Terrains nach der abgesteckten Richtung machen.

Ein Bild, welches die Erhöhungen und Vertiefungen des Terrains nach einer Linie darstellt, nennt man ein Terrainprofil: die Linie, nach welcher das Profil genommen ist, kann lang oder kurz, gerade oder krumm

seyn. In dem letzteren Falle stellt das Profil den Durchschnitt einer lothrechten Cylinderfläche mit der Terrainfläche vor. Werden Terrainprofile nach zwei sich schneidenden Richtungen aufgenommen, so unterscheidet man diese Profile dadurch von einander, dass man das grössere ein Längenprofil und das kleinere ein Querprofil nennt: Längen- und Querprofile bedingen also einander; wo die einen oder die anderen fehlen, gibt es nur Profile schlechtweg.

§. 345. **Aufgabe. Auf dem Felde ist eine Reihe von Punkten mit Grundpfählen bezeichnet, man soll ihre gegenseitige Höhenlage bestimmen** (Fig. 423).

Fig. 423.



Sind A, B, C, D, E .... die gegebenen Punkte, so bestimme man zunächst den Höhenunterschied zwischen A und B nach §. 343, indem man das Nivellirinstrument in J_1 nahezu gleichweit von A uhd B aufstellt und die Lattenabschnitte

$$AR_1 = r_1 \text{ und } BV_1 = v_1$$

abliest und aufzeichnet. Hierauf bringe man das Instrument nach J_2 zwischen B und C, nahezu gleichweit von beiden Punkten entfernt, verfahre wieder nach §. 343 und bemerke sich die Lattenabschnitte

$$BR_2 = r_2 \text{ und } CV_2 = v_2.$$

Ebenso findet man in dem Punkte J_3 zwischen C und D

$$CR_3 = r_3 \text{ und } DV_3 = v_3,$$

in dem Standpunkte J_4 zwischen D und E

$$DR_4 = r_4 \text{ und } EV_4 = v_4,$$

und in dem Standpunkte J_n der n^{ten} Station:

$$NR_n = r_n \text{ und } N_1 V_n = v_n.$$

Die Ablesungen $r_1, r_2, r_3, r_4 \ldots r_n$, welche in den Stationen 1, 2, 3, 4 .... n auf den rückwärts gelegenen Punkten A, B, C, D .... N gemacht wurden, nennt man „Rückblicke" und die Ablesungen $v_1, v_2, v_3, v_4 \ldots v_n$, welche in denselben Stationen den vorwärtsgelegenen Punkten B, C, D, E... N_1 angehören, „Vorblicke." Mit diesen Ablesungen ist die Aufnahme des Nivellements vollendet.

Die Berechnung desselben erstreckt sich zunächst auf die Höhenunter-

schiede zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten. Zieht man stets den Vorblick vom Rückblick ab, so gibt das Vorzeichen der wirklich ausgerechneten Differenz an, ob von dem vorhergehenden Punkte zum folgenden eine Steigung oder ein Gefälle stattfindet; zieht man aber immer nur die kleinere Zahl von der grösseren ab, so ist zu der hierdurch erhaltenen positiven Differenz noch zu bemerken, ob sie eine Steigung oder ein Gefälle bezeichnet.

In dem vorliegenden Falle geben Messung und Rechnung

von A bis B eine Steigung $B''B = r_1 - v_1 = +(r_1 - v_1)$;
„ B „ C ein Gefälle $C^0C = v_2 - r_2 = -(r_2 - v_2)$;
„ C „ D eine Steigung $D^0D = r_3 - v_3 = +(r_3 - v_3)$;
„ D „ E ein Gefälle $E^0E = v_4 - r_4 = -(r_4 - v_4)$;
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Mit den Steigungen und Gefällen zwischen je zwei auf einander folgenden Punkten lassen sich sehr leicht die Höhenunterschiede zwischen je zwei getrennten Punkten berechnen. Denn zieht man durch die Punkte A, B, D, E . . . horizontale und vertikale Linien, so überzeugt man sich leicht, dass der Höhenunterschied

zwischen A und $B = BB'' = u_1 = r_1 - v_1$;
„ B „ $C = CC'' = u_2 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2$;
„ C „ $D = DD'' = u_3 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - v_3$;
„ D „ $E = EE'' = u_4 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - v_3 + r_4 - v_4$;

und dass somit auch der Höhenunterschied zwischen dem Endpunkte der n^{ten} und dem Anfangspunkte der ersten Station

$$u = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 + r_3 - v_3 + \ldots\ldots + r_n - v_n$$

ist. Bezeichnet man die Summe aller Differenzen aus r und v von $r_1 - v_1$ bis $r_n - v_n$ mit $\Sigma (r - v)_n$, so lässt sich die vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$u = \Sigma (r - v)_n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (424)$$

womit demnach auf sehr einfache Weise ausgedrückt ist, dass der Höhenunterschied zwischen irgend zwei Punkten einer nivellirten Linie gleich ist der algebraischen Summe aller Steigungen und Gefälle zwischen diesen Punkten.

Da sich der vorletzte Ausdruck für u auch so schreiben lässt:

$$u = (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n) - (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n),$$

und da man die Summe aller r von r_1 bis r_n durch Σr_n und die Summe aller v von v_1 bis v_n durch Σv_n bezeichnen kann, so ist auch

$$u = \Sigma r_n - \Sigma v_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (425)$$

d. h. man erhält den Höhenunterschied irgend zweier Punkte einer nivellirten Linie auch dadurch, dass man von der Summe aller Rückblicke die Summe aller Vorblicke zwischen diesen zwei Punkten subtrahirt.

Die beiden Gleichungen (424) und (425) geben den Vertikalabstand jedes Punktes der nivellirten Linie von einer Horizontalebene, die durch

den Anfangspunkt A geht. Statt dieser Horizontalebene kann man aber auch jede andere wählen, welche um eine beliebige Grösse über oder unter A liegt. Befindet sich diese Ebene, welche man den „Generalhorizont" des Nivellements nennt, wie es in der Regel der Fall ist, über allen Punkten des Längenprofils und insbesondere um die Grösse h über dem Punkte A, so ist der Abstand des Endpunktes der n^{ten} Station von dem allgemeinen Horizonte

$$y = h - u = h - \Sigma (r - v)_n; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (426)$$

und läge der Generalhorizont unter allen Punkten des Profils, so würde selbstverständlich $y = h + u$ seyn.

Die durch allgemeine Grössen angedeuteten Berechnungen eines Nivellements gestalten sich bei wirklichen Ausführungen viel einfacher als es hier den Anschein hat, wie die Lösung der folgenden Aufgabe beweist.

§. 346. Aufgabe. Ein Längenprofil aufzunehmen, zu berechnen und aufzutragen.

1. Aufnahme. Nachdem die Richtung abgesteckt ist, in welcher das Profil zu nehmen ist, besteht die nächste Arbeit in der Bezeichnung der einzunivellirenden Punkte. Dazu gehören erstens alle Punkte, in welchen die Durchschnittslinie ihre Richtung im vertikalen Sinne ändert, wie z. B. in den Punkten A, B, C, D, E .... der Fig. 423 und zweitens jene Punkte, welche gleiche grössere Abschnitte der Horizontalprojection bezeichnen. Diese letzteren Punkte nimmt man bloss desswegen mit in das Längenprofil auf, um die horizontalen Entfernungen der einzelnen Punkte besser übersehen zu können. Man macht daher ihre horizontalen Abstände entweder = 100 Meter oder = 500 Fuss, oder 100 Klafter = 600 Fuss, oder = 100 Ruthen = 1000 Fuss, und bezeichnet sie von 0 anfangend, mit fortlaufenden Nummern, so dass man also bei jeder Nummer sofort die horizontale Entfernung des Punktes vom Anfangspunkte der Linie kennt. Die mit Nummern bezeichneten Endpunkte gleicher Abschnitte der einzunivellirenden Linie nennt man Hauptpunkte, im Gegensatze zu den innerhalb derselben liegenden Brechungspunkten, welche Zwischenpunkte heissen. Diese werden mit den Anfangsbuchstaben des Alphabets in der Art bezeichnet, dass man diese Buchstaben der Nummer des vorausgehenden Hauptpunktes in Form eines Exponenten beifügt. Sind also z. B. zwischen den Hauptpunkten Nr. 5 und 6 vier Zwischenpunkte zu bezeichnen, so heisst der erste an Nr. 5 stehende Punkt: 5^a, des zweite 5^b, der dritte 5^c, und der vierte 5^d. Wegen der Pfähle vergleiche man §. 79.

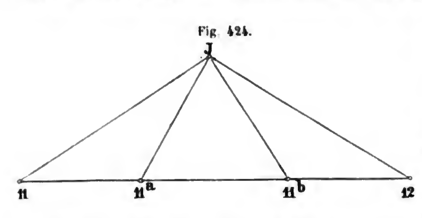
Man begreift leicht, dass es wegen dieser an gleiche Horizontalabschnitte der zu nivellirenden Linie geknüpften Bezeichnungen der Punkte nöthig ist, mit dem Abpflocken der Linie auch das Ausmessen [1] derselben in horizontaler Richtung vorzunehmen. Dieses Ausmessen derselben geschieht in der Regel mit der Messkette, obwohl es besser wäre, Messlatten anzuwenden,

[1] Die Horizontalmessungen sind lediglich wegen des Auftragens des Nivellements zu machen.

um zwischen den Genauigkeiten der Horizontal- und Höhenmessungen ein besseres Verhältniss herzustellen. Es versteht sich übrigens von selbst, dass man nicht bloss die Hauptabschnitte der Linie, sondern die horizontalen Entfernungen aller Haupt- und Zwischenpunkte abmisst und zwar zweimal, um sicher zu seyn, dass in diesen Messungen kein grober Fehler liegt.

Ist die ganze Linie abgepflockt und horizontal ausgemessen, so beginnt das Nivelliren in der schon bekannten Weise, nur mit dem Unterschiede, dass man, wenn es das Terrain und die Entfernungen erlauben, von einem Standpunkte aus nicht bloss zwei Punkte, sondern so viele als man gut übersehen kann, einnivellirt. Sind also z. B. die Punkte Nr. 11 und Nr. 12 (Fig. 424) nur so weit von einander entfernt, dass sie von dem Standpunkte J aus noch deutlich anvisirt werden können, und liegen die Zwischenpunkte 11^a und 11^b so, dass man sie von J aus ebenfalls gut sehen kann: so wird die Latte nach einander in den Punkten 11, 11^a, 11^b, 12 abgelesen und hierauf die Station gewechselt. Da die Entfernungen von J nach 11 und 11^a oder von J nach 12 und 11^b ungleich sind, so gleicht sich streng genommen der Einfluss der Strahlenbrechung und Erdkrümmung in den Höhenunterschieden zwischen 11 und 11^a oder zwischen 12 und 11^b nicht aus; derselbe ist aber auch so gering, dass er wohl übersehen werden darf. Denn wenn die Entfernung von J bis 11 sogar 300′ und bis 11^a nur 60′ beträgt, so ist der Fehler, der durch Vernachlässigung der Correction $c' - c$ in den Höhenunterschied zwischen 11 und 11^a kommt, nach der Tabelle auf S. 611 nur = 0,2759 Pariser Linien und daher um so weniger zu beachten, als er sich nicht durch das ganze Nivellement fortpflanzt, wie es der Fall wäre, wenn die Entfernungen des Instruments von den Endpunkten (Nr. 11, Nr. 12) der Station sehr ungleich gewählt würden.

Fig. 424.



Für die Herstellung eines brauchbaren Nivellements ist eine Aufzeichnung der Beobachtungen, welche nicht leicht zu Irrungen Veranlassung gibt, sehr wichtig, wesshalb auf ein geeignetes Schema hiefür immerhin ein Gewicht zu legen ist. Das auf der folgenden Seite angegebene kann wegen seiner Einfachheit und Uebersichtlichkeit empfohlen werden.

In die erste Spalte werden die Punkte eingetragen, auf denen die Nivellirlatte steht; in die zweite die Ablesungen auf dieser Latte; in die dritte die Steigungen; in die vierte die Gefälle von einem vorhergehenden zum folgenden Punkte; in die fünfte endlich die Abstände der einnivellirten Punkte vom allgemeinen Horizonte. Jeder Stationswechsel (hier bei 0^c und 1^b) wird durch einen die zwei ersten Spalten durchschneidenden Quer-

Punkt.	Ablesung.	Steigt.	Fällt.	Ordinate.
	Fuss.	Fuss.	Fuss.	Fuss.
0	4,68	1,47		100,00
a	3,21		3,98	98,53
b	7,19	4,33		102,51
c	2,86			98.18
c	10,11	5,44		
1	4,67		7,34	92,74
a	12,01	1,64		100,08
b	10,37			98,44

strich angedeutet. Auf dem Felde werden auch nur die zwei ersten Spalten ausgefüllt.

2. Berechnung. Die Steigungen, Gefälle und Ordinaten werden erst zu Hause oder wenigstens nicht gleich unmittelbar nach jeder Beobachtung berechnet. Wie man dabei zu Werke geht, ergibt sich aus der vorstehenden Tabelle von selbst.

Nach den Gleichungen (424) und (425) soll $\Sigma r_n - \Sigma v_n = \Sigma (r - v)_n$ seyn; in dem vorliegenden Falle ist aber

$$\Sigma r_n = r_1 + r_2 = 4{,}68 + 10{,}11 = 14{,}79$$
$$\Sigma v_n = v_1 + v_2 = 2{,}86 + 10{,}37 = 13{,}23$$

folglich $\Sigma r_n - \Sigma v_n = 14{,}79 - 13{,}23 = 1{,}56$; ferner ist

$$\Sigma (r - v)_n = 1{,}47 + 4{,}33 + 5{,}44 + 1{,}64 - (3{,}98 + 7{,}34) = 1{,}56$$

und somit, wie es seyn muss, die Differenz aller Steigungen und Gefälle gleich der Differenz aller Rück- und Vorblicke.

Die Uebereinstimmung dieser beiden Differenzen kann man als ein günstiges Zeichen für die fehlerfreie Berechnung der Steigungen und Gefälle zwischen 0 und 1^b ansehen. Da nun von 0 bis 1^b eine Steigung von 1,56 stattfindet, und da der Abstand des Punktes 0 vom allgemeinen Horizonte $= 100',00$ angenommen wurde, so muss der Abstand des Punktes $1^b = 100' - 1',56 = 98',44$ seyn. Kommt man durch die successive Berechnung aller Ordinaten am Schlusse zu demselben Resultate, so kann man hierin wieder ein günstiges Zeichen für diesen Theil der Berechnung erblicken.

Die hier angedeuteten Proben muss man auf jeder Seite der oft sehr ausgedehnten Nivellementstabellen vornehmen, wenn man nicht Gefahr laufen will, einen grossen Theil der Ordinatenberechnungen wiederholen zu müssen; denn jeder Fehler in der Berechnung der Steigungen oder Gefälle, sowie jeder Fehler in einer Ordinate kehrt in allen Ordinaten wieder, da jede folgende aus der vorhergehenden bestimmt wird.

3. Genauigkeit. Ein Urtheil über die Genauigkeit eines Nivellements lässt sich nur aus einer zweiten von der ersten unabhängigen Messung schöpfen. Daher ist es durchaus nöthig, dass man jede Linie zweimal mit

gleicher Sorgfalt nivellirt und, nachdem für jedes Nivellement die Steigungen und Gefälle berechnet sind, vergleicht, ob diese Ergebnisse der beiden Messungen für je zwei gleichnamige Stationen stimmen oder nicht. Kommen hier bloss Differenzen von einer oder zwei Linien vor, so kann man diese Abweichungen übersehen; betragen aber diese Unterschiede in den Messungsresultaten mehr, so entscheidet an den betreffenden Stellen ein drittes Nivellement, welche von den beiden ersten Messungen, oder ob keine derselben die richtige war. Die hierdurch sich ergebenden Verbesserungen der Beobachtungen werden in die Nivellementstabellen eingetragen, und erst hierauf beginnt die Berechnung der Ordinaten für beide Nivellemente.

Die Differenz, welche beide Rechnungen in der letzten Ordinate zeigen, dividirt durch die Länge der nivellirten Linie, sieht man gewöhnlich als die relative Genauigkeit des Nivellements an, und nach diesem Verhältnisse beurtheilt man auch die Güte der Arbeit. Durch sorgfältige Behandlung der Instrumente, genaues Einstellen und Ablesen, richtiges Aufschreiben etc. kann man es bald dahin bringen, dass zwei Nivellemente von 100000 Fuss Länge auf 2 bis 3 Zolle stimmen, also eine relative Genauigkeit von $\frac{1}{500000}$ bis $\frac{1}{300000}$ haben. Diese Genauigkeit besitzt aber das Nivellement keineswegs an allen Stellen; denn wenn in einzelnen Stationen Fehler von 1 oder 2 Linien auf 500 Fuss vorkommen, so beträgt die relative Genauigkeit nur $\frac{1}{50000}$ bis $\frac{1}{25000}$, also ungefähr 10mal weniger. Die relative Genauigkeit der ganzen Messung wird immer grösser erscheinen als die ihrer Abtheilungen, weil die Fehler, welche in diesen begangen werden, bald positiv bald negativ sind und sich somit theilweise aufheben.

In Preussen wird ein Nivellement für genügend erklärt, welches keine grösseren Fehler enthält als folgende:

Auf	1	bis	10	Stationen	höchstens	$^1/_8$	Zoll	für jede Station;
„	10	„	15	„	„	2	„	im Ganzen;
„	15	„	20	„	„	$2^1/_2$	„	„ „
„	20	„	30	„	„	3	„	„ „
„	30	„	40	„	„	$3^3/_4$	„	„ „
„	40	„	50	„	„	$4^1/_2$	„	„ „
„	50	„	65	„	„	$5^1/_4$	„	„ „
„	65	„	80	„	„	6	„	„ „
„	80	„	100	„	„	$6^3/_4$	„	„ „
„	100	„	120	„	„	$7^1/_2$	„	„ „
„	120	„	150	„	„	$8^1/_2$	„	„ „

Bei noch längeren Nivellementen ist auf je 150 Stationen eine Differenz der beiden Messungen von 8 Zollen zulässig. Die Länge der Stationen ist nicht festgesetzt, weil sie von der Beschaffenheit des Bodens abhängt; es wird aber angenommen, dass der Geometer nicht mehr Stationen mache,

als durchaus nothwendig sind. Nehmen wir eine Station im Durchschnitte zu 40 Ruthen oder 400 Fuss an, so würde z. B. bei 150 Stationen, also bei einer Länge von 60000 Fuss oder 720000 Duodezimalzollen, die relative Genauigkeit der ganzen Messung, welche gefordert wird, nahezu $\frac{1}{85000}$ seyn, während dieselbe bei 30 Stationen unter denselben Voraussetzungen $\frac{1}{48000}$ betrüge.

4. Ausgleichung. Wenn zwei Nivellemente einer und derselben Linie nicht innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen übereinstimmen, so werden wohl auch statt des practischen Verfahrens: die mehr als zwei Linien betragenden Differenzen durch eine dritte Messung einzelner Stationen zu verbessern und hierauf eines der beiden Nivellemente als das richtige anzusehen, Ausgleichungen der Differenzen durch Vertheilung des Gesammtfehlers vorgenommen.

Die Methoden, nach denen dieses geschieht, sind verschieden; unter allen aber scheint jene noch die annehmbarste zu seyn, welche das arithmetische Mittel der aus dem ersten und zweiten Nivellement hervorgegangenen Abstände der einnivellirten Punkte vom allgemeinen Horizonte als die richtigen Ordinaten (Coten) dieser Punkte ansieht.

Wir rathen jedoch dringend, diese Ausgleichungen erst dann vorzunehmen, wenn man sich überzeugt hat, dass in den einzelnen Stationen keine grösseren Fehler als von zwei oder höchstens drei Linien vorkommen.

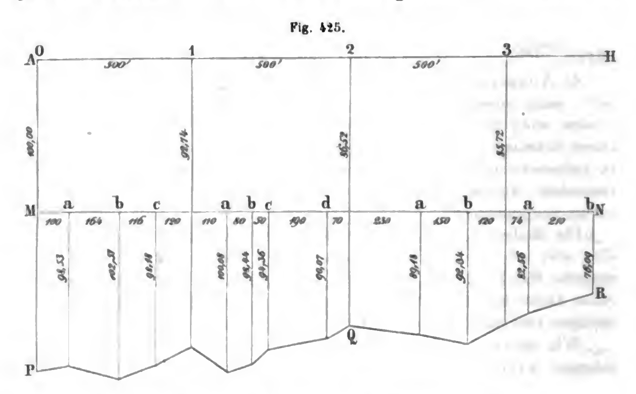
5. Auftragen. Unter dem „Auftragen“ eines Profils versteht man die Zeichnung desselben aus den durch die Aufnahme und Berechnung des Nivellements gegebenen Stücken. Die Fig. 425 stellt ein Stück von einem Längenprofile vor, wie es die Ingenieure in der Regel zeichnen und wozu die Ergebnisse der Aufnahme und Berechnung in der nachstehenden Tabelle enthalten sind.

Punkt.	Entfernung.	Ordinate.	Punkt.	Entfernung.	Ordinate.
	Fuss.	Fuss.		Fuss.	Fuss.
0	100	100,00	1 c	190	90,07
a	164	98,53	d	70	86,52
b	116	102,51	2	230	89,18
c	120	98,18	a	150	92,34
1	110	92,74	b	120	85,72
a	80	100,08	3	74	82,56
b	50	98,44	a	210	76,09
c		94,36	b		

Zur Erläuterung der Zeichnung mögen folgende Bemerkungen dienen:

Alle Ordinaten werden von dem allgemeinen Horizonte AH an abgemessen, obwohl die Zwischenpunkte nur bis an die dem Horizonte parallele Linie MN gezogen sind. Diese Anordnung hat lediglich darin ihren Grund, dass man durch sie einen schnelleren Ueberblick der horizontalen Entfernungen oder Abscissen der einnivellirten Punkte gewinnt. Der Massstab der

Fig. 425.



Ordinaten ist 10mal grösser als jener der Abscissen; die Linie PQR gibt also nur ein verzerrtes Bild des nivellirten Terraindurchschnitts. Durch diese Anordnung gewinnt man aber einen schnelleren Ueberblick der Höhenunterschiede, als es bei gleichen Massstäben für Abscissen und Ordinaten möglich wäre. Denn da für die Abscissen der Längenprofile nur kleine Massstäbe gewählt werden können, wenn man die Zeichnung nicht ungebührlich gross machen will, so würden sich die häufig ganz unbedeutenden Höhenunterschiede von einem Punkte zum andern oft kaum erkennen lassen, wenn man sie in den Massstäben der Abscissen darstellen wollte. Das Verhältniss der Massstäbe für die Längen und Höhen wird den Umständen gemäss gewählt.

§. 347. Aufgabe. Ein Querprofil aufzunehmen, zu berechnen und aufzutragen.

Die Absicht, in welcher Querprofile aufgenommen werden, besteht entweder in der Darstellung einer grösseren Terrainfläche nach ihren Erhöhungen oder Vertiefungen mittels horizontaler Schnittlinien, oder in der Benützung jener Profile zur Berechnung von Erdmassen, welche von einer Stelle zur andern zu versetzen sind. In dem ersteren Falle ist das Querprofil mit derselben Genauigkeit wie ein Längenprofil aufzunehmen, wesshalb dabei auch alle Regeln des vorigen Paragraphen zur Anwendung kommen; in dem letzteren Falle aber, wo überdiess die Querprofile nur eine

geringe Länge haben, darf die Genauigkeit der Aufnahme eine etwas geringere seyn als vorhin. Hier wird lediglich der zweite Fall behandelt.

1. Aufnahme. Die Aufnahme der Querprofile setzt die vollständige Herstellung des Längenprofils, worauf sich jene beziehen, voraus. Damit ist bereits für jedes Querprofil die Bezeichnung und die Ordinate eines Punktes festgesetzt; denn man benennt das Querprofil am einfachsten nach dem Punkte des Längenprofils, in welchem es dasselbe senkrecht oder schief schneidet, und der Abstand dieses Punktes vom allgemeinen Horizonte ist aus dem Längennivellement bekannt.

Durch das Längenprofil wird jedes Querprofil in zwei Theile getheilt, welche nach der Seite, auf welcher sie liegen, unterschieden werden. Um in jedem Falle beurtheilen zu können, welches die rechte oder linke Seite eines Längenprofils ist, denkt man sich in dieses so gestellt, dass das Auge von den niederen Nummern der Hauptpunkte nach den höheren sieht: rechts des Beobachters liegt alsdann auch die rechte und links die linke Seite nicht nur des Längenprofils, sondern auch der Querprofile.

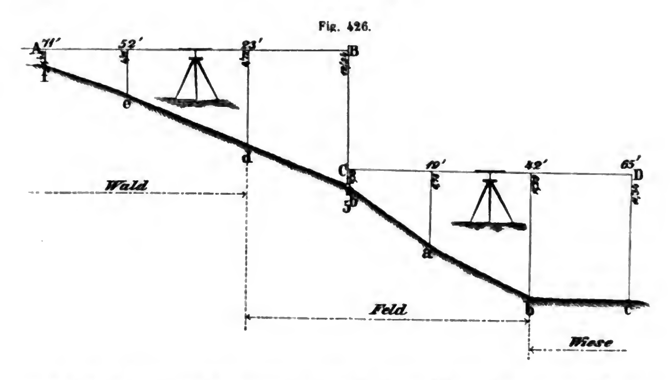
Bei der Aufnahme der letzteren ist strenge darauf zu sehen, dass diese beiden Seiten nicht mit einander verwechselt werden; denn jede solche Verwechselung würde eine völlige Entstellung des geometrischen Bildes des Terrains zwischen dem vorhergehenden und nachfolgenden Querprofile zur Folge haben. Man soll sich desshalb angewöhnen, die Skizze des Querprofils, welche man bei dessen Aufnahme in das Notizbuch zeichnet, so anzulegen, dass dem, der in dieses Buch sieht, sofort die linke Seite des Querprofils zur Linken und folglich die rechte zur Rechten liegt.

Die erste Arbeit zur Aufnahme eines Querprofils besteht in der Absteckung seiner Richtung. Da diese fast durchweg senkrecht zur Axe des Längenprofils steht, so bedient man sich dazu des Winkelspiegels oder des Prismenkreuzes. Ist durch besondere Umstände eine schiefe Richtung bedungen, so wird deren horizontaler Neigungswinkel gegen die Axe des Längenprofils mit den bekannten Hilfsmitteln bestimmt und seine Grösse in das Notizbuch eingetragen.

Hierauf folgt eine einfache Bezeichnung der Brechungspunkte durch Markpflöcke. Grundpfähle sind hier so lange unnöthig, als der Boden die Nivellirlatte trägt; nur wenn dieser weich ist, wendet man Grundpfähle an. Will man auf die Markpflöcke Zeichen setzen, um die Punkte zu unterscheiden, so mag man es thun; nöthig sind sie aber aus dem Grunde nicht, weil sofort nach der Absteckung die Abscissen und Ordinaten aller Brechungspunkte des Querprofils gemessen und in das Notizbuch eingetragen werden, wie die Fig. 426 zeigt, bei welcher angenommen wurde, dass zwei Stationen hinreichen, das Querprofil aufzunehmen, und in der zugleich angedeutet ist, in welcher Weise Bemerkungen über die von dem Querprofile durchschnittenen Culturen, Bauwerke u. dgl. anzubringen sind.

Es bedarf wohl kaum weiterer Erörterung, wie zu verfahren ist, wenn zum Nivelliren mehr als zwei Aufstellungen des Instruments nöthig sind,

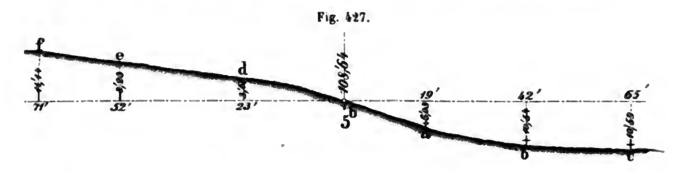
Fig. 426.



sowie es sich von selbst versteht, dass in vielen Fällen eine einzige Station hinreichen kann, die Höhenunterschiede aller Punkte eines Querprofils zu finden.

2. Berechnen und Auftragen. Kommt es bloss darauf an, das Querprofil zu zeichnen, ohne dass man den Abstand der Brechungspunkte desselben vom allgemeinen Horizont wissen will, so kann man entweder die Horizonte aller Aufstellungen des Instrumentes (hier die Linien AB, CD) als Abscissenaxen benützen und von ihnen aus die abgelesenen Höhen abtragen — in diesem Falle bedarf es gar keiner Berechnung —; oder man reducirt die Ablesungen für verschiedene Horizonte auf einen und denselben Horizont (hier z. B. auf AB, indem man zu den Ablesungen auf der rechten Seite des Profils den Abstand BC = 12,34 — 0,75 = 11',59 addirt) und trägt die Brechungspunkte von diesem aus ab; oder endlich, man denkt sich durch den Hauptpunkt (hier 5ᵇ) des Querprofils eine Horizontale gelegt und führt alle Abstände auf diesen zurück; wobei es sich von selbst versteht, dass diese Abstände bald positiv bald negativ werden. In dem vorliegenden Falle ergeben sich die Abstände, welche in der Fig. 427 eingetragen sind.

Fig. 427.



Will man auch für ein Querprofil die Abstände seiner Brechungspunkte vom allgemeinen Horizonte wissen, so berechne man erst die Abstände für

den Horizont des Hauptpunktes (hier 5^b) und verbinde dieselben mit dem Abstande des Hauptpunktes (hier 108',64) so, wie es ihre Vorzeichen verlangen. Demnach ist in dem gewählten Beispiele der Abstand des Punktes $a = 108',64 + 6',03 = 114',67$ und der von $d = 108',64 - 3',62 = 105',02$.

Was die Massstäbe betrifft, nach denen die Querprofile gezeichnet werden, so bestehen hier keine festen Regeln: es kommt lediglich auf den Zweck an, dem diese Profile zu dienen haben. Werden die Querprofile in ähnlicher Weise verwendet wie Längenprofile, so zeichnet man sie auch so; dienen sie aber zur Berechnung von Erdmassen, so wählt man gewöhnlich einen grossen Massstab (in der Regel 1 : 100), damit man die einzelnen Dimensionen leicht abgreifen kann, und es versteht sich in diesem Falle von selbst, dass die Abscissen und Ordinaten nicht nach zwei verschiedenen Massstäben aufgetragen werden dürfen.

3. Das Nivelliren der Flächen.

§. 348. Eine Fläche ist nivellirt, sobald man die Höhen aller bemerkenswerthen Punkte derselben bestimmt und in den Horizontalplan eingetragen hat. Damit liefert aber dieser Plan noch kein Bild von dem Zusammenhange der Erhöhungen und Vertiefungen oder von der Form des Terrains; denn aus den eingeschriebenen Ordinaten der einnivellirten Punkte lässt sich die Gestalt einer vielfach gekrümmten Fläche eben so wenig genau erkennen, als es möglich ist, sich aus den bloss in Zahlen ausgedrückten horizontalen Entfernungen eingemessener Punkte den Grundriss der von ihnen gebildeten Figuren in allen Theilen richtig vorzustellen. Man bedarf also eines graphischen Mittels, das die Höhen der Terrainpunkte eben so anschaulich darstellt als ein Situationsplan die horizontal projicirten Umfangslinien der Parzellen. Dieses Mittel ist aber in den Horizontalcurven gegeben.

Denkt man sich nämlich die nach ihren Erhöhungen und Vertiefungen darzustellende Terrainfläche durch horizontale Ebenen geschnitten, welche gleich weit von einander abstehen, und die Durchschnittslinien auf den Horizontalplan der Fläche projicirt, so übersieht man mit diesen Linien sofort alle Punkte von gleicher Höhenlage und erkennt aus ihren Zwischenräumen die Neigungsverhältnisse des Terrains, dem sie angehören. Diese horizontalen Schnittlinien (Horizontalcurven, Niveaucurven, Schichtenlinien, Höhencurven etc.) sind für alle Arten von Terrainstudien, namentlich aber für diejenigen, welche zum Zwecke technischer Unternehmungen gemacht werden, sehr wichtig, wesshalb sie auch, wie hier geschieht, ausführlich behandelt zu werden verdienen. Für manchen Leser mögen überdiess die folgenden geschichtlichen Notizen über ihre Erfindung nicht ohne Interesse seyn.

Die Idee, horizontale Curven zur bildlichen Darstellung der Oberflächen des Terrains anzuwenden, rührt, soviel darüber bis jetzt bekannt geworden ist, von dem französischen Geographen Buache her. Derselbe legte im Jahre 1737 der Academie der Wissenschaften in Paris, deren Mitglied er

war, eine von ihm fünf Jahre früher aufgenommene Karte des Departements La Manche vor, in welcher er die gleichen Tiefen des Meeres, also auch die Gestalt der Meeresküste durch solche Curven bezeichnete. In seiner dazu geschriebenen Abhandlung, welche erst in den Denkschriften vom Jahre 1752 (essais de géographie physique) gedruckt wurde, äusserte er: „Der Gebrauch, den ich von den Sondirungen des Meeres gemacht habe, um seine Tiefen auszudrücken, und den vor mir Niemand gemacht hat, scheint sehr geeignet zu seyn, die Neigungsverhältnisse der Ufer genau darzustellen ....“ In einer späteren Arbeit (parallèle des fleuves de quatre partie du monde) vervollständigte er seine Idee mit den Worten: „Ich habe mir vorgenommen, auf dem Terrainrelief des Globus (den er damals anfertigte), Linien zu ziehen, welche der Oberfläche des Meeres parallel laufen (also horizontal sind), wie ich es für das Innere des Meeres schon bei dem Relief der Manche gethan habe. Indem man Erhebungen des Meeres über sein wirkliches Niveau voraussetzt, lassen sich die Landstriche erkennen, welche durch die allmählige Zunahme der Wassermasse bedeckt würden ...“

Buache hat seine Idee nicht weiter verfolgt, und darum gilt der Ingenieur Ducarla in Genf als der Erste, welcher die Darstellung des Terrains durch Horizontalcurven zu einer Methode erhob und ins Leben einführte. Er that dieses in einer besonderen Abhandlung hierüber, die er unter dem 4. Mai 1771 der Academie der Wissenschaften in Paris überreichte, und in einem grösseren Werke, das 11 Jahre später erschien und den Titel führt: „Expression des nivellements ou methode nouvelle pour marquer rigoureusement, sur les cartes terrestres et marines, les hauteurs et les configurations du terrain; par M. Ducarla.“ Paris, 1782. Ducarla erkennt hierin ausdrücklich an, dass er die von Buache gegebenen Andeutungen kannte, glaubt aber, dass dieser gelehrte Geograph die Fruchtbarkeit seiner Idee nicht vollständig zu würdigen wusste, da er bei drei Unterredungen mit ihm im Jahre 1771 die Priorität derselben nicht in Anspruch nahm. „Seine bedeutenden Arbeiten, fügt Ducarla bei, sein Alter, seine Gebrechlichkeit hatten ihn ganz ausser Stand gesetzt, meinen Erörterungen lange zu folgen, und er sagte mir mehrere Male und noch bei meiner Abreise, dass er Nichts davon begreife, obgleich seine Herren Collegen mit seiner Arbeit zufrieden gewesen seyen.“

Es kann nun sehr wohl seyn, dass dieser alte Mann sich nicht mehr genau der Arbeiten erinnerte, welche er vor 40 Jahren gemacht hatte, und dass er auch den Umfang ihrer technischen Anwendung nicht ganz ermessen konnte; gleichwohl gebührt ihm das Verdienst der Erfindung der Horizontalcurven, während Ducarla als Derjenige anzusehen ist, der diesem vorzüglichen Mittel der Terrainzeichnung Geltung zu verschaffen wusste.

A. Das Abstecken der Horizontalcurven.

§. 349. Aufgabe. Auf dem Felde ist ein Punkt gegeben: man soll die demselben angehörende Horizontalcurve abstecken.

Der gegebene Punkt befinde sich auf der Oberfläche eines Hügels und sey durch einen Grundpfahl bezeichnet. Ueber demselben stelle man die Nivellirlatte und in passender Entfernung das Nivellirinstrument auf.

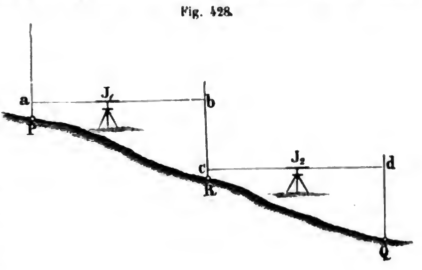
Hierauf richte man das Fadenkreuz auf die Latte und lese die Visirhöhe ab. Nun lasse man die Latte in einem zweiten, etwa 100 Fuss vom ersten entfernten und dem Augenmasse nach gleich hoch gelegenen Punkte aufstellen, richte das Fernrohr wieder darauf ein und lese ab. Ist diese Ablesung der vorigen gleich, so liegt der zweite Punkt gerade so hoch als der erste; ist sie aber kleiner oder grösser, so muss die Latte auf dem Terrain so lange ab- oder aufwärts verrückt werden, bis die Ablesungen gleich werden. Der also gefundene Terrainpunkt wird mit einem Grundpfahle bezeichnet, dessen Oberfläche genau in der Horizontalebene des gegebenen Punktes liegen muss. Kann man vom Instrumente aus noch den Theil des Hügels übersehen, auf den der dritte Punkt trifft, so bestimme man denselben gerade so wie den zweiten und bezeichne ihn auch wie diesen. Muss hierauf die Station gewechselt werden, so lasse man die Latte auf dem Punkte Nr. 3 stehen, wähle einen neuen Standpunkt und verfahre nun gerade so, als ob dieser Punkt der Anfangspunkt wäre.

§. 350. **Aufgabe. Ein Punkt eines Längenprofils ist auf dem Felde und durch seine Cote gegeben: man soll, von ihm ausgehend, eine Horizontalcurve von bestimmter Höhe abstecken.**

Heisst der Abstand des gegebenen Fixpunktes (P) vom allgemeinen Horizonte z und jener der Curve $z + \eta$, so kommt es zunächst bloss darauf an, irgend einen Punkt (Q) aufzusuchen, der um die Grösse η tiefer liegt als der Fixpunkt; denn ist dieser Punkt gefunden, so erfolgt die weitere Absteckung der Curve nach der im vorhergehenden Paragraph gegebenen Anleitung.

Ist η kleiner als die Lattenhöhe, so kann man Q mit einer einzigen Aufstellung des Instruments finden, ausserdem müssen zwei oder mehrere Stationen gemacht werden; in jedem Falle aber ist es leicht, einen Punkt anzugeben, der den Abstand $z + \eta$ hat. Denn angenommen, bei der ersten Aufstellung des Instruments werde auf dem Fixpunkte der Lattenabschnitt Pa = l (Fig. 428) und auf dem Zwischenpunkte R der Abschnitt Rb = l' abgelesen, so liegt R um l' — l tiefer als P. Ist nun $\eta = l' - l + \xi$ und ist ξ kleiner als die Lattenhöhe, so stelle man

Fig. 428.



das Instrument in J_2 so auf, dass die Latte in R möglichst nahe am Fusse von der Absehlinie getroffen wird, stelle das Fernrohr und die Libelle ein und lese ab. Heisst die Ablesung h, so muss nunmehr durch Probiren die Latte auf einen Punkt gebracht werden, welcher eine Ablesung $h' = h + \xi$ liefert. Dieser Punkt (Q) wird mit einem Grundpfahle bezeichnet, und nachdem der Höhenunterschied zwischen ihm und dem Fixpunkte durch ein zweites Nivellement controlirt ist, kann die ihm angehörige Curve nach §. 349 abgesteckt werden.

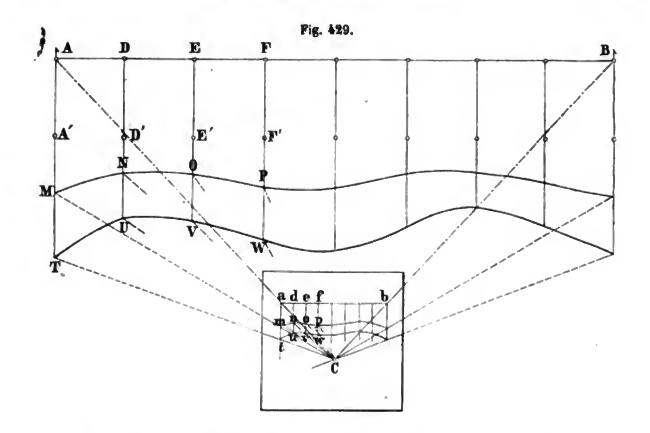
Wäre der Abstand der gesuchten Horizontalcurve $z - \eta$ gewesen, so hätte man zunächst einen um die Grösse η über P gelegenen Punkt (S) bestimmt und hierauf auch wieder das Verfahren des vorigen Paragraphen angewendet, um die Curve selbst zu erhalten.

A. Das Aufnehmen der Horizontalcurven.

§. 351. Bei der Aufnahme von Horizontalcurven lassen sich zwei Fälle unterscheiden: entweder sind nämlich wirklich abgesteckte Horizontallinien in verjüngtem Masse graphisch darzustellen, oder es sind auf einer gegebenen Terrainfläche bloss die Messungen zu machen, nach denen die Horizontalschnitte dieser Fläche construirt werden können. Der erste Fall kommt selten und in der Regel nur dann vor, wenn es sich bloss um eine oder einige Curven handelt, und wenn mit der Aufnahme dieser Curven auch die der Horizontalprojection des Terrains, worauf sie liegen, verbunden wird. Der zweite Fall dagegen ist derjenige, welcher das eigentliche Nivelliren der Flächen ausmacht und uns daher insbesondere beschäftigt.

Die Methoden, nach denen Horizontalprojectionen aufgenommen werden, sind aus Abschnitt I. dieses zweiten Theiles bekannt; es genügt desshalb zur Erledigung des ersten Falles die Bemerkung, dass es die Aufnahme wirklich abgesteckter Horizontalcurven sehr erleichtert, wenn man bei der Absteckung Querprofile anwendet, welche auf einer geraden Axe senkrecht stehen und gleichweit von einander entfernt sind, wie dieses in Fig. 429 angedeutet ist. In derselben stellt die Linie AB eine Gerade vor, welche nahezu horizontal ist und auf der die gleichen Abschnitte AD, DE, EF .... von 50 oder 100 Fuss Länge abgemessen sind. Die Linien AA', DD', EE', FF' .... stehen senkrecht zu AB, und es sind dieselben auf dem Felde durch Absteckstäbe sichtbar gemacht, damit der Messgehilfe nach Anleitung des Geometers die Nivellirlatte in den Richtungen dieser Linien so weit versetzen kann, bis er die Curvenpunkte M, N, O, P ...., T, U, V, W .... gefunden hat. Sollen nun diese Punkte z. B. mit dem Messtische aufgenommen werden, so bestimme man auf dem Felde von den beiden Punkten A und B aus durch Vorwärtsabschneiden den Punkt C, von dem aus sich die beiden Curven übersehen lassen, trage auf dem Bilde von AB = ab die Abstände AD = ad, DE = de, EF = ef... ab, errichte in diesen Punkten die Senkrechten am, dn, eo, fp ...., stelle den Messtisch über

Fig. 429.



C auf, orientire ihn nach A und B, und visire nach und nach die abgesteckten Punkte der beiden Curven an, so ergeben sich deren Bilder m, n, o, p . . . ., t, u, v, w . . . . als Durchschnitte der Absehlinien mit den Senkrechten, welche auf a b errichtet wurden. Die Vielecke m n o p . . ., t u v w . . . werden in der Zeichnung nach dem Augenmasse so verbessert, dass sie die nur in einzelnen Punkten abgesteckten Curven möglichst treu darstellen.

Was den zweiten Fall betrifft, so kommt es im Allgemeinen darauf an, über die zu nivellirende Fläche ein Netz von Linien zu verbreiten, welches alle bemerkenswerthen Terrainpunkte deckt, und dieses Netz aufzunehmen und zu nivelliren. Die Form des Netzes richtet sich, wie aus den nachfolgenden Aufgaben zu entnehmen ist, nach der Gestalt des Terrains und der Genauigkeit, welche von der Zeichnung verlangt wird.

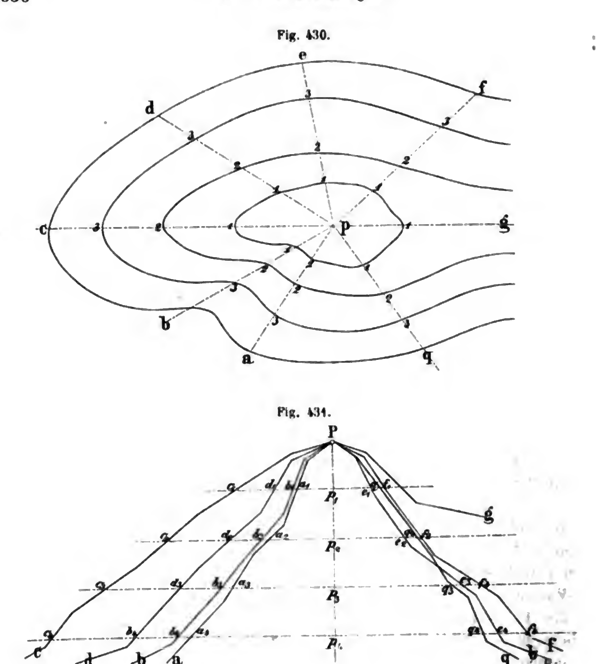
§. 352. Aufgabe. Es sey ein Hügel, dessen Situationsplan gegeben ist, durch Horizontalcurven darzustellen. (Fig. 430 und 431.)

In diesem Falle ist es zweckmässig, den Hügel von seinem Scheitel aus nach verschiedenen Richtungen zu nivelliren, die hierdurch erhaltenen Profile durch gleichweit abstehende Horizontalebenen zu schneiden, die Schnittpunkte auf die in den Horizontalplan eingetragenen Richtungen der Profile zu projiciren, die einer Horizontalebene angehörenden Projectionen zu Polygonen zu verbinden und diese in die gesuchten Curven selbst überzuführen. Dieses Verfahren zieht folgende Arbeiten nach sich.

1) Das Abstecken der Richtungen der Profile. Man wählt diese so, dass sie sowohl die stärksten als die schwächsten Neigungen der Hügelfläche treffen; denn in diesen Richtungen ist die Natur des Terrains

Fig. 430.

Fig. 431.



am schärfsten ausgesprochen. Darin liegt auch zugleich ein Anhaltspunkt für die Anzahl der Profile; ein anderer hängt von der verlangten Genauigkeit der Terrainzeichnung ab. Der Scheitel (P) des Hügels und alle Brechungspunkte der Profile werden wie bei einem Längennivellement mit Grund- und Beipfählen bezeichnet, während auf dem äussersten, von dem Scheitel aus noch sichtbaren Punkte jedes Profils eine Signalstange mit einer Bezeichnung des Profils (nach der Fig. 430 mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F, G) aufgestellt ist.

2) Das Aufnehmen der Profile. Dazu gehört erstens die Messung der Richtungswinkel der Linien PA, PB .... PG in Bezug auf eine feste gerade Linie (hier PQ), welche sowohl auf dem Terrain als in dessen Horizontalplan gegeben seyn muss; zweitens das Abmessen der horizontalen Entfernungen der Brechungspunkte der Profile, vom Scheitel (P) aus; und endlich drittens das Einnivelliren aller dieser Punkte, welches ebenfalls von

dem Grundpfahle des Scheitels auszugehen hat. Die Art der Ausführung dieser Arbeiten ist bekannt.

3. Das Zeichnen der Profile und der Curven. Strenge genommen gehört die Anweisung zu dieser Verrichtung in die dritte Abtheilung dieses Buchs; da jedoch das Aufnehmen der Horizontalcurven in mehrfacher Hinsicht erst durch die Zeichnung derselben recht klar wird, so mag es in diesem Falle erlaubt seyn, der genannten Abtheilung vorzugreifen.

Die Profile des Terrains zeichnet man so, dass die Abscissen in dem Massstabe des Horizontalplanes, die Ordinaten aber 5 oder 10mal grösser dargestellt werden. Man kann diese Profile einzeln, oder, wie hier in Fig. 431 geschehen ist, vereinigt darstellen, so zwar, dass sie alle den Scheitelpunkt (p) gemein haben. Die Profile PA, PB, PC .... sind hier durch pa, pb, pc .... und die horizontalen Schnittebenen, deren Abstände von p an gezählt sind und 10, 20, 30, 40 .... Fuss betragen, durch 1, 2, 3, 4 .... bezeichnet. Die Curve (1) ergibt sich, indem man auf den Profilrichtungen pa, pb, pc .... (Fig. 430) die Horizontalabstände $p_1 a_1$, $p_1 b_1$, $p_1 c_1$ .... der Schnittpunkte a_1, b_1, c_1 .... vom Scheitel p aus abträgt. Eben so erhält man die Curve (2), indem man auf pa, pb, pc .... (Fig. 430) die Abstände $p_2 a_2$, $p_2 b_2$, $p_2 c_2$ .... (Fig. 431) abmisst u. s. w. f.

Sind die Schnittpunkte aller Profile mit den Horizontalebenen in den Plan eingetragen, so kann man allerdings zunächst nur die horizontalen Polygone zeichnen, welche durch diese Punkte bestimmt sind; allein aus der unmittelbaren Anschauung des Terrains, welche der Zeichnung voranging, oder vor deren Vollendung nochmals stattfindet, kann man diese Polygone nach dem Augenmasse in stetige, dem Terrain sich anschmiegende Curven verwandeln.

§. 353. Aufgabe. Es sey ein Bergrücken, dessen Situationsplan gegeben ist, durch Horizontalcurven darzustellen.

Das Verfahren, welches in diesem Falle am zweckmässigsten erscheint, besteht darin, dass man erstens nach der Länge des Rückens eine Operationslinie aussteckt und nivellirt, zweitens Querprofile aufnimmt, welche sich über die ganze Breite des Bergrückens erstrecken; und drittens aus diesen Längen- und Querprofilen die Horizontalcurven construirt.

1) Die Operationslinie wird zwischen zwei in dem Plane genau bezeichneten Fixpunkten ausgesteckt. In ihrer Horizontalprojection bildet sie ein offenes Polygon mit langen Seiten, welche sich so viel als möglich der Wasserscheide des Bergrückens nähern. Die Eckpunkte werden durch Signalstangen bezeichnet und die Winkel mit dem Theodolithen, die Seiten mit Messlatten gemessen. Hiernach lässt sich die Horizontalprojection derselben in den Situationsplan der aufzunehmenden Terrainfläche eintragen: in Fig. 432 stellt 0123 die Operationslinie vor. Ausserdem wird die ausgesteckte Operationslinie wie die Axe eines Längenprofils abgepflockt und zweimal vermessen und nivellirt. Nach der Berechnung des Nivellements erfolgt das Auftragen nach §. 346, wobei es sich von selbst versteht, dass die

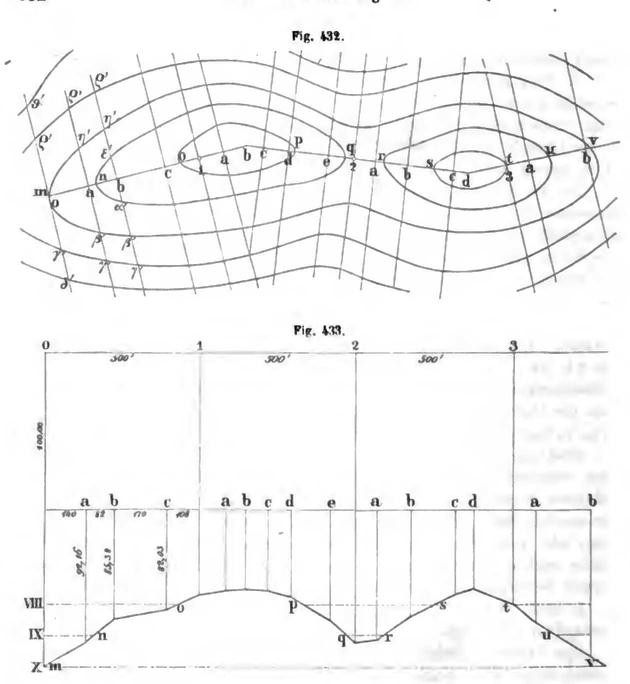


Fig. 432.

Fig. 433.

horizontalen Entfernungen im Massstabe des Situationsplanes und die Ordinaten etwa 5 oder 10mal grösser zu zeichnen sind. In Fig. 433, welche das Längenprofil der Operationslinie ist, sind die Höhen 10mal grösser als die Längen.

2) Die Querprofile stehen in der Regel senkrecht zur Operationslinie, weil sie sich bei dieser Richtung am leichtesten auf dem Terrain ausstecken und in den Horizontalplan eintragen lassen. Fordert aber die Natur des Terrains schiefe Richtungen, so wählt man diese und misst ihre Neigungswinkel gegen die Operationslinie, um sie ebenfalls in dem Horizontalplane genau angeben zu können. Das Abstecken, Aufnehmen, Berechnen und Zeichnen der Querprofile geschieht nach §. 347, wozu nur noch zu bemerken ist, dass dem vorliegenden Zwecke eine mit dem Längenprofil übereinstimmende und in den Figuren 434, 435, 436 angedeutete Zeichnung am besten entspricht.

3) Die Construction der Curven aus dem Längenprofile, den Querprofilen und dem Situationsplan ist sehr einfach. Man schneidet nämlich zuerst das Längenprofil durch horizontale Linien, welche die Abstände der Schnittebenen haben, um die Projectionen (m, n, o, p, q, r, s, t, u, v) aller Curvenpunkte zu erhalten, welche in der Operationslinie selbst liegen, und trägt diese Projectionen in die Horizontalprojection der Operationslinie über. Ebenso schneidet man mit horizontalen Linien von der Höhe der Schnittebenen alle Querprofile und projicirt die Schnittpunkte auf die im Horizontalplane eingetragenen Richtungen dieser Profile. (Für das Querprofil Nr. 0 ergeben sich z. B. die Punkte ϑ, ϱ, γ, δ, welche im Horizontalplan mit ϑ', ϱ', γ', δ' bezeichnet sind.) Schliesslich verbindet man die in einer Horizontalebene liegenden Punkte zu einem Vielecke und verwandelt dieses nach dem Augenmasse in eine dem Terrain sich möglichst gut anschmiegende Curve. Kommen viele Curven vor, so zeichnet man jede fünfte oder zehnte durch einen stärkeren Strich oder durch Farbe vor den übrigen aus, um die Gestalt des Terrains leichter zu übersehen.

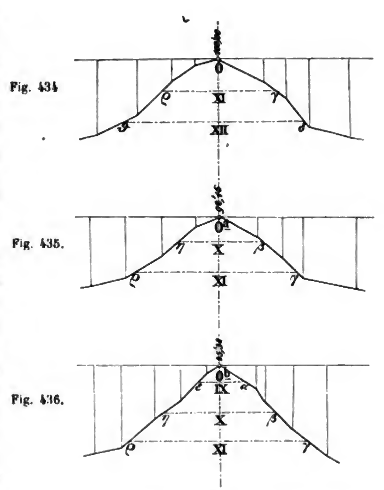


Fig. 434

Fig. 435.

Fig. 436.

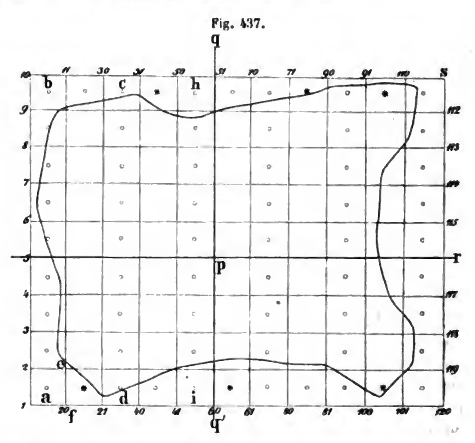
§. 354. **Aufgabe.** Es sey eine nach der Länge und Breite ziemlich gleich ausgedehnte Fläche von nur geringen und nicht rasch wechselnden Erhöhungen und Vertiefungen durch Horizontalcurven darzustellen.

Dieser Fall kommt bei jedem Moose vor, das zu nivelliren ist. Ist dessen Horizontalplan gegeben, so überziehe man dasselbe mit einem Quadratnetze, dessen Seiten nach Umständen 300 bis 500 Fuss lang und — der leichteren Zeichnung wegen — den von Süd nach Nord und von Ost nach West laufenden Randlinien des Plans parallel sind.

1) Die Aussteckung des Netzes kann keine Schwierigkeit machen, sobald man auf einem Fixpunkte (P), der auch im Plan gegeben ist (p, Fig. 437), die Mittagslinie (PQ, pq) nach §. 332 ausgemittelt und mit Signalen bezeichnet hat. Auf dieser Mittagslinie misst man zunächst die Quadratseiten

genau ab, errichtet in dem Fixpunkte mit dem Theodolithen eine Senkrechte (PR, pr) zu ihr, misst auch auf dieser die Quadratseiten genau ein, und steckt dann in ziemlich weit entfernten Netzpunkten (z. B. Q, q und R, r) Parallelen zur Mittagslinie und ihrem Perpendikel ab. Misst man auf diesen Parallelen (QS, qs und RS, rs) die Quadratseiten ebenfalls genau ab und bezeichnet ihre Endpunkte wie vorhin mit Grund- und Beipfählen, so kann man durch Rückwärtsverlängern derselben das ganze Netz herstellen, ohne neue Längen messen zu müssen, vorausgesetzt, dass das Terrain übersehbar ist. Kommen einzelne Hindernisse vor, welche das Visiren erschweren, so wird man dieselben leicht zu überwinden wissen.

Fig. 437.

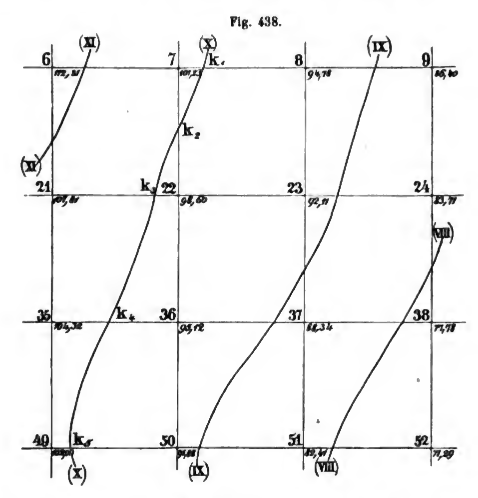


2) **Das Nivelliren der Netzpunkte** geschieht mit der geringsten Anzahl von Aufstellungen, auf die in Fig. 437 angedeutete Weise: indem man nämlich das Instrument stets nahezu in der Mitte eines Quadrates aufstellt, kann man von jedem in der Figur mit einem Ring (^{0}) bezeichneten Standpunkte aus alle vier Ecken des Quadrats anvisiren und hierdurch, wie diese Punkte beweisen, die Anzahl der Stationen auf die Hälfte derjenigen reduciren, welche nöthig wären, wenn man jede einzelne Linie für sich nivelliren wollte. Die mit Sternchen (*) bezeichneten Stationspunkte sind nicht durchaus nothwendig, aber indem sie zwei Stationsreihen zu einer geschlossenen Abtheilung (z. B. abcd, cdih) machen, gewähren sie eine Controle des Nivellements, welche man nicht unbenützt lassen darf. Es müssen nämlich, da die letzten Punkte (e, f) einer Abtheilung (abcd) zugleich die Anfangspunkte derselben sind, die Abstände der zweimal nivellirten Anfangs- und Endpunkte einander gleich seyn, wenn richtig gearbeitet

wurde. Da diese Controle jedoch keine Garantie dafür leistet, dass nicht zwei gleiche aber entgegengesetzte Fehler in einer Abtheilung gemacht wurden, so ist gleichwohl noch die Herstellung eines Gegennivellements anzurathen, bevor die definitive Berechnung der Abstände aller Netzpunkte vom allgemeinen Horizonte nach §. 345 vorgenommen wird.

3) Die Bestimmung der Horizontalcurven geschieht auf Grund der bekannten Horizontal- und Vertikalabstände der Netzpunkte. Angenommen, die Abstände der Schnittebenen seyen Vielfache von 10′, also die der Ebenen 1, 2, 3, 4 .... 10 beziehungsweise 10, 20, 30, 40 .... 100′ und es

Fig. 438.



stelle die Fig. 438 einen Theil des nivellirten Netzes mit 400′ langen Seiten vor: so findet man z. B. die Curve X in folgender Weise. Diese Curve schneidet offenbar die Linie von 7 auf 8 in einem Punkte k_1, dessen Abstand x_1 vom Punkte Nr. 7 sich aus der leicht zu bildenden Proportion ergibt:

$$(101{,}23 - 94{,}78) : (101{,}23 - 100) = 400 : x_1.$$

Die Curve X geht auch durch die Quadratseite von 7 auf 22, und zwar in einem Punkte k_2, dessen Abstand x_2 vom Punkte Nr. 7 aus der Proportion erhalten wird:

$$(101{,}23 - 98{,}60) : (101{,}23 - 100) = 400 : x_2.$$

Ebenso schneidet die Curve X die Quadratseite von 21 auf 22 in einem Punkte k_3, dessen Abstand x_3 vom Punkte Nr. 21 aus der Proportion folgt:

$$(107{,}81 - 98{,}60) : (107{,}81 - 100) = 400 : x_3.$$

Sowie man durch Berechnen und Abtragen der Horizontalabstände x_1, x_2, x_3 die Punkte k_1, k_2, k_3 findet, so erhält man durch Fortsetzung dieser Arbeit auch die Punkte k_5, k_6, k_7, ... der Curve Nr. X und folglich diese selbst. In gleicher Weise wird jede andere Curve bestimmt; so in Fig. 438 die Curven Nr. VIII, IX und Nr. XI.

Aus diesem Verfahren entnimmt man leicht, auf welcher Voraussetzung die Anlage des Netzes beruht: nämlich darauf, dass man von einem Netzpunkte zum anderen eine gerade Linie legen kann, welche mit dem Terrain zusammenfällt. Wird diese Bedingung bei Quadratseiten von 400 Fuss Länge, wie sehr häufig, nicht erfüllt, so müssen die Seiten kürzer genommen werden; ausserdem kann man sie auch auf 500′ ausdehnen. Darüber hinaus sollte man aber desswegen nicht gehen, weil grössere Stationen, als sie Quadrate von 500′ Seite nöthig machen, für die gewöhnlichen Nivellirinstrumente nicht geeignet sind.

§. 355. Aufgabe. Eine durchschnittene Terrainfläche, deren Situationsplan gegeben ist, in Horizontalcurven darzustellen.

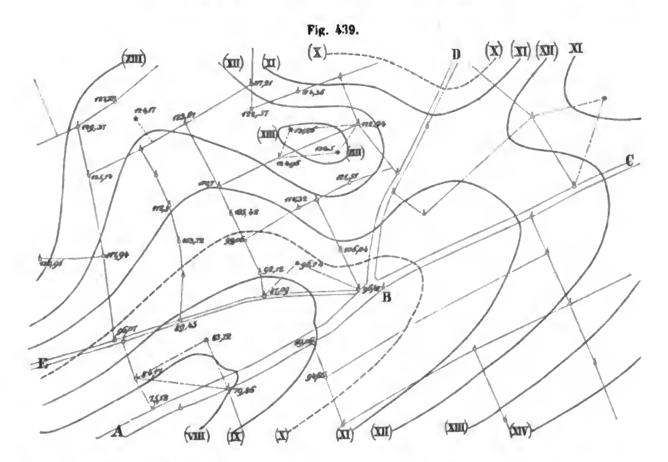
Wenn die Fläche, wie hier angenommen, rasch wechselnde Erhöhungen und Vertiefungen hat und in viele Parzellen getheilt ist, welche alle auf dem Plane genau dargestellt sind: so macht man am zweckmässigsten die Grenzen der Grundstücke und der Wege zum Netz für das Nivellement dieser Fläche. Als Netzpunkte gelten zunächst die Marksteine und andere Fixpunkte, welche sich auf dem Terrain befinden und in dem Plan eingetragen sind; ausserdem aber schlägt man an den Stellen, wo es nöthig erscheint — und dieses ist überall der Fall, wo man von einem Punkte zum anderen keine Gerade legen kann, welche in das Terrain fällt — Grund- und Beipfähle in den Boden, und misst sie durch Dreiecke oder Coordinaten in Bezug auf die gegebenen Fixpunkte ein, um sie in dem Situationsplane verzeichnen zu können.

Ist das Netz in seiner Horizontalprojection festgestellt, so nivellirt man alle seine mit Pfählen bezeichneten Punkte zweimal ein, berechnet deren Abstände vom allgemeinen Horizonte und bestimmt daraus nach §. 354 die Durchgänge der Horizontalcurven zwischen je zwei Punkten, indem man ihre horizontale Entfernung, welche dazu nöthig ist, dem Plane entnimmt. Hiernach werden folgende Bemerkungen genügen, die Fig. 439 näher zu erläutern.

Die mit Sternchen bezeichneten Punkte sind ihrer Horizontalprojection nach durch Dreiecke bestimmt, welche an die vorhandenen Marksteine angeschlossen wurden.

Um die Figur nicht mit Zahlen zu überladen, sind die Coten nur in der linken Hälfte derselben eingeschrieben. Die römischen Ziffern bezeichnen die horizontalen Schnittebenen und die Horizontalcurven; dabei ist angenommen, dass der allgemeine Horizont die nullte Ebene ist und dass die 10, 20, 30, 40 .... Fuss tiefer liegenden Ebenen die Schnittebenen I, II, III, IV ... sind. Die vertikalen Abstände der Curven vom allgemeinen Horizonte

Fig. 439.



stellen somit Vielfache von 10 Fuss dar. Der leichteren Uebersicht des Terrains wegen hebt man in der Zeichnung jede fünfte oder zehnte Curve durch eine besondere Linie oder durch Farbe hervor, wie dieses hier bei der Curve X der Fall ist.

4. Bemerkungen und Aufgaben über das Nivelliren.

§. 356. Die wichtigsten Anwendungen des Nivellirens bestehen in der Aufnahme von Terrainprofilen und Horizontalcurven; es gibt aber noch viele andere Anwendungen dieses Zweiges der Messkunst, welche ebenfalls wichtig sind. Einige derselben sind in den nachfolgenden Aufgaben und in den Abschnitten III. und IV. enthalten, während die übrigen so einfach gelöst werden können, dass wir es nicht für nöthig halten, sie hier besonders aufzuführen. Dagegen mögen für manche Anfänger im Nivelliren die nachstehenden Winke zur Ueberwindung von Hindernissen oder zur Vermeidung von Messungsfehlern nicht überflüssig seyn.

1. Wenn man genau nivelliren will, so ist es zunächst nöthig, einen in allen Theilen geregelten Gang der Arbeit festzusetzen, einzuüben und unabänderlich festzuhalten. Dieser Gang hängt von der Beschaffenheit des Instruments und von der Methode des Nivellirens, die zur Anwendung kommen soll, ab, und wird nach Anleitung der §§. 341 bis 343 bestimmt.

2. Wesentliche Sorgfalt ist auf das richtige Einstellen entweder des Fadenkreuzes oder der Zieltafeln und auf das deutliche und richtige Aufschreiben der abgelesenen Visirhöhen zu verwenden, mag das letztere nun

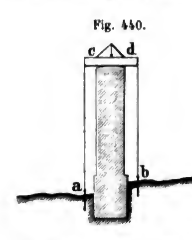
vom Geometer selbst oder von dessen Gehilfen geschehen. Die Aufzeichnungen im Notizbuche müssen so vollständig und leserlich seyn, dass jeder andere Sachverständige das Nivellement darnach berechnen und auftragen kann.

3. Man darf die Mühe nicht scheuen, vor jedem Nivellement das Instrument zu untersuchen und es nöthigenfalls zu berichtigen. Bei grösseren Arbeiten macht man dergleichen Untersuchungen jeden Morgen. Dabei hat man sich auch zu überzeugen, ob alle Theile des Instruments ihre Schuldigkeit thun, z. B. die Schrauben und Federn. Gehen die Schraubenspindeln zu leicht, so ziehe man entweder ihre geschlitzten Muttern an, oder tauche die Spindeln in zerlassenes Wachs, dem ein wenig Talg zugesetzt ist. Grosse Reibung zwischen Stahl und Kupfertheilen wird durch Olivenöl oder Klauenfett gemindert.

4. Nach beendigter Arbeit wird das Instrument, wenn es nass geworden seyn sollte, getrocknet und hierauf vorsichtig eingepackt. Während der Ruhestunden und zur Nachtzeit nimmt dasselbe der Geometer zu sich, um es der Neugierde Unberufener zu entziehen. Auf Reisen soll es vor Erschütterungen so viel als möglich bewahrt werden.

5. Hat man in bedecktem Terrain zu nivelliren und bietet Gebüsche oder Gestrüppe ein Hinderniss dar, so wird dasselbe in der Richtung der Visirlinien abgehackt; führt das Nivellement durch einen Wald, so kann man sich in der Regel einen Standpunkt suchen, der zwei Punkte einzunivelliren gestattet, ohne dass man Bäume fällen lässt; wird die Linie von Hecken, Planken oder anderen Zäunen durchschnitten und kann man sich nicht hoch genug aufstellen, um über sie wegzusehen, so bringt man in denselben Lücken an, durch welche visirt werden kann; hohe Mauern werden in diesem Falle dadurch überschritten, dass man vor und hinter denselben Grundpfähle (a, b Fig. 440) schlägt und deren Höhenunterschied mit Hilfe einer horizontal gelegten Latte (cd) durch Nivellirlatten oder Senkel (ac, bd) abmisst.

Fig. 440.



6. Wird die Richtung eines Längen- oder Querprofils von einem Bache oder kleineren Flusse geschnitten, so verfährt man mit der Aufnahme gerade so, als ob kein Wasser vorhanden wäre, da im Sommer die Arbeiter die Nivellirlatte im Wasser gerade so halten können, als im Trockenen. An grossen Flüssen und Strömen hat man indessen nach der im Abschnitte IV. gegebenen Anleitung zu verfahren.

7. Wenn eine Moor- oder Sumpffläche zu nivelliren ist, so muss dieselbe vor allen Dingen mit einer Reihe von Punkten umgeben werden, welche noch (wie in Fig. 441 die Pfähle Nr. 1, 2, 3 . . 20, 21, 40, 41 . . . 30, 31, 50, 51 . . . 112, 113, 114 . . .) auf festem Boden stehen. Von dieser Umfangslinie aus nivellirt man nach Innen so viele Punkte an, als nur

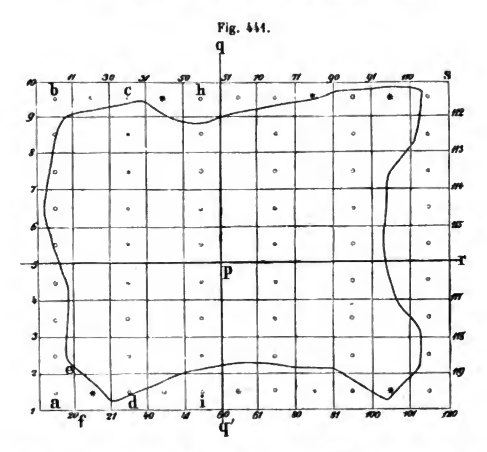


Fig. 444.

immer angeht; die übrigen sind entweder im Winter, wenn der Boden gefroren ist, einzunivelliren, oder es ist für geeignete Standpunkte des Instruments durch Einschlagen von je drei Pfählen zu sorgen.

8. Den schädlichen Einflüssen der Witterung lässt sich nur zum Theil begegnen: sind die daraus zu befürchtenden Störungen zu gross, so muss die Arbeit eingestellt werden. Den nachtheiligen Einwirkungen der direkten Sonnenstrahlen auf die Libelle, das Objectiv des Fernrohrs und die Gläser der Canalwage, [1] werden durch Schirme beseitigt; dagegen können die daraus hervorgehenden Luftzitterungen und scheinbaren Bewegungen der Nivellirlatte eben so wenig weggeschafft werden, als die Störungen, welche dadurch entstehen, dass helle Wände das Sonnenlicht gegen das Fernrohr oder die Canalwage reflectiren.

9. Jedes Längenprofil, welches als Grundlage des Entwurfs eines Erd- oder Wasserbauwerkes dienen soll, muss auf feste Punkte (Fixpunkte) bezogen werden, welche nicht wie Grund- und Beipfähle der Zerstörung aus Unvorsichtigkeit oder Muthwillen unterliegen. Dergleichen Fixpunkte, welche nicht über 3000 Fuss von einander entfernt seyn sollten, sind: Felsvorsprünge, Sockel von Gebäuden, massive Treppenstufen, Trottoirplatten, Fachbäume etc. und in Ermangelung solcher natürlicher Gegenstände 4 Zoll starke eichene Pfähle, welche ungefähr 4 Fuss tief in den Boden gerammt, oben mit einem Nagel versehen und wohl verwahrt werden. Bei der Ausführung des Bauentwurfes gehen alle Nivellemente von den Fixpunkten aus,

[1] An diesen Gläsern entstehen Glanzlinien, welche die Ränder der Wasseroberflächen nicht gut erkennen lassen.

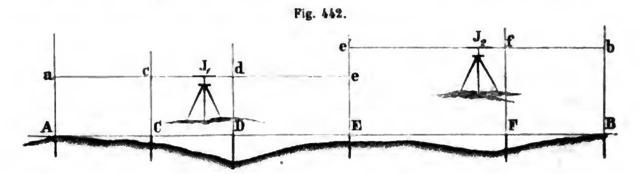
wenn die Grundpfähle des Längenprofils nicht mehr vorhanden sind oder über ihre Höhenlage Zweifel bestehen.

10. Kein Längennivellement darf als richtig angesehen werden, welches nicht durch ein zweites Nivellement oder durch sich selbst controlirt ist. Eine Controle der letzteren Art bietet jede in sich selbst zurückkehrende Linie, wenn der berechnete Abstand des Endpunktes derselben mit dem des Anfangspunktes, welcher angenommen wird oder gegeben ist, genau oder doch sehr nahe übereinstimmt; denn da der End- und Anfangspunkt hier dieselben sind, so kann man gewissermassen das Nivellement der halben Linie als das Gegennivellement ihrer anderen Hälfte betrachten. Möglich bleibt es aber bei dieser Controle immer noch, dass in dem Nivellement zwei gleiche und entgegengesetzte Fehler stecken, welche sich aufheben. Diese Fehler müssten jedoch entdeckt werden, wenn man die Linie zurück nivelliren würde. Darum ist ein zweites Nivellement stets die besste Prüfung des ersten.

§. 357. Aufgabe. Eine horizontale gerade Linie von bestimmter Höhenlage abzustecken.

Ist die Richtung der Geraden durch zwei Punkte (A, B Fig. 442) und ihre Höhe durch einen Fixpunkt (C) gegeben, so schaltet man vor Allem zwischen den beiden Endpunkten (A, B) so viele Punkte (D, E, F . . .)

Fig. 442.



ein, als nöthig erachtet werden, um die gesuchte Horizontallinie gehörig festzulegen. In allen Punkten der Linie werden Pfähle eingeschlagen, welche so lang sind, dass sie sicher über die abzusteckende Horizontale reichen. Hierauf nivellirt man den Fixpunkt (C) an und lässt die nächst gelegenen Pfähle der Linie (z. B. A, D, E) so tief in den Boden schlagen oder oben absägen, dass sie bei horizontaler Absehlinie dieselbe Ablesung auf der Latte geben wie der Punkt C.

Sind alle von der ersten Station aus sichtbaren Pfähle in dieser Weise geordnet, so betrachtet man einen derselben als Fixpunkt der zweiten Station und verfährt wie vorhin. Eben so kann man in einer dritten oder vierten Station zu Werke gehen.

§. 358. Aufgabe. Auf dem Felde eine gerade Linie von bestimmter Neigung abzustecken.

Die abzusteckende Gerade sey in ihrer horizontalen und vertikalen Projection durch die Punkte A und B (Fig. 443) bestimmt; der Höhenunterschied

zwischen A und B sey = h und die horizontale Entfernung von A bis B = AC = l. Es ist somit die relative Steigung von A bis B oder das relative Gefälle von B bis A gleich

$$p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (427)$$

Steht der erste in die Linie AB einzurichtende Pfahl ED horizontal um die Länge AD = λ von A ab, so ist die absolute Steigung von A bis E oder

$$DE = \eta = \lambda \operatorname{tg} \alpha.$$

Um nun den Pfahlkopf E in die richtige Höhe zu bringen, stelle man das zwischen A und D befindliche Nivellirinstrument auf die über A stehende Latte ein, lese die Höhe Aa = z ab und lasse nun den Pfahl DE so lange tiefer schlagen oder oben absägen, bis die Visirhöhe Ee = z − η wird. Ebenso verfährt man bei der Bestimmung des Punktes F, wobei entweder die aus der Gleichung

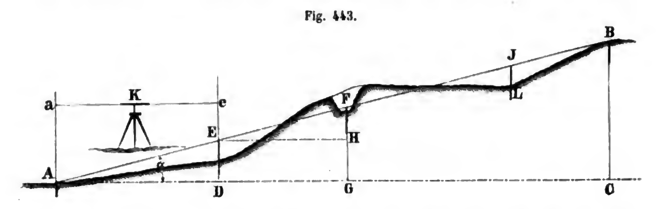
$$FG = \eta' = \lambda' \operatorname{tg} \alpha$$

folgende Höhe η' von A aus, oder die Höhe

$$FH = \eta' - \eta$$

von E aus aufgetragen wird. Liegt der Punkt F, wie in Fig. 443, unter

Fig. 443.



der Terrainfläche, so versteht es sich von selbst, dass man diese bis auf eine entsprechende Tiefe ausgraben lassen muss, um den Pfahl in der richtigen Höhe einsetzen zu können.

Lägen einzelne Punkte der abzusteckenden Geraden, wie E und J, sehr hoch über dem Terrain, so dass sich die Latte nicht gut auf die Pfahlköpfe stellen liesse, so würde man neben die Höhenpfähle ED, JL Grundpfähle schlagen und diese in Bezug auf A oder B einnivelliren, um darnach die Abstände der Punkte E und J vom Terrain zu berechnen und von den Grundpfählen aus abzumessen.

§. 359. **Aufgabe. An einem Bergabhange eine Linie von bestimmter Neigung abzustecken.**

1. Wenn nur ein Endpunkt der geneigten Linie gegeben ist.

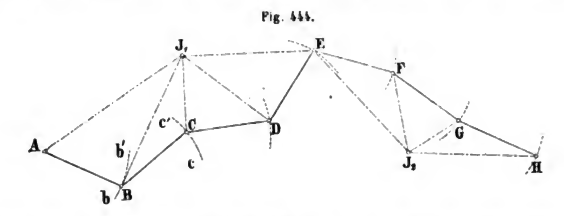
Wir wollen den unteren Endpunkt und die relative Neigung p der Linie als gegeben ansehen und annehmen, dass die horizontale Entfernung von

einem Punkte zum anderen eine Kettenlänge l betrage. Demnach ist die absolute Steigung von einem Punkte zum nächst höheren

$$n = lp.$$

Ist A (Fig. 444) der gegebene unterste Punkt, so stelle man das Nivellirinstrument (J_1) etwa 150 bis 200 Fuss von A entfernt so auf, dass man einige der abzusteckenden Punkte (A, B, C, D, E) gut übersehen kann. Stellt man die Absehlinie auf die Latte in A ein und liest die Höhe N ab, so muss die Ablesung auf dem um l entfernten Punkte B offenbar N — lp werden. Um diesen Punkt zu finden, lasse man den einen Kettenstab in A festhalten und mit dem anderen bei angespannter Kette einen Kreisbogen bb' beschreiben. Auf diesem Bogen wird die Nivellirlatte einige Male versuchsweise aufgestellt, bis man einen Punkt gefunden hat, auf dem bei

Fig. 444.



horizontaler Absehlinie die Ablesung = N — lp ist. Nun setze man den einen Kettenstab in den mit einem Pfahle bezeichneten Punkte B ein und führe den anderen Stab bei angespannter Kette in dem von B aus beschriebenen Kreisbogen cc' so lange herum, bis die Latte auf einen Terrainpunkt C kommt, der die Ablesung N — 2lp liefert. In gleicher Weise findet man D und E. Muss hierauf die Station gewechselt werden, so betrachtet man den letzten Punkt E als Anfangspunkt der Operation und wiederholt dieselbe ein oder mehrere Male in der eben beschriebenen Weise, bis man die Höhe erreicht hat, auf welche die geneigte Linie abgesteckt werden soll.

Zur Aufnahme ihrer horizontalen Projection dient eine der im Abschnitte I beschriebenen Methoden.

2. Wenn die beiden Endpunkte der geneigten Linie gegeben sind.

Heisst der untere Endpunkt A und der obere Z, so stecke man von A aus eine Linie mit der Steigung p und von Z aus eine Linie mit dem Gefälle p nach Anleitung der vorigen Nummer ab. Beide Linien werden sich in einem Punkte M schneiden, und es besteht nun die gesuchte Linie aus den Zweigen AM und MZ.

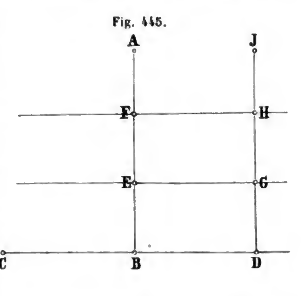
Wäre der Bergabhang durch Horizontalcurven dargestellt, deren Ebenen um gleiche Höhen von einander abstehen, so könnte man die zwischen A und Z gelegene geneigte Linie auf dem Plane nach ihrer Horizontalprojection bestimmen und diese Projection auf das Terrain übertragen; diese Bestimmung

würde aber offenbar mehr Mühe verursachen als das unmittelbare Abstecken der geneigten Linie, wesshalb letzteres vorzuziehen ist, so lange es sich bloss um eine einzige geneigte Linie von mässiger Ausdehnung handelt. Anders gestaltet sich jedoch die Sache, wenn die Linie bestimmt werden soll, nach welcher eine Strasse oder Eisenbahn am vortheilhaftesten zu führen ist; in diesem Falle leisten die Horizontalcurven wesentliche Dienste; es ist jedoch hier nicht der Ort, diese Anwendung derselben näher zu besprechen.

§. 360. Aufgabe. Eine Ebene abzustecken, welche nach einer bestimmten Richtung mit dem Horizonte einen gegebenen Winkel bildet.

Stellt in Fig. 445 die Linie AB die Richtung vor, nach welcher die abzusteckende Ebene mit dem Horizonte einen Winkel α bilden soll, so errichte man zunächst auf AB die Senkrechte CD und stecke in dieser Richtung nach §. 357 eine horizontale Gerade ab, deren Höhenlage durch den Grundpfahl des Punktes B bestimmt seyn mag. Hierauf messe man auf AB eine hinreichende Anzahl gleicher Theile BE, EF .... ab und stecke auf bekannte Weise durch diese Punkte die Linien EG, FH ... parallel zu CD ab. Weiter errichte man in E, F ... Höhenpfähle und bringe deren Köpfe nach §. 358 in eine Gerade, welche die Neigung α gegen den Horizont hat. Eben so verfahre man mit den Punkten G, H ... in der Geraden DJ, welche mit AB parallel läuft und folglich auf CD senkrecht steht. Durch Erweiterung der Horizontallinien EG, FH ..., oder durch Verlängerung der geneigten Geraden BA, DJ .., kann man die abzusteckende Ebene so weit als man will ausdehnen. Die Richtigkeit des Verfahrens wird sich der Leser sofort selbst klar machen, wenn er mit den einfachsten Sätzen der Stereometrie vertraut ist.

Fig. 445.



§. 361. Aufgabe. Zwei gegen den Horizont geneigte Ebenen sind ihrer Lage nach gegeben: man soll ihre Durchschnittslinie abstecken.

Die Winkel, welche die beiden gegebenen Ebenen mit dem Horizonte bilden, seyen α und β; der Winkel, den die Schnitte dieser Ebenen mit einer Horizontalebene einschliessen, heisse γ; und es sey die Lage dieses Winkels für eine bestimmte Horizontalebene durch die Schenkel AB, BC (Fig. 446) gegeben.

Vor Allem wird man senkrecht auf die gegebenen Geraden AB, BC die Linien DF, EF abstecken und aus den Neigungswinkeln α und β berechnen,

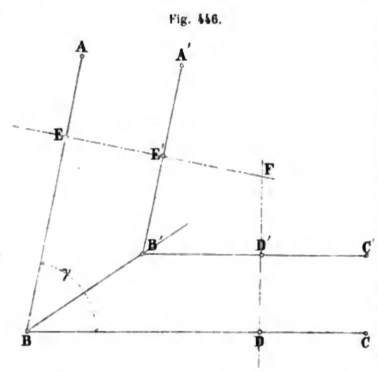


Fig. 446.

wie weit die Schnitte A'B', B'C' einer zweiten Horizontalebene A'B'C', die um eine beliebige Grösse h über der ersten ABC liegt, von AB, BC nach den Richtungen EE', DD' abstehen. Es ist aber, wenn die Ebene ABB'A' die Neigung α und CBB'C' die Neigung β hat:

$EE' = h \operatorname{tg} \alpha$ u. $DD' = h \operatorname{tg} \beta$, und es lassen sich folglich die Punkte E', D' leicht abstecken. Zieht man durch E', D' zu AB, BC die Parallelen A'E', C'D' und bestimmt ihren Schnittpunkt B', so stellt BB' die Horizontalprojection der gesuchten Kante vor. Die Höhe des Punktes B' über B ist selbstverständlich = h, und man braucht desshalb nur in B' einen Pfahl einzusetzen, dessen Kopf um die Grösse h über B liegt, um die Durchschnittslinie selbst zu erhalten. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass man die Grösse h ziemlich gross zu nehmen hat, um die Durchschnittslinie möglichst genau zu finden.

D. Barometrisches Höhenmessen.

§. 362. Es ist die Aufgabe dieses Abschnitts der Lehre von den Messungen, die Beziehungen zwischen dem Höhenunterschiede zweier Orte und den an ihnen beobachteten Barometerständen durch eine Gleichung auszudrücken, in welcher alle auf das Endresultat einwirkenden Umstände berücksichtigt sind. Diese Gleichung nennt man die Barometerformel.

Am ausführlichsten wurde diese Formel zuerst von Laplace und später von Poisson, Gauss, Bessel u. A. entwickelt. Im Jahre 1854 glaubte G. S. Ohm, in seinen „Grundzügen der Physik" darauf aufmerksam machen zu müssen, dass die auf das Barometer drückende vertikale Luftsäule nicht cylindrisch angenommen werden dürfe, wie bis dahin stets geschehen, sondern dass dafür ein Luftkegel zu setzen sey, dessen Seiten die Richtung der Schwere haben und dessen Spitze somit im Mittelpunkte der Erde liegt. Auf diese gewiss richtige Annahme gestützt, entwickelte Ohm eine einfachere Barometerformel, verfiel jedoch dabei in den Fehler, den Seitendruck, welchen die kegelförmige Luftsäule von ihrer Umgebung erfährt, nicht zu berücksichtigen. Dieser Druck hebt aber einen Theil des lothrechten Druckes, den ein isolirter Luftkegel ausüben würde, auf, und bewirkt, wie sich allgemein beweisen lässt, dass die von der Atmosphäre umschlossene

kegelförmige Luftsäule auf ihre Grundfläche mit dem Gewichte eines Luftcylinders von gleicher Basis und Höhe drückt, gleichwie in einem kegelförmigen Wassereimer der Druck auf den horizontalen Boden gleich ist dem Gewichte einer Wassersäule, welche die Bodenfläche zum Querschnitte und den lothrechten Abstand des Wasserspiegels vom Boden zur Höhe hat. Wir werden demnach bei der nachfolgenden Entwickelung der Barometerformel von demselben Princip ausgehen, welches den bisherigen Formeln zu Grunde liegt, und an diesen nur jene Aenderungen anbringen, welche in Folge neuerer Versuche und Massbestimmungen durchaus nothwendig sind, und worüber wir uns in der Schrift: „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die räumlichen Temperaturänderungen der Atmosphäre“ näher ausgesprochen haben.

§. 363. Aufgabe. Die Barometerformel abzuleiten.

Diese Aufgabe verlangt: den Luftdruck als Function der Höhe der drückenden Luftsäule darzustellen, für den Druck sein durch Barometer, Thermometer und Psychrometer bestimmbares Mass zu setzen, und aus der so gebildeten Gleichung die Höhe des Beobachtungsortes zu suchen. Zu dem Ende bezeichne:

r den Halbmesser der Erdkugel bis an die Meeresfläche,
z die Höhe irgend eines Punktes der Atmosphäre über dem Meere,
p den Druck der Luft an diesem Punkte auf die Flächeneinheit,
g die Intensität der Schwere in der Höhe z über dem Meere,
ϱ die Dichtigkeit der durchaus trockenen Luft an dieser Stelle,
τ die mittlere Temperatur der Luftsäule in Centigraden, und
α den Ausdehnungscoefficienten der Luft für einen solchen Grad.

In der analytischen Mechanik wird gezeigt, dass, wenn X, Y, Z die drei auf eine flüssige Materie wirkenden, nach den rechtwinkeligen Axen der x, y, z zerlegten Kräfte sind, zwischen diesen Kräften, dem Druck p und der Dichtigkeit ϱ folgende Differentialgleichung stattfinden muss:

$$dp = \varrho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

In dem vorliegenden Falle legt man am bessten die Axe der z in die Richtung der Schwere, also die der x und y wagrecht, wodurch die horizontalen Seitenkräfte X und Y null werden und $Z = -g$ wird. Es folgt also aus der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts der Flüssigkeiten

$$dp = -\varrho g\,dz, \quad \ldots \quad (428)$$

während aus der Physik der Gase die Relation

$$p = k\varrho\,(1 + \alpha\tau) \quad \ldots \quad (429)$$

bekannt ist, in welcher k einen constanten Coefficienten bezeichnet. Dividirt man die erste Gleichung durch die zweite, so wird ϱ eliminirt und es folgt daraus

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\,dz}{k\,(1 + \alpha\tau)}. \quad \ldots \quad (430)$$

Ist g_0 die Schwere an der Meeresfläche und lässt man dieselbe im umge-

kehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung vom Erdmittelpunkte abnehmen,[1] so ist

$$g = \frac{g_0 r^2}{(r+z)^2}$$

und daher, wenn man diesen Werth in die letzte Gleichung setzt:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0 r^2}{k(1+\alpha\tau)} \cdot \frac{dz}{(r+z)^2}.$$

Die Temperatur τ der hier betrachteten Luftsäule nimmt mit der Höhe ab, und es ist nach unseren Untersuchungen höchst wahrscheinlich, dass diese Abnahme der Höhendifferenz proportional ist, so dass also die Temperatur τ mit hinreichender Genauigkeit durch das Mittel der beiden Temperaturen T und t, welche an den beiden äussersten Punkten der Luftsäule beobachtet wurden, dargestellt werden kann. Demnach ist für jeden bestimmten Fall τ constant und daher

$$\log p = \frac{g_0 r^2}{k(1+\alpha\tau)(r+z)} + C.$$

Für einen Punkt z', der um die Höhe $z' - z = h$ über z liegt, sey der Luftdruck p', so gilt für diesen die Gleichung:

$$\log p' = \frac{g_0 r^2}{k(1+\alpha\tau)(r+z')} + C,$$

und es ergibt sich durch Abziehen dieser beiden Gleichungen von einander:

$$\log \frac{p}{p'} = \frac{g_0 r^2 (z'-z)}{k(1+\alpha\tau)(r+z)(r+z')}.$$

Setzt man $z' - z = h$ und berücksichtigt, dass genau genug

$$(r+z)(r+z') = r^2\left(1 + \frac{2z+h}{r}\right)$$

ist, so findet sich aus der letzten Gleichung, wenn man ferner die natürlichen Logarithmen durch gemeine ersetzt und mit m den Modul 0,4342945 bezeichnet:

$$h = \frac{k}{m g_0}(1+\alpha\tau)\left(1 + \frac{2z+h}{r}\right) \cdot \log\frac{p}{p'} \quad . \quad . \quad . \quad (431)$$

Für die Drückungen p, p' lassen sich die an den Punkten z, z' beobachteten Barometerstände B, b einführen, wenn man sie mit Hilfe der daselbst beobachteten Quecksilbertemperaturen T', t' auf eine und dieselbe Temperatur (am einfachsten auf 0^0) reducirt und ausserdem die Aenderung der Schwere mit der Höhe berücksichtigt.

Es sey nun:

D die Dichte des Quecksilbers bei 0^0 an der Meeresfläche,

γ der Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers für 1^0 C,

B_0 der auf 0^0 reducirte Barometerstand der unteren Station,

b_0 der reducirte Barometerstand der oberen Station, und

g' der Werth der Schwere an dieser Station;

[1] Wobei nur die von der Centrifugalkraft herrührende, in den hier zu bestimmenden Höhen aber unmerklich kleine Aenderung dieses Gesetzes vernachlässigt wird.

so ist aus physikalischen Gründen:

$$p = g D B_0, \quad p' = g' D b_0, \quad g : g' = (r + z')^2 : (r + z)^2,$$
$$B = B_0 (1 + \gamma T'), \quad b = b_0 (1 + \gamma t');$$

und folglich, wenn man substituirt und in dem Werthe von $g : g'$ eine erlaubte Abkürzung eintreten lässt:

$$\frac{p}{p'} = \frac{g B_0}{g' b_0} = \left(1 + \frac{2h}{r}\right) \cdot \frac{1 + \gamma t'}{1 + \gamma T'} \cdot \frac{B}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (432)$$

Da γ nur $1/_{5550}$ ist und die Werthe von T' und t' wohl selten 25^0 überschreiten, so darf man $(\gamma T')^2$ gegen 1 vernachlässigen und es ist

$$\frac{1 + \gamma t'}{1 + \gamma T'} = (1 + \gamma t')(1 - \gamma T') = 1 - (T' - t')\gamma, \quad . \quad . \quad (433)$$

demnach auch, mit Rücksicht auf die Kleinheit des Werthes $2h$ gegen r,

$$\log \frac{p}{p'} = \log \frac{B}{b} + \log (1 - (T' - t')\gamma) + 2m \cdot \frac{h}{r} \cdot \quad . \quad (434)$$

Was den Coefficienten k betrifft, welcher in dem Ausdrucke für h (Nr. 431) noch enthalten ist, so stellt derselbe nach Gleichung (429) das Verhältniss des Luftdrucks p zur Dichtigkeit ϱ dieser Luft bei der Temperatur τ derselben vor. Dieses Verhältniss haben Biot und Arago im Jahre 1806 bestimmt, und es lag der daraus hervorgegangene Werth von k allen bisherigen Barometerformeln, namentlich denen von Laplace, Poisson, Gauss und Bessel zu Grunde. Die neueren Bestimmungen von Régnault, welche mit Recht für genauer gehalten werden, liefern einen etwas grösseren Werth für k, wesshalb wir hier diesen anwenden. Es ist nämlich für $\tau = 0^0$ und unter 45^0 Breite bei $0^m,76$ Barometerstand:

$$k = \frac{p}{\varrho} = \frac{0^m,76 \,.\, 13,596}{0,00129273} = 7993^m,13.$$

Da nun die Schwere g_0 unter der Breite ψ zu jener unter der Breite 45^0 in dem Verhältnisse von $(1 - 0,0026 \cos 2\psi) : 1$ steht, also

$$\frac{1}{g_0} = \frac{1}{1 - 0,0026 \cos 2\psi} = 1 + 0,0026 \cos 2\psi$$

ist, so wird nunmehr der erste Factor der Formel Nr. 431

$$\frac{k}{m g_0} = \frac{7993^m,13}{0,4342945} (1 + 0,0026 \cos 2\psi) = 18404^m,9 (1 + 0,0026 \cos 2\psi)$$

und folglich durch Einsetzung dieses und des Werthes Nr. 434 in Nr. 431 der gesuchte Höhenunterschied

$$h = 18404^m,9 (1 + 0,0026 \cos 2\psi)(1 + \alpha\tau)\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)\left[\log \frac{B}{b} + \right.$$
$$\left. + \log (1 - (T' - t')\gamma) + 2m \frac{h}{r}\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (435)$$

worin $\tau = 1/_2 (T + t)$, $\alpha = 0,003665$, $\gamma = 0,0001802$, $2m = 0,86859$ ist.

Dieser Ausdruck für h ist noch wegen des Einflusses der Luftfeuchtigkeit zu verbessern. Laplace, Poisson, Gauss u. A. bringen dieselbe nach einem mittleren Feuchtigkeitszustande der Luft in Rechnung, indem sie sowohl die barometrische Constante k als den Coefficienten α etwas grösser

nehmen als trockene Luft sie fordert, während Bessel erst das Maximum des Wasserdampfs, das die Luft vermöge ihrer Temperatur aufnehmen kann, nach einem von Laplace gegebenen Ausdruck berechnet und von dessen Druck denjenigen Theil in der Formel berücksichtigt, welcher den Angaben der auf den beiden Stationen beobachteten Psychrometer entspricht. Dieses Verfahren hat eine sehr verwickelte Rechnung zur Folge, welche kaum im richtigen Verhältnisse zu der dadurch erzielten Genauigkeit steht und desshalb durch die nachstehende einfachere Entwickelung ersetzt werden kann. Bezeichnet nämlich:

$\mathfrak{p}$ den Druck der in einem gewissen Raume sich befindenden atmosphärischen Luft,

$\mathfrak{p}'$ den Druck des darin befindlichen Wasserdampfs,

$\mathfrak{v}$ das in der Raumeinheit des Gemisches enthaltene Volumen trockener Luft,

$\mathfrak{v}'$ das in demselben Raume sich befindende Volumen Wasserdampf,

$\mathfrak{d}$ die Dichtigkeit des Gemisches von trockener Luft und Wasserdampf; endlich

$\mathfrak{d}'$ die Dichtigkeit des Wasserdampfs, beide in Bezug auf trockene Luft genommen:

so muss nach dem Dalton'schen Gesetze $\mathfrak{d} = \mathfrak{v} + \mathfrak{v}'\mathfrak{d}'$ und nach dem Gesetze von Mariotte

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'}, \quad \mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'};$$

daher auch, wenn man diese Werthe einführt und $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = p$ setzt,

$$\mathfrak{d} = 1 - (1 - \mathfrak{d}')\frac{\mathfrak{p}'}{p}$$

seyn. Da nun $\mathfrak{d}' = 0{,}6235$, also sehr nahe $= {}^5/_8$, so wird das Verhältniss der Dichtigkeiten der trockenen und feuchten Luft

$$\frac{1}{\mathfrak{d}} \cdot \frac{1}{1 - {}^3/_8 \cdot \frac{\mathfrak{p}'}{p}} = 1 + {}^3/_8 \cdot \frac{\mathfrak{p}'}{p},$$

womit der aus den Barometerständen abgeleitete Werth von h multiplicirt werden muss, da der Höhenunterschied der beiden Stationen in demselben Masse zunimmt, als die feuchte Luft leichter ist als die trockene. Nennt man nun σ', σ'' und b', b'' die an den beiden Stationen beobachteten Dampfspannungen und Barometerstände, und setzt

$$\varphi = \frac{\mathfrak{p}'}{p} = {}^1/_2\left(\frac{\sigma'}{b'} + \frac{\sigma''}{b''}\right),$$

so geht der Ausdruck Nr. 435 über in

$$h = 18404^m{,}9\,(1 + 0{,}0026\cos 2\psi)\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)(1 + {}^3/_8\,\varphi)\left(1 + 0{,}003665\,.\,\frac{T + t}{2}\right) \times \left[\log\frac{B}{b} - 0{,}00008\,.\,(T' - t') + 0{,}86859 \cdot \frac{h}{r}\right], \quad . \quad (436)$$

wenn die Luft- und Quecksilbertemperaturen in Centigraden eingesetzt werden; er wird aber für Temperaturen nach Réaumur:

$$h = 18404^{m},9\,(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)(1 + {}^3/_8\,\varphi)\left(1 + 0{,}00458\,.\,\frac{T + t}{2}\right) \times \left[\log\frac{B}{b} - 0{,}0001\,.\,(T' - t') + 0{,}86859 \cdot \frac{h}{r}\right] \quad . \quad . \quad (437)$$

Diese vollständigen Barometerformeln unterscheiden sich von den bisherigen: erstens durch die Berichtigung der Constanten k und α, zweitens durch Einführung des Feuchtigkeitsfactors $(1 + {}^3/_8\,\varphi)$, und drittens durch die Vermeidung jener willkührlichen Aenderungen der Constanten, welche (ausser Bessel) alle früheren Autoren über barometrische Höhenmessungen in der Absicht vorgenommen haben, eine grössere Uebereinstimmung der letzteren mit trigonometrischen Höhenmessungen zu bewirken.

§. 364. **Aufgabe. Die Barometerformel so umzugestalten, dass sie eine bequeme Rechnung gestattet, und Tafeln für diese Rechnung herzustellen.**

Zur schnellen Berechnung des Höhenunterschieds zweier Stationen, an denen gleichzeitige Baro- und Thermometerbeobachtungen gemacht wurden, bedient man sich gewöhnlich der drei hypsometrischen Tafeln von Gauss, welche allgemein bekannt sind. Da aber diese Tafeln auf ungenauen Werthen der Constanten k und α, sowie auf der Annahme eines mittleren Feuchtigkeitszustandes der Atmosphäre und einer mittleren Meereshöhe der unteren Station beruhen, so können dieselben gegenwärtig nicht mehr genügen und müssen daher durch neue ersetzt werden. Wir haben diese Tafeln umgearbeitet und durch drei weitere vermehrt, aus denen $\log(1 + {}^3/_8\,\varphi)$ entnommen werden kann. Diese Umarbeitung setzte folgende Umwandlung der Formel Nr. 437 voraus.

Man kann nämlich zunächst die Gl. 437 mit 0,86859 multipliciren und mit dem Werthe von $r = 6366740^{m}$ dividiren, wodurch man mit Hilfe einer erlaubten Abkürzung der rechten Seite der Gleichung erhält:

$$0{,}86859 \cdot \frac{h}{r} = \frac{0{,}86859}{6366740}\,.\,18404{,}9\,\big(1 + 0{,}00229\,(T + t)\big)\left[\log\frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000}\right]$$

Hiemit wird der letzte Factor des Ausdrucks Nr. 437

$$\left[\log\frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000} + 0{,}86859\,\frac{h}{r}\right] = \left[\log\frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000}\right]\big(1{,}0025 + 0{,}0000057\,(T + t)\big)$$

und folglich (für Meter und Réaumur'sche Temperaturgrade):

$$\log h = \log 18404{,}9 + \log\big(1{,}0025 + 0{,}0000057\,(T + t)\big) + \log\big(1 + 0{,}00229\,(T + t)\big) + \log(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi) + \log\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right) + \log(1 + {}^3/_8\,\varphi) + \log\left[\log\frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (438)$$

Die ersten drei Glieder dieses Ausdruckes für log h sind nach Gauss's Vorgange in unserer ersten hypsometrischen Tafel (Nr. VIII der Sammlung von

Tafeln) enthalten. Den Eingang dieser Tafel bildet die Summe $T + t$ der Lufttemperaturen. Die mit A bezeichnete Vertikalspalte gibt die Summe der drei ersten Logarithmen, wenn h in Metern, die mit A' bezeichnete, wenn h in Pariser Fuss gesucht wird.

Der vierte Logarithmus, nämlich $\log (1 + 0{,}0026 \cos 2\psi) = \log G$ findet sich in der zweiten Tafel (Nr. IX d. S.), welche mit der von Bessel übereinstimmt. Das Argument ist hier die geographische Breite ψ der Stationen.

Die dritte Tafel (Nr. X d. S.) gibt das fünfte Glied oder $\log\left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)$.

Die vierte Tafel (Nr. XI d. S.) enthält alle den Temperaturen von -16^0 bis $+26^0$ R entsprechenden Spannungen des Wasserdampfs und dient also dazu, für jede am Psychrometer beobachtete Nasskälte t_1 den zugehörigen Dampfdruck σ' sowohl in Pariser Linien als in Millimetern zu finden.

In der fünften Tafel (N. XII d. S.) sind die Werthe des Glieds $\mu (t - t_1) b$ der August'schen Psychrometerformel

$$\sigma = \sigma' - \mu (t - t_1) b$$

enthalten, in welcher σ den Dunstdruck der feuchten Luft, t deren Temperatur und b den Barometerstand bezeichnet. Man kann aus dieser Tafel den Werth von $\mu (t - t_1) b$ und mit Hilfe der vorstehenden Formel und dem aus Taf. 4 genommenen Werthe von σ' den von σ sowohl in Pariser Linien als in Millimetern finden.

Die sechste Tafel (Nr. XIII d. S.) enthält endlich die Werthe von $\log (1 + 3/8\, \varphi)$, und man findet diese, wenn man mit dem Mittelwerthe des Dunstdrucks an den beiden Stationen in die oberste Horizontalreihe und mit dem Mittel der Barometerstände in die erste Vertikalreihe eingeht.

§. 365. Aufgabe. Mit Hilfe der neuen hypsometrischen Tafeln den Höhenunterschied zweier Stationen zu berechnen, für welche folgende Grössen gegeben sind:

Höhe der unteren Station über dem Meere oder $z = 815^m{,}36$;
Geographische Breite der Mitte beider Stationen oder $\psi = 47^0\, 40'$;
Barometerstände: $B = 307''',43$, $b = 270''',10$;
Quecksilbertemperaturen: $T' = 12^0{,}5$ R, $t' = 5^0{,}7$ R;
Lufttemperaturen: $T = 10^0{,}9$ R, $t = 4^0{,}9$ R;
Nasskälten der Psychrometer: $T_1 = 9^0{,}6$ R, $t_1 = 4^0{,}8$ R.

Man berechnet zuerst das letzte Glied des Ausdrucks Nr. 438, nämlich

$$\log\left[\log\frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000}\right] = \log u,$$

fügt hiezu die Summe A der drei ersten Glieder, welche die erste Tafel mit dem Eingange $T + t$ liefert; dazu kommt das vierte Glied aus Tafel 2 mit dem Argument ψ; hiezu das fünfte aus Tafel 3, und endlich das sechste, welches die Tafeln 4 bis 6 ergeben. Die Summe aller dieser Glieder ist log h, zu dem also nur noch die Zahl h aus den Logarithmentafeln zu suchen ist. Die Rechnung stellt sich folgendermassen:

$$\log B = \log 307''',43 = 2{,}48775; \quad T' = 12^0{,}5$$
$$\log b = \log 270''',10 = 2{,}43152; \quad t' = 5^0{,}7$$
$$0{,}05623 \qquad 6^0{,}8$$
$$-\ 68$$
$$u = 0{,}05555$$

$$\log u = 8{,}74468 - 10$$
$$A = 4{,}28148 \quad .\ .\ (1.\ \text{Taf. Arg. } T + t = 15^0{,}8);$$
$$3{,}02616$$
$$-\ 11 \quad .\ .\ (2.\ \text{Taf. Arg. } \psi = 47^0\ 40');$$
$$\log h_1 = 3{,}02605$$
$$+\ 18 \quad .\ .\ (3.\ \text{Taf. Arg. } h_1 = 3 \text{ und } z = 800^m),$$
$$+\ 204 \quad .\ .\ (4.\ 5.\ 6.\ \text{Taf. mit den Arg. } T_1, t_1, B, b \text{ und } 3''',64 \text{ und } 290''')\ [1]$$
$$\log h = 3{,}02827; \ h = 1067^m{,}26; \ h + z = 1882^m{,}62.$$

§. 366. **Regeln, welche bei barometrischen Höhenmessungen zu beobachten sind.**

Zuverlässige Höhenmessungen erfordern zwei vorzügliche, mit einem Normalbarometer verglichene Reisebarometer und zwei August'sche Psychrometer. Diese Instrumente werden an den beiden Stationen so aufgestellt, dass sie gegen das directe Sonnenlicht und so viel als möglich gegen die Strahlung des Bodens oder der Wände, an welche man sie manchmal hängt, geschützt sind. Den nöthigen Schatten gewähren am besten grosse hohe Schirme, die Strahlung gegen die Thermometer vermindern am meisten kleine auf Pfählen errichtete Tische von 5 bis 6 Fuss Höhe.

Die Aufstellung soll mindestens eine halbe Stunde vor Beginn der regelmässigen Beobachtungen, welche durchaus gleichzeitig stattfinden müssen, vollendet seyn, und man soll die Beobachtungszeiten mindestens 15 Minuten von einander abstehen lassen, damit das Ablesen der Instrumente mit der nöthigen Sorgfalt geschehen kann.

Das am Barometer befindliche Thermometer, welches die Temperatur des Quecksilbers anzeigt, wird vor dem Barometerstande abgelesen, damit die Körperwärme den Thermometerstand nicht erhöht. Das Psychrometer gibt zugleich die Lufttemperatur und die Nasskälte. Genaue Aufzeichnung der Ablesungen versteht sich von selbst. Die auf der folgenden Seite angegebene Einrichtung der Beobachtungsjournale wird genügen.

Kann man nur wenige gleichzeitige Beobachtungen machen, so sollen dieselben wo möglich am Vormittage gegen 10 Uhr und am Nachmittage

[1] Die Berechnung des sechsten Gliedes oder des Werthes von $\log(1 + \frac{3}{8}\varphi)$ geschieht folgendermassen: Man sucht den mittleren Dunstdruck für beide Stationen. Nach der vierten Tafel (Nr. XI) ist σ' für die untere Station = 4''',620 und für die obere = 3''',076; nach der fünften Tafel (Nr. XII) aber $\mu\,(t - t_1)\,b$ für die untere Station = 0''',390 und für die obere = 0''',027, daher σ für unten = 4,620 − 0,390 = 4''',230 und für oben = 3,076 − 0,027 = 3''',049, folglich der gesuchte Dunstdruck = ½ (4,230 + 3,049) = 3''',64. Ferner ist ½ (B + b) = 288''',77, wofür man hier auch 290''' setzen kann. Mit den Argumenten 3''',64 und 290''' liefert endlich die sechste Tafel

$$\log(1 + \tfrac{3}{8}\varphi) = 0{,}00168 + 0{,}00034 + 0{,}00002 = 0{,}00204,$$

wie oben angenommen ist.

Station N.

Beobachtungszeit.			Psychrometer.		Barometer.			Wind-richtung.	Bemerkungen.
Monat.	Tag.	St.	Trockn.	Feucht. Th.	Qu. Temp.	Non. I	Non. II.		
Aug.	20	8	10°,9	9°,6	12°,5	329''',40	21''',72	S W W	Himmel bedeckt.
"	"	8½	12,1	10,3	13,0	38	75	W	Wind sehr schwach.

gegen 4 Uhr stattfinden, weil die Erfahrung lehrt, dass die aus diesen Beobachtungen abgeleiteten Höhenunterschiede am bessten mit jenen übereinstimmen, welche man auf trigonometrischem Wege oder durch Nivelliren erhält. Man nimmt allgemein an, dass zu diesen Zeiten der Zustand der Atmosphäre mehr in's Gleichgewicht getreten sey; wir aber glauben, dass die Thermometer gegen 10 und 4 Uhr die Lufttemperaturen am richtigsten geben, weil der Einfluss der Bodenwärme auf sie um diese Zeiten am geringsten ist.

Ist dem Beobachter die Wahl der Stationen überlassen, so soll er wo möglich isolirte Punkte wählen und namentlich Thalabhänge, zumal in der Nähe grosser Gebirge, vermeiden, weil die längs dieser Abhänge häufig stattfindenden Luftströmungen nicht gleichmässig auf die an beiden Stationen aufgestellten Thermometer wirken. Jedenfalls dürfen die Stationen in horizontaler Richtung nicht zu weit auseinander liegen, damit die Aenderungen in dem Zustande der Atmosphäre nicht einseitig bloss auf einer Station fühlbar werden, und wohl auch aus dem Grunde, weil an südlich gelegenen Punkten die drückende Luftsäule höher und folglich auch schwerer ist als an nördlichen Stationen, wenn diese auch mit jenen in einer Horizontalebene sich befinden.

Beobachtungen, welche bei starkem Winde oder vor Gewittern gemacht werden, geben in der Regel unrichtige Höhenunterschiede, da diese Ursachen schnelle und bedeutende, jedoch nicht immer gleichzeitige Aenderungen der Barometerstände hervorbringen. Solche Beobachtungen schliesst man daher mit Recht aus. Hat man dergleichen aber längere Zeit fortgesetzt, so wird man durch Vergleichung finden, dass in Thälern der Nordwind durchschnittlich ein Steigen, der Südwind ein Fallen des Barometers bewirkt, auf Bergspitzen jedoch oft das Entgegengesetzte stattfindet.

Da bei weit entfernten Stationen die Aenderungen der Barometerstände sehr häufig ebenfalls nicht gleichzeitig erfolgen, und da anzunehmen ist, dass bei grossen Breitendifferenzen der Stationen auch bei ganz ruhiger Luft die drückenden Luftsäulen ungleich hoch sind, also die Barometerstände nicht mehr unter der Voraussetzung gemessen werden, welche bei der Entwickelung der Barometerformel gemacht wurde: so soll man barometrische Höhenmessungen nicht zwischen weit entfernten Stationen und namentlich nicht zwischen Stationen, deren Breiten sehr verschieden sind, vornehmen. Als grösste Entfernungen dürften vielleicht zwei deutsche Meilen und beziehungsweise acht Bogenminuten in dem Falle anzusehen seyn, dass nur

einige wenige gleichzeitige Beobachtungen zur Bestimmung des Höhenunterschieds zweier Punkte dienen sollen. Diese Maximalentfernungen können aber auf fünf Meilen oder zwanzig Bogenminuten ausgedehnt werden, wenn man den Höhenunterschied zweier Orte aus jahrelang fortgesetzten baro- und thermometrischen Beobachtungen abzuleiten hat.

§. 367. **Genauigkeit der barometrischen Höhenmessungen.** Ueber diese Frage herrschen die verschiedenartigsten Ansichten: Einige schreiben diesen Messungen eine sehr grosse Genauigkeit zu und empfehlen sie selbst zu Nivellementen für Flüsse; Andere sprechen ihnen dagegen jede Zuverlässigkeit ab und verwerfen das Barometer als Höhenmessinstrument; die Mehrzahl aber bekennt sich weder zu dieser noch jener extremen Ansicht und wendet die barometrischen Höhenmessungen an, ohne viel nach dem Grade ihrer Genauigkeit zu fragen; Wenige nur haben sich auf Grund eigener Messungen hierüber geäussert. Der Verfasser fand sich hiedurch im Jahre 1857 veranlasst, eine Reihe von Beobachtungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen anzustellen und deren Ergebnisse in der bereits oben (§. 362) angeführten Schrift, die hier theilweise wieder benützt wird, zu veröffentlichen.

Die Beobachtungsfehler, welche von wesentlichem Einflusse auf das Resultat der Höhenbestimmung sind, können gemacht werden: bei der Messung der Lufttemperaturen (T, t), der Quecksilbertemperaturen (T', t'), der Barometerstände (B, b), und es können diese Fehler, welche wir mit dT, dt u. s. w. bezeichnen wollen, sowohl positiv als negativ seyn. Für den vorliegenden Zweck kann man die Höhe zwischen zwei Stationen genau genug durch die Gleichung ausdrücken:

$$h = k\,(1 + \alpha\tau)\,(\log B - \log b - \gamma\tau'),$$

worin die Constante $k = 18404^m{,}9$ und der Coefficient $\alpha = 0{,}0023$ für $1/2^0$ R, ferner $\tau = T + t$, $\tau' = T' - t'$ und $\gamma = 0{,}0000978 = 0{,}0001$ ist, wenn τ' in achtzigtheiligen Graden ausgedrückt ist. Diese Gleichung liefert, wenn man sie erst logarithmisirt und dann nach den oben bezeichneten Veränderlichen differentiirt:

$$\frac{dh}{h} = \frac{\alpha \,.\, d\tau}{1 + \alpha\tau} + \frac{d\,(\log B - \log b - \gamma\tau')}{\log B - \log b - \gamma\tau'},$$

oder, wenn man $\log B - \log b - \gamma\tau' = u$ und den Modul des briggischen Logarithmensystems $= m$ setzt:

$$\frac{dh}{h} = \frac{\alpha \,.\, d\tau}{1 + \alpha\tau} + \frac{m}{u}\left(\frac{dB}{B} - \frac{db}{b} - \frac{\gamma\, d\tau'}{m}\right).$$

Berücksichtigen wir, dass $1 + \alpha\tau$ von 1 nur wenig verschieden ist und dass $d\tau = dT + dt = \pm 2\,dt$ gesetzt werden kann, so wird das erste Glied dieses Ausdrucks $= 0{,}0046 \,.\, dt$; und wird quantitativ $dB = db$ und $dT' = dt'$, qualitativ aber db dem dB und dt' dem dT' entgegen gesetzt, so findet sich der grösste relative Fehler:

$$\frac{dh}{h} = \pm\left(0{,}0046 \,.\, dt + \frac{m}{u}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{b}\right) db + \frac{2\gamma}{u}\, dt'\right) \quad . \quad . \quad (439)$$

und, wenn man diese Gleichung mit $h = k\,(1 + \alpha\tau)\,u$ multiplicirt, der grösste absolute Fehler:

$$dh = \pm\, k\,(1 + \alpha\tau)\left(2\alpha\, dt.\log\frac{B}{b} + m\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{b}\right)db + 2\gamma\, dt'\right). \quad (440)$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1) Der relative Fehler der barometrischen Höhenbestimmung wächst mit den Fehlern, welche in der Messung der Temperaturen und der Barometerstände gemacht werden.

2) Die Fehler in den Barometerständen und den Quecksilbertemperaturen wirken um so nachtheiliger, je kleiner der zu bestimmende Höhenunterschied ist.

3) Die fehlerhafte Bestimmung der Lufttemperatur gibt einen und denselben relativen Fehler für grosse und kleine Höhen; ihr Einfluss ist also bei kleinen Höhen bedeutender als bei grossen.

4) Unter sonst gleichen Umständen wird der relative Fehler um so grösser, je höher die untere Station über dem Meere liegt.

5) Der absolute Fehler der Höhe wächst wohl auch mit der Grösse der Fehler db, dt, dt' und mit der Höhe h, aber dieser letzteren nicht proportional, sondern in geringerem Masse als die Höhe.

So findet man z. B.

für $B = 322'''$, $b = 300'''$, $T + t = 24^0$ R die Höhe $h = 597^m$

und für $B = 322'''$, $b = 250'''$, $T + t = 10^0$ R die Höhe $h = 2075^m$.

Ist nun in beiden Messungen $db = 0''',1$ und $dt = dt' = 0^0,5$ R, so erhält man den grössten absoluten Fehler der Höhe $597^m = 8^m,74$ und den der Höhe $2075^m = 12^m,43$, während dieser letztere $= 30^m,39$ seyn müsste, wenn die absoluten Fehler den Höhen proportional wären.

Der absolute oder relative Fehler einer einzigen Messung kann, ohne dass die Beobachter etwas versäumten, sehr bedeutend werden:

a) weil die Genauigkeit der Ablesung der Barometerstände nicht wohl grösser als $0''',1$ anzunehmen ist und die Fehler dB und db ebensooft ungleiche als gleiche Zeichen haben können;

b) weil die Temperatur der Luft wegen der Wärmestrahlung des Erdbodens nicht sicher bestimmt werden kann und die Fehler dT und dt namentlich am Morgen und Abend, sowie zur Zeit des Wärmemaximums (gegen 2 Uhr) sogar mehr als 2^0 R betragen und qualitativ gleich seyn können; endlich

c) weil die Thermometer, welche die Temperatur des Quecksilbers anzeigen sollen, bei Reisebarometern selten in dem Quecksilber selbst stecken, daher auch hier die Fehler dT', dt' leicht 1^0 R betragen und einander entgegengesetzt seyn können.

Unsere, im August 1857 am grossen Miesing im bayerischen Hochgebirge angestellten correspondirenden Messungen ergaben in dieser Beziehung folgende Resultate:

1) Unter 100 Messungen betrugen die grössten Fehler in der Strecke

zwischen I und III auf 1850',8 Höhe: + 31',5 oder 0,0170;
" III " V " 1809,0 " — 39,6 " 0,0219;
" I " V " 3659,8 " + 46,4 " 0,0127;

2) Die durchschnittlichen Fehler dieser 100 Messungen waren:
zwischen I und III auf 1850',8 Höhe: ± 10',1 oder 0,0055;
" III " V " 1809,0 " ± 11,4 " 0,0063;
" I " V " 3659,8 " ± 15,7 " 0,0043.

3) Die Fehler der arithmetischen Mittel aus 100 Messungen betrugen:
zwischen I und III auf 1850',8 Höhe: ± 1',3 oder 0,00070;
" III " V " 1809,0 " ± 1,5 " 0,00082;
" I " V " 3659,8 " ± 2,0 " 0,00053.

4) Die Fehler der arithmetischen Mittel aus je 4 in Zeit von 1½ Stunden angestellten correspondirenden Messungen waren in der Strecke:
I—III von 9—10½ Uhr Vorm. ± 6',6 und von 3—4½ Uhr Nachm. = ± 9',4
III—V " " " " ± 7,0 " " " " " = ± 5,5
I—V " " " " ± 13,4 " " " " " = ± 7,5.

Dieses letztere Ergebniss, verbunden mit der Beobachtung, dass in allen anderen Stunden die Fehler grösser waren als zwischen 9—10½ und 3—4½ Uhr, veranlasst uns zu dem Ausspruche, dass vier oder fünf gleichzeitige Beobachtungen, auf zwei Stationen von geringer horizontaler Entfernung, bei guter Witterung und gegen 10 oder 4 Uhr in Zwischenräumen von etwa 20 Minuten angestellt, den Fehler des arithmetischen Mittels bei 500 Meter Höhenunterschied auf etwa 2 Meter, und bei 1000 Meter Höhenunterschied auf etwa 3 Meter einschränken werden. Wir sind demnach der Meinung, dass sorgfältig angestellte, correspondirende Barometermessungen noch immer ein sehr zu empfehlendes Mittel sind für die Bestimmung der Höhen von bewohnten Orten, Bergspitzen, Gebirgsübergängen, Quellen, See'n, Fundorten von Pflanzen und Petrefacten, Grenzen geologischer Formationen, ferner zu vorläufigen Terrainuntersuchungen behufs der Anlage von Strassen und Eisenbahnen, und endlich selbst zur Darstellung der Gebirge mittels Horizontalcurven; wir sind aber auch entschieden der Ansicht, dass überall da, wo die Höhenunterschiede genauer als in den vorher bezeichneten Fällen bestimmt seyn müssen und auch da, wo die zu bestimmenden Höhenunterschiede weniger als 100 Meter betragen, die trigonometrischen und insbesondere die nivellatorischen Messungen den barometrischen weit vorzuziehen sind.

Dritter Abschnitt.

Grubenmessungen.

A. Technische Ausdrücke der Bergleute und Markscheider.

§. 368. Der geordnete Betrieb der Bergwerke fordert, dass man die vorhandenen Lagerstätten nutzbarer Mineralien und die Grubenanlagen, welche zu ihrer Ausbeutung dienen, aufnehmen und bildlich darstellen, sowie projectirte Grubenbaue ihrer Grösse und Lage nach abstecken kann. Dieses Geschäft heisst Markscheiden und Derjenige, welcher es ausübt, ein Markscheider.

Es handelt sich also auch hier, wie in den beiden vorausgehenden Abschnitten, um Aufnehmen und Abstecken, und so lange der Markscheider nicht in der Grube, sondern im freien Felde arbeitet, sind seine Hilfsmittel und Operationen von denen des practischen Geometers nicht verschieden, oder sollten es jedenfalls nicht seyn. Eine Verschiedenheit der Instrumente und Messmethoden tritt nur bei Arbeiten in engen Grubenräumen ein, welche die Anwendung geodätischer Instrumente nicht gestatten. Wo jedoch Raum für diese gegeben ist, zieht sie der wissenschaftlich gebildete Markscheider auch bei seinen unterirdischen Arbeiten den weniger genauen Hilfsmitteln, welche er zur Messung horizontaler und vertikaler Winkel in dem Hängecompass und dem Gradbogen besitzt, vor.

In die Lehrbücher der Markscheidekunst wird in der Regel auch die Lehre von den Horizontal- und Vertikalmessungen im freien Felde, oder nach bergmännischem Ausdrucke, die Lehre von den Tagemessungen aufgenommen und entweder im Sinne der practischen Geometer auf die vollkommeneren Messinstrumente der Neuzeit, oder im Sinne der alten Markscheider auf deren unbehilfliche und ungenaue Werkzeuge gegründet. Da wir aber diese Messungen im ersteren Sinne bereits abgehandelt haben, so brauchen wir sie nicht weiter zu berühren, als um ihre Verknüpfung mit den unterirdischen Messungen oder mit anderen Worten, den Anschluss der Grubenmessungen an die Tagmessungen zu zeigen.

Da die Markscheidekunst nur für den Bergbau vorhanden ist und vorzugsweise von Bergleuten ausgeübt wird, so begreift sich leicht, dass in derselben viele bergmännische Ausdrücke üblich sind, welche der practische Geometer und der Ingenieur in der Regel nicht kennen, und welche ihnen desshalb erklärt werden müssen, wenn sie in den Stand gesetzt werden sollen, die Bergleute zu verstehen oder sich ihnen verständlich zu machen. Diese Kunstwörter beziehen sich zum Theil auf geognostische Verhältnisse, insoferne sie die Lagerstätten der Mineralien betreffen; zum Theil bezeichnen

sie die technischen Anlagen und Arbeiten, welche zur Gewinnung der brauchbaren Mineralien dienen; und theilweise werden sie zur Bezeichnung geometrischer Begriffe (in diesem Falle also gleichbedeutend mit den Ausdrücken der Geometer) gebraucht. Wir theilen nachstehend eine grössere Anzahl bergmännischer Kunstwörter mit, ohne uns jedoch zu verpflichten, die geometrischen auch da beizubehalten, wo es bereits allgemein gebräuchliche gute Namen zur Bezeichnung von hiehergehörigen Dingen und Begriffen gibt.

§. 369. **Geognostische Ausdrücke.** Die grossen zusammenhängenden Massen, welche die Hauptbestandtheile der Erdrinde bilden, heissen Gebirgsmassen. Sind diese Massen auf beträchtliche Weite durch parallele Ebenen in Lagen von mässiger Dicke getheilt, so nennt man sie geschichtet, die Lagen selbst Schichten. Jene Schichten, welche aus Mineralmassen bestehen, die der Hauptgebirgsmasse fremdartig und untergeordnet sind, heissen Lager. Von diesen hat man diejenigen Lagen verschiedenartiger Mineralmassen zu unterscheiden, welche die Gebirgsschichten durchschneiden und Gänge genannt werden. Lager und Gänge nennt man zusammen Lagerstätten. Erstrecken sich diese bis an die Erdoberfläche, so sagt man von ihnen, sie gehen zu Tage aus; das Hervortreten einer Lagerstätte an das Tageslicht nennt man wohl auch das Ausbeissen derselben. Die Schichten, auf denen eine Lagerstätte ruht, heissen das Liegende, jene, welche sie bedecken, das Hangende, und die Ebenen, welche die Lagerstätte vom Liegenden und Hangenden trennen, die Salbänder der Lagerstätte. Der senkrechte Abstand der beiden Salbänder einer Lagerstätte wird deren Mächtigkeit genannt. Ist die Mächtigkeit eines Lagers im Verhältniss zu seiner Länge sehr gross, so heisst es ein Stock.

§. 370. **Bergmännische Ausdrücke.** Unter dem Abbau einer Lagerstätte versteht man die Gewinnung der in ihr vorkommenden nutzbaren Mineralien. Der Raum, welchen ein Grubenbesitzer (Lehenträger, Gewerk) abbauen darf, heisst das Grubenfeld. Zur Bezeichnung der Grenzen eines solchen Feldes dienen an der Erdoberfläche (über Tage) die Lochsteine und in der Grube (unter Tage) die in das Gestein eingehauenen Markscheidestufen.

Der Abbau der Lagerstätten geschieht durch Stollen und Schächte. Ein Stollen ist ein in einen Berg führender (getriebener) Gang von sehr geringer Neigung und mässigem Querschnitte. [1] Dient er zum Aufsuchen einer neuen oder zur näheren Untersuchung einer alten Lagerstätte, so heisst er Schurfstollen; werden durch ihn die Grubenwässer abgeleitet, Erbstollen; soll er den Gruben gute Luft zuleiten, Wetterstollen; geschieht durch ihn der Transport der gewonnenen Mineralmassen, Förderstollen; und wenn er vorhandene Gänge verbindet oder verkreuzt, Zubaustollen. Das zu Tage gehende Ende eines Stollens heisst sein Mundloch, das

[1] Die Höhe beträgt in der Regel nur $5/4$, die Breite $1/2$ Lachter, die Steigung höchstens $1/2$ Prozent.

entgegengesetzte der Feldort; Boden, Decke und Seitenwände nennt man beziehlich Sohle, First, Ulmen.

Unter Schacht versteht man eine von der Erdoberfläche ausgehende lothrechte oder geneigte Grube von rechteckigem Querschnitte. Dient er zum Auf- und Niedersteigen (Aus- und Einfahren), so heisst er Fahrschacht; soll er frische Luft zuführen, Wetterschacht; werden durch ihn mittels Maschinen (Künste) die Grubenwässer weggeschafft (gelöst), Kunstschacht; dient er zur Hebung der gewonnenen Mineralmassen, Förderschacht; und wenn dieses Heben durch besondere Maschinen geschieht, Treibschacht. Das untere Ende eines Schachtes heisst dessen Sohle, seine Längenausdehnung die Teufe.

Eine nicht von der Erdoberfläche, sondern von einem Stollen ausgehende lothrechte oder schiefe Grube nennt man ein Gesenke, und einen nicht von einem Bergabhange, sondern von einem Schachte ausgehenden Stollen eine Strecke. Eine von einem Stollen rechtwinkelig abzweigende Strecke heisst ein Querschlag, ausserdem ein Flügelort. Die Oerter, welche so niedrig sind, dass die Bergleute nur sitzend darin arbeiten können, nennt man Sitzörter, und jene weiten, welche unter einem Förderschachte liegen und zur Einfüllung der Kübel und Tonnen dienen, Füllörter.

Stollen, Strecken, Schächte und Gesenke werden überall, wo Felsen es nicht unnöthig macht, zur Vermeidung des Einsturzes ausgezimmert (manchmal auch ausgemauert). Die Zimmerung eines Stollens geschieht mit Thürstöcken, die nach Erforderniss dicht beisammen oder eine halbe Lachter von einander stehen. Die in den Seitenwänden stehenden Holzstämme heissen Stämpel, die darauf liegenden Kappen.

§. 371. **Geometrische Ausdrücke.** Eine söhlige Linie oder Ebene ist mit einer wagrechten, eine seigere mit einer lothrechten Linie oder Ebene gleichbedeutend. Demnach bedeutet Seigerteufe eine in die Tiefe gehende Vertikallinie und Seigerebene eine Vertikalebene. Unter einer flachen oder tonnlägigen Linie oder Ebene wird jede gegen den Horizont geneigte Linie oder Ebene verstanden.

Denkt man sich durch den einen Endpunkt einer geneigten Linie eine Horizontalebene gelegt und den anderen Endpunkt darauf projicirt, so heisst dessen Projection der Seigerpunkt, während die Horizontal-Projection der Linie selbst deren Ebensohle genannt wird. Der Neigungswinkel der flachen Linie gegen den Horizont heisst der Fallwinkel und der horizontale Winkel, den die Ebensohle mit der Mittagslinie bildet, der Streichwinkel der flachen oder tonnlägigen Linie.

Zieht man auf einer Lager- oder Gangebene (in der Regel auf einem Salbande) eine horizontale (söhlige) Linie, so heisst dieselbe die Streichlinie dieser Ebene. Misst man den horizontalen Winkel, welchen diese Linie mit dem Meridiane bildet, so hat man den Streichwinkel des Lagers oder des Ganges, wobei nur noch anzugeben ist, von welcher Seite der Mittagslinie aus er gezählt wird. Eine in der Gang- oder Lagerebene senkrecht

zur Streichlinie gezogene Gerade heisst die Falllinie der Ebene, und der Neigungswinkel dieser Linie gegen den Horizont der Fallwinkel der Lagerstätte, zu welcher jene Ebene gehört. Die Ebene des Fallwinkels nennt man die Fallebene der Lagerstätte. Zwei Gänge fallen rechtssinnig, wenn ihre Falllinien nach gleichen Himmelsgegenden gerichtet sind, und widersinnig, wenn das Gegentheil stattfindet.

Statt des Wortes Abstecken bedienen sich die Markscheider des Ausdruckes Abgeben (einen Punkt, eine Linie abgeben); das Aufnehmen nennen sie Verziehen, und die bildliche Darstellung oder das Auftragen einer Figur Zulegen. Für Horizontalprojection brauchen sie das auch sonst übliche Wort Grundriss, für erste Vertikalprojection oder Aufriss den Ausdruck Seigerriss, und für zweite Vertikalprojection das Wort Quer- oder Kreuzriss.

B. Grundoperationen in der Grube.

§. 372. Die Arbeiten, welche der Markscheider in der Grube oder „unter Tage" vorzunehmen hat, bestehen wie die des Feldmessers in der Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten, und folglich in dem Aufnehmen und Abstecken von Punkten, Linien und Winkeln. Die zusammengesetztesten Markscheide-Aufgaben erfordern zu ihrer Lösung weiter Nichts als eine entsprechende Combination von Linien- und Winkelmessungen; wer daher als Markscheider Etwas leisten will, muss vor allen Dingen mit diesen Messungen vertraut seyn und sich ausserdem durch ein gründliches Studium der darstellenden Geometrie die Befähigung erworben haben, die Lösung zusammengesetzter Aufgaben über die gegenseitige Lage von Linien und Ebenen auf die Construction und Messung von Linien und Winkeln zurückzuführen.

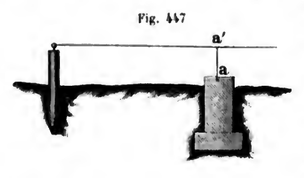
Jede Messung in der Grube muss an einem fixen Punkte (Anhaltspunkt) beginnen und schliessen; ausgedehnte Messungen erfordern auch zwischen den Enden Fixpunkte, um an sie spätere Messungen anschliessen zu können. Diejenigen Punkte, welche nur für kurze Zeit bezeichnet werden, nennt man, im Gegensatze zu den Fixpunkten, verlorene Punkte. Die Anhaltspunkte werden auf verschiedene Weise bezeichnet.

§. 373. Aufgabe. Es sollen die gebräuchlichsten Arten, Fixpunkte in den Gruben zu bezeichnen, angegeben werden.

Beginnt eine Messung an einem Stollenmundloche (Ein- oder Ausgang), so wird an demselben ein Fixpunkt angebracht, der zugleich für die Verbindung der Messung in der Grube mit der über Tage dient. Ist der Stollen mit Holz abgesteift, so begnügen sich manche Markscheider damit, in der Kappe des Thürstocks oder in dessen Pfosten ein Kreuz (†) einzuschneiden und dieses als Fixpunkt anzusehen; ein solcher Punkt ist aber zu unsicher und zu vergänglich, als dass er den Namen Fixpunkt verdiente. Dauerhafter sind jene Zeichen, welche aus 4 bis 5 Zoll langen hölzernen Dübeln

bestehen, die entweder in das feste Gestein oder das Mauerwerk des Stollenmundloches eingetrieben sind, um beim Verrichten des Zugs eine Verziehschraube oder ein 6 Zoll langes und am Kopfe 1 Zoll breites Punkteisen (Fig. 76, Seite 106) aufzunehmen. Am sichersten und geeignetsten aber erscheinen besondere Fixsteine, welche man vor dem Stollenmundloche auf ein festes Fundament so weit versenkt, dass sie nur etwa einen Zoll über die Sohle des Stollens vorstehen (Fig. 447). Dergleichen Steine (a) sind Prismen von einem Quadratfuss Grundfläche und 2 bis 3 Fuss Höhe, in welche oben ein 2 Zoll tiefes Loch gebohrt ist, das den Anfangspunkt vorstellt. Zur Schonung des Steins ist es gut, denselben mit einem Deckel zu versehen, der bei Messungen abgenommen wird; ausserdem ist seine Lage gegen andere unveränderliche Gegenstände in horizontaler und vertikaler Projection genau einzumessen, um sich jederzeit von dem unverrückten Stande desselben überzeugen zu können.

Fig. 447



In den Firsten von Stollen oder Strecken werden diejenigen Punkte, von denen bloss herabgesenkelt wird, durch die in Fig. 77 abgebildeten und auf Seite 106 beschriebenen Senkeleisen bezeichnet. Fig. 448 stellt einen solchen Fall dar, wobei das Loth mn die gespannte Schnur s berührt.

Fig. 448.



Als Fix- oder Anhaltspunkte für die Nivellemente von Stollen oder Strecken dienen Sohlnägel (Fig. 78), welche in hölzerne Schwellen oder, in Ermangelung derselben, in hölzerne Dübel, die in das Gestein eingelassen sind, eingeschlagen werden.

§. 374. **Aufgabe. Eine geneigte oder tonnlägige Linie abzustecken und auszumessen.**

Das Abstecken von Linien in der Grube muss sich wegen Mangels an Aussicht und Tageslicht von dem Abstecken über Tage wesentlich unterscheiden. Sind es hier die Lichtstrahlen, welche gerade Linien bezeichnen, so dienen in den finstern und engen Grubenräumen Schnüre und Seile (manchmal auch Dachlatten) zur Verkörperung dieser Linien, und an die Stelle der Absteckstäbe treten alsdann die Verzieh- oder Markscheideschrauben.

Wie die 20 bis 30 Klafter lange, $2^1/_2$ bis 3 Linien dicke und auf eine Spule gewickelte Mess- oder Verziehschnur mittels der eben genannten Schrauben in der Grubenzimmerung oder in besonderen Spreizen befestigt und die Schnurlänge zwischen zwei Schrauben mit Hilfe der Lachterkette

bestimmt wird, ist bereits aus §. 177 bekannt; hier ist nur noch beizufügen, wie man die Schnurlänge mit den Lachterstäben findet.

Der Markscheider muss hiezu zwei Stäbe und einen Gehilfen haben; jener führt den Massstab Nr. I, dieser Nr. II, und jeder hält seinen Stab so mit den beiden Händen, dass dieser je im ersten Drittel von den Enden her, unten vom Daumen, oben von den übrigen Fingern umschlossen ist, und die Theilung nach oben kommt. Ist nur der halbe Lachterstab bis auf Linien getheilt, so richte man ihn so, dass seine fein getheilte Hälfte gegen das Ende der zu messenden Linie liegt. Den Stab Nr. I legt der Markscheider so über die gespannte Schnur, dass sein Beschläge die Mitte des Stengels der ersten Schraube (A) berührt, und dass das Gewicht der Schnur auf dem Daumen noch fühlbar ist. Auf den Ruf „gut" schiebt der Gehilfe vorsichtig seinen Stab Nr. II an den des Markscheiders, bis ein leiser Klang gehört und das Schnurgewicht auf den Daumen gefühlt wird. Wenn dieses der Gehilfe durch das Wort „gut" angezeigt hat, setzt der Markscheider seinen Stab ab, zählt laut „eins" und fügt ihn wieder an Nr. II an. Hierauf nimmt der Gehilfe, die Zahl „zwei" aussprechend, seinen Stab weg, legt ihn an Nr. I, worauf der Markscheider seine Lachter mit dem Rufe „drei" und dann wieder der Gehilfe seinen Stab mit dem Rufe „vier" abschiebt. In dieser Weise wird mit der Messung bis an's Ende der Linie fortgefahren und dabei darauf gesehen, dass der Markscheider fortwährend die ungeraden, der Gehilfe aber die geraden Lachterlängen auszusprechen hat, weil darin eine gewisse Sicherung gegen irriges Abzählen liegt.

Das Ende der Schnur wird in der Regel von der zweiten Schraube (B) aus rückwärts gemessen, da es häufig nicht möglich ist, den letzten Stab über das Ende hinausragen zu lassen, und da, wenn dieses auch möglich wäre, die Ablesung über der Schraube nicht so sicher ist, als am Ende (c) des vorletzten Lachterstabes, welcher in Fig. 449 mit Nr. II bezeichnet ist.

Fig. 449.

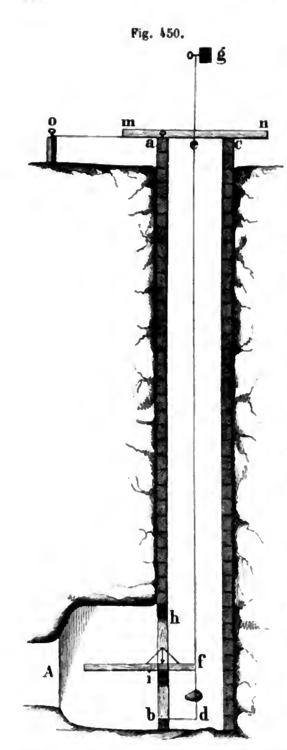


Der Stab Nr. I wird wie auf dem Anfangspunkte A über die Mitte der Schraube B gelegt und neben den ersten gehalten, so dass die Länge Bc leicht abzunehmen ist. Während der Markscheider diese Länge bestimmt und in sein Notiz- oder Zugbuch einschreibt, hält der Gehilfe beide Stäbe, und der Controle wegen lesen beide Messende die Länge Bc laut ab.

375. Aufgabe. Eine lothrechte oder seigere Linie abzustecken und auszumessen.

Ist die Linie nicht über 25 Lachter lang, so bedient man sich der Messschnur, ausserdem aber eines Treibseils zur Absteckung. Da jede solche Linie in einen seigeren Schacht hinabführt, so wollen wir sofort annehmen, es sey die Tiefe eines solchen Schachtes auszumessen.

Fig. 450.

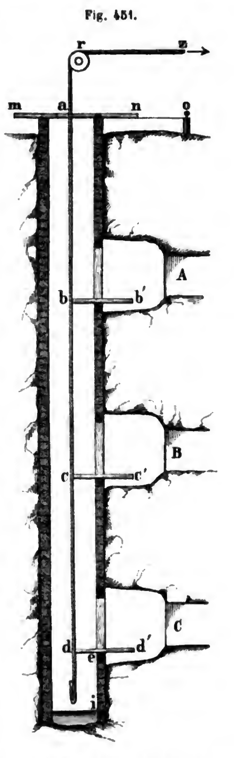


1. Die Tiefe betrage nicht über 25 Lachter. Fig. 450. Stellt bc den seiner Tiefe nach auszumessenden Schacht vor, so handelt es sich darum, den lothrechten Abstand de zwischen der auf der Sohle liegenden Grundschwelle b und der durch eine Latte mn vorgestellten Oberfläche des Tagkranzes ac zu finden. Man bringe desshalb in einem Balken (g) des Schachthauses eine Verziehschraube an, befestige an ihr die unten mit einem Steine beschwerte Messschnur und errichte in dem Schachtfenster bh in passender Höhe eine Spreize i, welche gestattet, eine Latte if mittels einer Setzwage horizontal zu legen. Ist der Senkel zur Ruhe gekommen, so bemerke man an der Schnur die Stellen e und f durch Bindfaden und messe mit dem Lachterstab die Höhe bi. Hierauf zieht man den Senkel nach und nach aus der Grube und misst die Länge ef auf ähnliche Weise wie die Schnurlänge einer geneigten Linie. Nachdem nämlich die Schnur so weit gehoben ist, dass der Punkt e etwa einen Fuss über dem Boden steht, legt der Markscheider den Lachterstab Nr. I an die Schnur, worauf diese wieder gehoben wird. Ist das untere Ende des ersten Stabs einen Fuss über ac gekommen, so legt der Messgehilfe den Stab Nr. II an, der Markscheider setzt ab, zählt „eins“ und legt wieder an. Dasselbe thut dann der Gehilfe, „zwei“ zählend. Hierauf nimmt der Markscheider die dritte, der Gehilfe die vierte Lachter ab, und so fahren beide fort, bis das untere Zeichen f des Senkels eingemessen ist. Es versteht sich von selbst, dass bei dieser Messung der Stein fortwährend an der Schnur bleibt, damit sich deren Länge so wenig als möglich ändert. Nach der Figur ist die Tiefe des Schachts $de = ef + df$.

2. Die Tiefe des Schachts betrage mehr als 25 Lachter. Fig. 451. Das Verfahren zur Messung der Tiefe ist dem vorigen gleich, nur der Senkel ist ein anderer. Das Treibseil, welches jetzt an die Stelle der Schnur tritt, und welches wie diese schon längere Zeit hindurch gebraucht seyn soll, liegt auf einer Rolle (r) und wird von irgend einer Hebmaschine in der Richtung rz gehalten. Vermöge seines grossen Gewichts nimmt es von

selbst eine lothrechte Richtung an; es bedarf also keiner Beschwerung. Hat man durch horizontal gelegte Latten und Bindfaden die Stellen bezeichnet, deren Entfernungen gemessen werden sollen, so lässt man das Seil langsam über die Rolle treiben und misst dabei die gesuchten Längen wie vorhin mit Lachterstäben. Kommt das erste Seilzeichen (b) an, so wird mit dem Auftreiben des Seils so lange inne gehalten, bis die Länge des ersten Laufes in das Zugbuch eingetragen ist; dasselbe geschieht bei jedem folgenden Laufe. Da die Seilzeichen leicht so beschmutzt werden können, dass man sie übersieht, so bindet man gewöhnlich noch ein Stückchen Holz mit an, welches die Nummer des Laufs enthält, dessen Seigertiefe gesucht wird.

Fig. 451.

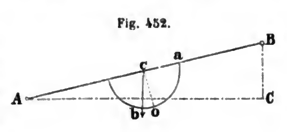


§. 376. Aufgabe. Den Höhen- oder Tonnlagewinkel einer geneigten Linie zu bestimmen.

Dieser Winkel kann nach Umständen mit dem Gradbogen, dem Setzniveau oder dem Grubentheodolithen gemessen werden.

1. Messung des Winkels mit dem Gradbogen. Fig. 452. Ist die Linie durch eine Schnur bezeichnet, so lässt sich nur der Gradbogen (§. 202, Fig. 229) zur Messung ihres Neigungswinkels anwenden. Dieser Bogen soll immer in der Mitte der Schnur und nicht, wie manche Markscheider zu thun pflegen, unterhalb derselben aufgehängt werden. Je steiler der Zug, desto kürzer soll er seyn. Hat man den Winkel auf der einen Seite der Schnur abgenommen und gestattet es der Raum, den Bogen umzuhängen, so nimmt man den Winkel ocb = BAC zum zweiten Male auf. Differiren beide Aufnahmen, so sieht man das arithmetische Mittel der Ablesungen als den richtigen Tonnlagewinkel an. Behufs des Ablesens hält der Messgehilfe das Grubenlicht hinter den Gradbogen, damit der Schatten des Senkelhaares nicht mit diesem selbst verwechselt werde. Durch geeignetes Entgegenhalten des Zugbuchs kann der Markscheider das Licht an die Stelle leiten, wo die Ablesung stattfindet. In

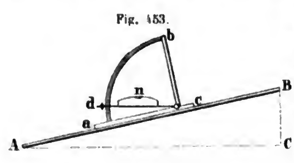
Fig. 452.



vielen Fällen ist es nöthig, erst den in den Stollen oder Strecken herrschenden Zug zu hemmen, um den Senkel zur Ruhe zu bringen. Da das Haar des Senkels leicht reisst, soll der Markscheider immer eines im Vorrath haben und bei dem Aus- und Einpacken, sowie bei dem Aufhängen des Gradbogens sehr vorsichtig verfahren.

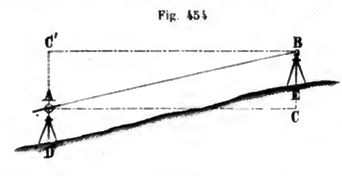
2. Messung des Winkels mit dem Setzniveau. Fig. 453. Stellt AB eine feste unbiegsame Latte vor und wird auf derselben ein eingetheilter Quadrant abc, der auf einem messingenen Lineale ac ruht, vertikal und so aufgestellt, dass die Linie ca, welche durch den Nullpunkt der Theilung geht, mit der tonnlägigen Linie AB parallel läuft, so gibt die durch die Libelle n horizontal gestellte Alhidade cd mittels des bei d befindlichen Nonius den Tonnlagewinkel BAC = acd bis auf einzelne Minuten an, während dieser Winkel mit dem Gradbogen höchstens auf 3 Minuten genau erhalten werden kann. Ueber die nähere Einrichtung des durch abcd angedeuteten Setzniveau's sehe man §. 209.

Fig. 453.



3. Messung des Winkels mit dem Grubentheodolithen. Fig. 454. In diesem Falle ist die geneigte Linie AB am ersten Endpunkte (A) durch die Drehaxe des Fernrohrs und am zweiten (B) durch die Mitte des leuchtenden oder beleuchteten Signals (§. 144, S. 217 und 218) vorgestellt. Hat man in dem Punkte A den Höhenwinkel BAC gemessen, so kann man auch noch den Tiefenwinkel ABC′ bestimmen, indem man die Stative D, E stehen lässt, das Signal von B mit dem Theodolithen in A vertauscht und von B nach A zurückvisirt. Die Höhen- und Tiefenwinkel sollen genau gleich seyn, da, nach der in §. 144 beschriebenen Einrichtung der Leuchtsignale für Gruben, die Visirlinie BA mit AB zusammenfällt. Findet eine Abweichung zwischen beiden Ergebnissen der Messung statt und hat man sich überzeugt, dass diese nicht von den ungleichen Höhen des Instruments und des Signals herrührt, so kann man das arithmetische Mittel als den richtigen Vertikalwinkel ansehen.

Fig. 454.

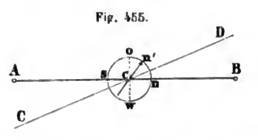


§. 377. Aufgabe. Den Streichwinkel einer wagrechten oder geneigten (söhligen oder tonnlägigen) Linie zu bestimmen.

Würde die gegebene Linie AB (Fig. 455), deren Streichwinkel gefunden werden soll, eine andere Gerade CD schneiden, deren Neigung gegen die Mittagslinie bekannt wäre, und gestattete der Raum das Aufstellen eines

Theodolithen und der ihm entsprechenden Signale, so erhielte man den Streichwinkel der Geraden AB ohne Zweifel am genauesten, indem man den Horizontalwinkel der Linien AB und CD zu dem Azimuthe der letzteren addirte oder von ihm subtrahirte, je nach der Lage der Linien.

Fig. 455.



Sind aber diese Bedingungen nicht gegeben und hat man sich vorher überzeugt, dass sich in der Nähe keine Eisenstücke (z. B. Geräthe, Eisenschienen etc.) oder Gebirgsarten (z. B. Eisensteine, Kobalt, Nickel, Basalt, Serpentin, Grünstein etc.) befinden, welche auf die Nadel störend einwirken: so hängt man den in den §§. 128 bis 130 dargestellten Hängecompass auf die aus Fig. 138 näher ersichtliche Weise an der gespannten Verziehschnur AB (Fig. 455) und zwar gewöhnlich ausserhalb der Mitte so auf, dass der mit Stunde 0 = Stunde 24, oder auch mit 360° bezeichnete Nordpunkt des Compassringes in der Richtung von A nach B liegt.

Sobald der Hängecompass ruhig steht, stellt sich der Markscheider vor den Nordpol der Nadel um abzulesen, wobei der Gehilfe so leuchtet, [1] dass weder der Reflex des Glasdeckels noch der Schatten der Nadel dieses Geschäft stören. Hierauf macht man auch am Südpole eine Ablesung und nimmt aus den zwei Resultaten das arithmetische Mittel als den gesuchten Streichwinkel. Ehe man jedoch dieses Mittel in das Zugbuch einträgt, bringt man die Nadel erst noch einmal zum Schwingen und sieht zu, ob ihre Enden sich wieder wie vorhin stellen oder nicht. Sollten merkliche Abweichungen stattfinden, welche nur magnetischen Störungen zugeschrieben werden können, so muss man vorläufig auf die Abnahme des Stundenwinkels verzichten und dieselbe zu einer mehr geeigneten Zeit (vor 10 Uhr Morgens und nach 2 Uhr Nachmittags) vornehmen.

Ist der Gradring nicht von 0° bis 360° oder von Stunde 0 bis Stunde 24, sondern in zweimal 180° oder zweimal 12 Stunden getheilt, so ist nach §. 128, S. 177 die östliche oder westliche Richtung des Streichens mit zu bemerken.

Der Streichwinkel, welchen man durch das eben beschriebene Verfahren erhält (der beobachtete oder observirte Streichwinkel), ist auf die Magnetlinie bezogen; will man ihn auf die Mittagslinie beziehen, so muss er um die Abweichung der Magnetnadel vergrössert oder verkleinert werden, und in dieser Gestalt heisst er der verbesserte oder reducirte Streichwinkel.

Bezeichnet δ die Abweichung der Magnetnadel, und ist ω der auf einem von rechts nach links (widersinnig) in 360° oder 24 Stunden getheilten Compass beobachtete Streichwinkel, so ist der verbesserte Streichwinkel: bei der östlichen Abweichung der Magnetnadel gleich

[1] Dass die Grubenlampe nicht von Eisen, sondern nur aus Kupfer oder Messing seyn darf, versteht sich von selbst.

$$\omega' = \omega + \delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (441)$$

und bei der westlichen Abweichung gleich

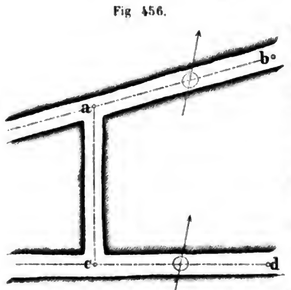
$$\omega'' = \omega - \delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (442)$$

Wäre der Compass, wie die Kreise der Theodolithen, von links nach rechts (rechtssinnig) beziffert, so würde $\omega' = \omega - \delta$ und $\omega'' = \omega + \delta$ seyn. Da in diesem Jahrhundert die Declination der Magnetnadel westlich bleibt, so hat man bei widersinnigen Gradringen fortwährend nur die letztere Formel anzuwenden.

Wo die Abweichung der Magnetnadel unbekannt ist, kann man dieselbe dadurch bestimmen, dass man sich nach §. 332 eine Mittagslinie zieht, über diese die Bussole stellt, nach einem in der Mittagslinie stehenden Signale visirt und am Nordende der Nadel abliest. Diese Ablesung, mehrmals wiederholt und durch die Ablesung am Südende verbessert, gibt die gesuchte Abweichung der Magnetnadel, welche die Bergleute auch das Streichen der Mittagslinie nennen. Dieses ist selbstverständlich östlich, wenn die Abweichung der Nadel westlich ist, und umgekehrt.

§. 378. Aufgabe. Den Neigungswinkel zweier gerader Linien zu bestimmen. (Fig. 456).

Fig. 456.



Schneiden sich die Geraden ab, cd und lässt sich im Schnittpunkte ein Theodolith aufstellen, so misst man den gesuchten Winkel mit diesem Instrumente am genauesten. Dasselbe ist auch der Fall, wenn die beiden Geraden ab, cd sich selbst nicht schneiden, aber von einer dritten Geraden ac so geschnitten werden, dass sich in den Schnittpunkten a, c der Theodolith aufstellen lässt. In diesem Falle misst man den Winkel bac $= \alpha$, acd $= \gamma$ und berechnet daraus den Neigungswinkel $\beta = \alpha + \gamma - 180^0$.

Besitzt man keinen Theodolithen oder ist er nicht anwendbar, so bestimmt man das Streichen beider Linien mit dem Hängecompass und berechnet daraus den Neigungswinkel β. Ist der Streichwinkel der Linie cd, welche als der rechte Schenkel angesehen werden soll, $= \alpha'$ und der der Linie ab, welche somit der linke Schenkel ist, $= \alpha''$, so erhält man

$$\beta = \alpha' - \alpha'', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (443)$$

so lange beide Linien (ab, cd) zugleich auf der östlichen oder westlichen Seite der Nadel liegen; liegt aber der rechte Schenkel östlich und der linke westlich, so wird, wie man sich leicht überzeugt,

$$\beta = 360^0 + \alpha' - \alpha''; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (444)$$

dagegen erhält man β wieder aus der Gleichung (443), wenn der rechte

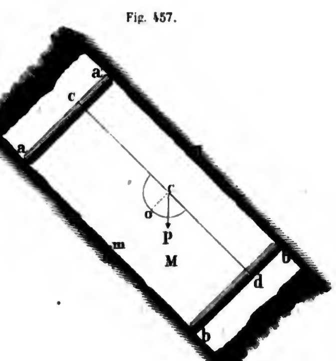
Schenkel östlich und der linke westlich liegt, und wenn, wie bisher, die Ablesungen α' und α'' auf einem widersinnig und von 0^0 bis 360^0 oder von 0^h bis 24^h bezifferten Gradringe gemacht werden.

§. 379. Aufgabe. Das Streichen und Fallen von Lagerstätten unter verschiedenen Bedingungen zu bestimmen.

Würden die Lagerstätten auf eine grosse Ausdehnung in der Grube entblösst seyn, wie es mit geschichteten Steinen über Tage oft der Fall ist, so wäre die Bestimmung des Streichens und Fallens eine leichte Arbeit: man würde mittels einer Latte und einer Setzwage auf der Lagerstätte eine horizontale Linie abstecken, längs dieser Linie eine Schnur spannen, den Compass aufhängen, das Streichen gegen die Magnetlinie ablesen und dieses beobachtete Streichen mittels der bekannten Declination der Magnetnadel auf die Mittagslinie reduciren; hierauf zöge man zu der horizontalen Streichlinie eine in der Lagerstattebene liegende Senkrechte, spannte in deren Richtung über die Ebene eine Schnur, hienge daran den Gradbogen und bekäme hierdurch den gesuchten Fallwinkel oder das Verflächen der Lagerstätte.

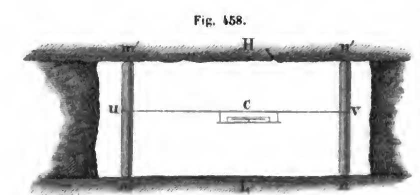
Allein die Natur der Lagerstätten und die Art ihres Abbaues gewähren keine so grossen Entblössungen, wie sie hier vorausgesetzt werden: der Markscheider muss sich vielmehr mit sehr kleinen Theilen der Lagerstätten begnügen, um aus den auf ihnen erhobenen Daten auf das allgemeine Streichen und Fallen jener Stätten zu schliessen. Hierauf beziehen sich die folgenden Anweisungen:

Fig. 457.



1) Stellt in Fig. 457 H das Hangende und L das Liegende eines Steinkohlenflötzes vor und ist dieses einige Lachter weit entblösst, so suche man vor allen Dingen mit einer etwa 2 Lachter langen Latte und einer Setzwage auf dem Liegenden eine horizontale Linie und errichte darauf mit einem Winkelmasse eine Senkrechte ab. Denken wir uns den Schnitt des Flötzes nach dieser Senkrechten genommen, so stelle man auf derselben zwei Stämpel aa', bb' senkrecht gegen ab auf, mache ac = bd oder a'c = b'd und spanne die Schnur cd, so wird diese mit ab in einer Ebene liegen und dem Dache (H) und der Sohle (L) des Flötzes parallel seyn. Wird an die Schnur cd der Gradbogen gehängt und der Winkel ocp abgelesen, den der Pendelfaden anzeigt, so hat man damit das Fallen des

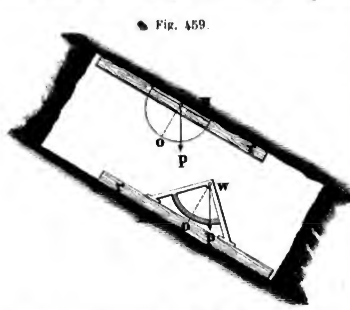
Fig. 458.



Flötzes in der Strecke M gefunden. Errichtet man ebenso an den Endpunkten der horizontalen Geraden mn (Fig. 458) zwei Stämpel mm', nn' entweder senkrecht auf das Liegende und Hangende oder lothrecht, macht mu = nv oder m'u = n'v, zieht die Schnur uv und hängt an derselben den Compass C auf, so findet man das Streichen des Flötzes in dieser Strecke.

2) Sollte es wegen zu beschränkten Raumes nicht möglich seyn, erst eine Horizontallinie des Hangenden oder Liegenden und darauf die Verflächungslinie herzustellen, so sucht man letztere, wenn das Hangende entblösst ist, dadurch, dass man (wie in Fig. 459 angedeutet) auf einer parallelepipedischen Latte r einen Gradbogen so befestigt, dass der durch den Nullpunkt gehende Halbmesser senkrecht zur Axe der Latte steht, und diese Latte so lange an dem Hangenden hin und her bewegt, bis der Neigungswinkel, den das Loth anzeigt, seinen grössten Werth erlangt hat: in diesem Falle gibt die Latte die Richtung der Linie des stärksten Falles an und folglich der Gradbogen die Verflächung des Flötzes. Wäre nur das Liegende entblösst, so würde man auf die Latte r statt eines Gradbogens eine Bergwage w (§. 201) aufsetzen, um so den grössten Neigungswinkel und damit die Verflächung des Liegenden zu erfahren. In manchen Fällen genügt es auch, das Liegende mit Staub oder Bohrmehl zu bestreuen und eine Kugel darüber rollen zu lassen: ihre Bahn bezeichnet die Linie des grössten Falles und es braucht dann nur noch deren Neigung gemessen zu werden.

Fig. 459.



3) Ist das Fallen einer Lagerstätte bestimmt und lässt sich parallel mit der Linie des grössten Falles eine Schnur spannen, so kann deren Streichen mittels des Hängecompasses bestimmt werden. Ist aber dieses sogenannte Kreuzstreichen bekannt, so erhält man das Hauptstreichen, indem man jenes um 90^0 vermehrt, so dass also

$$\sigma = 90^0 + \sigma', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (445)$$

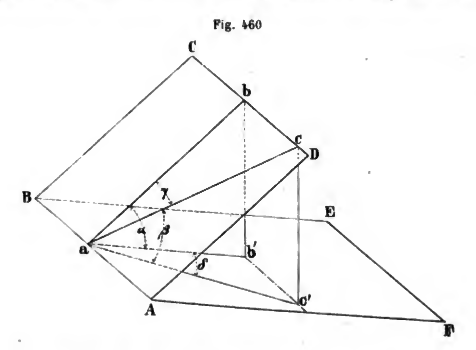
wenn σ das Haupt- und σ' das Kreuzstreichen vorstellt. Ueberschreitet die Summe $90^0 + \sigma'$ die Grösse eines ganzen Kreises (2π), so sind selbst-

verständlich 360^0 von $90^0 + \sigma'$ oder 270^0 von σ' abzuziehen, um σ zu erhalten. Wäre z. B. $\sigma' = 316^0\ 50'$, so erhielte man, da $316^0\ 50'$ schon im vierten Quadranten liegen, also $90^0 + \sigma' > 360^0$ ist, $\sigma = 90^0 + \sigma' - 360^0 = \sigma' - 270^0 = 46^0\ 50'$.

Dass die Gleichung $\sigma = 90^0 + \sigma'$ richtig ist, wird sich der Leser leicht klar machen, wenn er bedenkt, dass die Horizontalprojectionen der Fall- und Streichungslinie auf einander senkrecht stehen, und dass das Kreuzstreichen das Streichen der Projection der Falllinie ist.

4) Kann man bloss das Streichen einer Lagerstätte und den Neigungswinkel derselben nach einer gegebenen Richtung, welche aber nicht die des grössten Falles ist, unmittelbar bestimmen: so lässt sich aus diesen Daten die Verflächung der Lagerstätte berechnen. Denn stellt in Fig. 460 AC die Lagerstattebene, BF die Horizontalebene und AB den horizontalen Schnitt beider vor; zieht man ferner in AC die Linie ab und in BF die ab' senkrecht zu AB und bb' senkrecht auf ab', so dass abb' ein rechtwinkeliges Dreieck und $\mathrm{ba b'} = \alpha$ der Fallwinkel der Lagerstattebene wird;

Fig. 460



projicirt man endlich die Linie ac horizontal = ac', vertikal = cc' und in der Ebene AC = ab und setzt den Neigungswinkel $\mathrm{cac'} = \beta$, $\mathrm{cab} = \gamma$, $\mathrm{c'ab'} = \delta$: so finden zwischen den Winkeln α, β, γ, δ folgende leicht zu beweisende Beziehungen statt:

$$\sin\beta = \sin\alpha \,.\, \cos\gamma, \qquad (446)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \cos\delta. \qquad (447)$$

Ist nun der Neigungswinkel β der Linie ac und der Winkel δ der Fallebene abb' gegen die projicirende Ebene acc' der Linie ac bekannt, so findet man den Fallwinkel α aus der Gleichung (447). Nun wurde aber β direct gemessen und δ ergibt sich aus den beobachteten Streichen der Horizontalen AB und der Linie ac; denn ist σ das Streichen der söhligen Linie AB, so ist das Kreuzstreichen σ' der Falllinie ab oder ihrer Projection

ab' nach Gleichung (445) $= \sigma - 90^0$, und wenn man dieses von dem beobachteten Streichen σ'' der Linie ac oder ihrer Projection ac' abzieht, so findet man

$$\delta = 90^0 + \sigma'' - \sigma. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (448)$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (447) und berücksichtigt, dass

$$\cos (90^0 + \sigma'' - \sigma) = \sin (\sigma - \sigma''),$$

so erhält man den gesuchten Fallwinkel α aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin (\sigma - \sigma'')}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (449)$$

in welcher nur die direct gemessenen Grössen σ, σ'', β vorkommen.

C. Von den Markscheidezügen.

§. 380. Gleichwie der Geometer die Vermessung eines Flurbezirks an ein vorher aufgenommenes Polygon anknüpft, also schliesst auch der Markscheider die Detailaufnahme eines grösseren Grubengebäudes an eine Reihe unter sich verbundener gerader Linien oder an ein Polygon an, das er nach Erforderniss entweder auf der Erdoberfläche oder durch unterirdische Räume zieht. Ein solches Polygon nennt er einen Markscheidezug; liegt es unter der Erdoberfläche, so heisst der Zug ein Grubenzug, ausserdem aber ein Tagezug. In den meisten Fällen wird der Grubenzug mit dem Tagezug so in Verbindung gebracht, dass man die gegenseitige Lage der über und unter Tage liegenden aufgenommenen Punkte bestimmen kann.

Aeltere Markscheider verrichten auch die Tagezüge mit Schnur und Compass; dieses Verfahren kann jedoch wegen seiner Ungenauigkeit und Umständlichkeit nicht gebilligt werden. Indem wir voraussetzen, dass man die Horizontalprojection eines Tagezugs mit dem Messtische oder Theodolithen und die Vertikalprojection desselben mit dem Nivellirinstrument nach Anleitung der Abschnitte I und II aufzunehmen wisse, nehmen wir hier von den Tagezügen Nichts weiter als ihre Verbindung mit den Grubenzügen auf. Letztere allein beschäftigen uns, und in der Regel unter der Voraussetzung so enger Grubenräume, dass die Anwendung von Schnur und Compass gerechtfertigt erscheint.

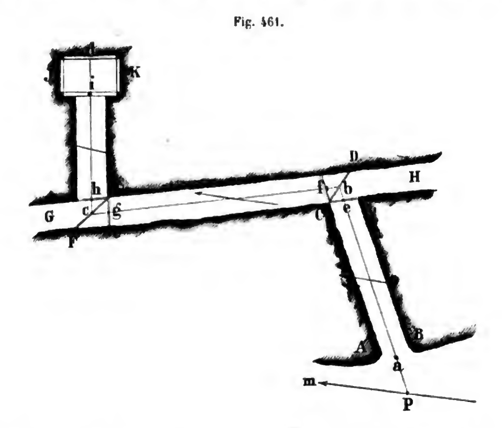
§. 381. Aufgabe. Einen Markscheidezug in Strecken von geringer Neigung vorzunehmen und zu berechnen.

Aus denselben Gründen, warum es für die Aufnahme eines Flurbezirks nothwendig ist, dass sich der Geometer erst eine Kenntniss des aufzunehmenden Terrains verschaffe und dieses in einer Handzeichnung darstelle, muss sich auch der Markscheider vor der Ausführung eines Markscheidezugs über alle Verhältnisse der Grube unterrichten und eine vorläufige Zeichnung der letzteren entwerfen. Auf dieser Zeichnung hat er zugleich Alles zu bemerken, was zur Aufnahme gehört, wie z. B. an welcher Stelle ein Gestein, eine Mauerung oder Zimmerung anfängt und aufhört, wo sich eine Gesteinscheide, eine wasserführende Kluft befindet, wo Querschläge,

Flügelörter, Gesenke etc. von der Strecke abgehen u. s. w. Damit er aber namentlich die geognostischen Verhältnisse einer Strecke richtig erkennen kann, ist es nöthig, dass diese vor dem Beginne der Aufnahme frisch „bestuft“ oder entblösst werde. Die vorliegende Aufgabe kann unter zwei Voraussetzungen gelöst werden; es sind nämlich die Räumlichkeiten entweder so beschränkt, dass nur Compass und Gradbogen anwendbar sind, oder sie sind so gross, dass man Theodolith und Nivellirinstrument gebrauchen kann.

1. Lösung der Aufgabe mit Compass und Gradbogen. Stellt die Fig. 461 den Grundriss der aufzunehmenden Strecken vor, die wir uns der Einfachheit halber sehr kurz denken, so wird man zunächst vor dem Stollenmundloche AB einen Pfahl p in den Boden schlagen und auf ihm und der Spreize

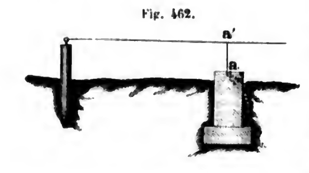
Fig. 461.



CD eine Schnur ab so ziehen, dass sie (wie in Fig. 462) über den Fixstein a in einer Höhe von 3 bis 4 Fuss weggeht. Ferner wird man, um die Neigung der Sohle des Stollens zu erhalten, auf der Grundschwelle CL einen Sohlnagel e lothrecht unter der Schnur ab befestigen. Weiter zieht man alsdann die Schnur bc mittels der auf den Spreizen CD und EF befestigten Schrauben und schlägt in der Vertikalebene dieser Schnur die Nägel f und g in zwei Sohlschwellen der Strecke GH ein. Endlich zieht man die Schnur cd, wobei d eine in der Zimmerung des Schachtes IK befestigte Schraube vorstellt, und h und i wieder Sohlnägel sind.

Ist die Messung in dieser Weise vorbereitet, so misst man bei a (nach Fig. 462) die Seigerhöhe aa' von a bis zur Schnur und die horizontalen und senkrechten Abstände der Seitenwände A, B von der Schnur ab. Die

Fig. 462.



Linie aa' erscheint als die Schnur Nr. 1 mit einem Tonnlagewinkel von 90° und einem Streichen = 0. Die Schnur Nr. 2 umfasst die Länge ae: auf dieser wird der Tonnlage- und Streichwinkel nebst ihrer Länge gemessen. An dem Punkte e, dessen Höhe die Schnur Nr. 3 vorstellt, wird wie bei a verfahren. Die vierte Schnur besteht aus der Linie eb; von dieser ist das Streichen und die Neigung schon aus der Schnur Nr. 2 bekannt; es bleibt also nur noch die Länge eb zu messen. In ähnlicher Weise verfährt man längs der Geraden bc und cd. Die Messungsresultate werden in das sogenannte Zugbuch (d. i. ein in Leder gebundenes Notitzbuch von der Grösse eines Achtelbogens Schreibpapier) nach einem bestimmten Formulare, z. B. dem folgenden (A) eingeschrieben und zu Hause weiter verarbeitet.

Tabelle A.

Schnur.	Tonnlagewinkel.		Steigen: + Fallen: −	Schnurmass.	Streichwinkel.		Anmerkungen.
Nr.	Grad.	Min.		Lachter	Grad.	Min.	
1	90	0	+	0,472	—	—	Vom Fixstein a bis zur Schnur ab; Aa = 0,32; aB = 0,28 Lachter.
2	2	30	+	7,218	65	10	
3	90	0	—	0,367	—	—	Vom Sohlnagel e bis zur Schnur ab; Ce = 0,27; eL = 0,33 Lachter.
4	2	30	+	0,741	65	10	
5	3	55	—	0,812	335	30	
6	90	0	—	0,278	—	—	Vom Sohlnagel f bis zur Schnur bc; Ef = 2,15 Lachter.
7	3	55	—	6,410	335	30	
8	90	0	—	0,325	—	—	Vom Sohlnagel g bis zur Schnur bc; Eg = 0,30 Lachter.
9	3	55	+	1,015	335	30	
10	4	25	+	0,874	82	45	
11	90	0	—	0,288	—	—	Vom Sohlnagel h bis zur Schnur cd; Eh = 0,28 Lachter.
12	4	25	+	3,421	82	45	
13	90	0	—	0 327	—	—	Bis zur vordern Grundschwelle des Schachtes IK.
14	4	25	+	1,250	82	45	
15	90	0	—	0,320	—	—	Bis zur hintern Grundschwelle desselben Schachtes.
							Mit dem Compass Nr. 2, dessen Abweichung 15° 20' betrug, aufgenommen am ... durch N. N.

Nachdem alle Messungen gemacht sind, werden deren Ergebnisse nebst den daraus berechneten Grössen mit Tinte in das Schinbuch (welches die Grösse eines ganzen Bogens Schreibpapier hat) nach dem Formulare B (S. 674) eingetragen. Zu berechnen sind alle jenen Stücke des Zugs, welche zur

Darstellung des Grubengebäudes nöthig sind, aber sich nicht unmittelbar aus dem Zugbuche ergeben. Hieher gehören: die Reduction der Schnurlängen auf den Horizont (Berechnung der Ebensohlen), das Berechnen der absoluten Steigungen und Gefälle (Seigerhöhen), das Reduciren des beobachteten Streichens, die Berechnung der Coordinaten aller Zugpunkte in Bezug auf die Mittagslinie. Bezeichnet:

l die Länge der flachen Schnur,
τ deren Neigungs- oder Tonnlagewinkel,
σ den reducirten Streichwinkel der Schnur,
s die Horizontalprojection oder Ebensohle der Schnur l,
z die Vertikalprojection oder Seigerhöhe derselben,
x die Projection der Ebensohle auf die Mittagslinie (Breite, Streichungscosinus der Linie l);
y die Projection der Ebensohle auf das Perpendikel zur Mittagslinie (Länge, Streichungssinus der Linie l):

so gelten folgende von selbst verständliche Beziehungen:

$$s = l \cos \tau \quad \ldots \ldots \ldots \quad (450)$$

$$z = \pm\, l \sin \tau \quad \ldots \ldots \ldots \quad (451)$$

$$x = s \cos \sigma \quad \ldots \ldots \ldots \quad (452)$$

$$y = s \sin \sigma. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (453)$$

Da der Winkel σ von 0^0 bis 360^0 gezählt wird, so ergeben sich die Zeichen von x und y aus der Grösse dieses Winkels.

Vorstehende Ausdrücke beziehen sich immer nur auf eine einzige Schnur; will man aber die gegenseitige Lage aller Punkte besser übersehen, so legt man durch den Anfangspunkt der Messung drei rechtwinkelige Coordinatenaxen, welche beziehlich horizontal und vertikal sind und wobei die Axe der x durch die Mittagslinie des Anfangspunktes, die der y durch das Perpendikel zur Mittagslinie in demselben, und die der z durch das Loth auf die Ebene xy in jenem Punkte vorgestellt wird.

Demnach wird für irgend einen (den n^{ten}) Punkt:

$$X = s_1 \cos \sigma_1 + s_2 \cos \sigma_2 + s_3 \cos \sigma_3 + \ldots + s_n \cos \sigma_n \quad . \quad (454)$$

$$Y = s_1 \sin \sigma_1 + s_2 \sin \sigma_2 + s_3 \sin \sigma_3 + \ldots + s_n \sin \sigma_n \quad . \quad (455)$$

$$Z = l_1 \sin \tau_1 + l_2 \sin \tau_2 + l_3 \sin \tau_3 + \ldots + l_n \sin \tau_n. \quad . \quad (456)$$

Denkt man sich unter n den letzten Punkt des Markscheidezugs, so stellt X dessen Hauptbreite oder den Hauptstreichungscosinus, Y die Hauptlänge oder den Hauptstreichungssinus und Z die Haupthöhe oder den Hauptsummenrest der Seigerhöhen, d. i. das Gesammtgefälle oder die Gesammtsteigung zwischen Anfangs- und Endpunkt vor, während der aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \Sigma = \frac{Y}{X} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (457)$$

berechnete Winkel Σ den Hauptstreichungswinkel des ganzen Zugs bezeichnet.

Nach diesen Erklärungen wird die folgende auf Fig. 461 sich beziehende Tab. B durch specielle Berechnung einiger Nummern hinreichend erläutert seyn.

Tabelle B.

Schnur.	Schnurmass.	Steigen + Fallen −	Tonnlagewinkel.		Streichwinkel.		Seigerhöhe.	Ebensohle.	Breite X.	Länge Y.	Höhe Z.	Bemerkungen
Nr.	Lachter.	+	Grad.	Min.	Grad.	Min.	Lachter	Lachter.	Lachter.	Lachter.	Lachter.	
1	0,472	+	90	—	—	—	+ 0,472	0	0	0	0,472	Anfangspunkt am Stollenmundloche.
2	7,218	+	2	30	65	10	+ 0,337	7,212	2,952	6,544	0,809	
3	0,367	—	90	—	—	—	— 0,367	0	2,952	6,544	(0,442)	Fusspkt der Schnur Nr. 3.
4	0,741	+	2	30	65	10	+ 0,032	0,740	3,255	7,216	0,841	
5	0,812	—	3	55	335	30	— 0,055	0,810	3,992	6,880	0,786	
6	0,278	—	90	—	—	—	— 0,278	0	3,992	6,880	(0,508)	Fusspkt der Schnur Nr. 6.
7	6,410	—	3	55	335	30	— 0,438	5,833	9,300	4,461	0,348	
8	0,325	—	90	—	—	—	— 0,325	0	9,300	4,461	(0,023)	Fusspkt der Schnur Nr. 8.
9	1,015	+	3	55	335	30	+ 0,068	1,014	10,210	4,046	0,416	
10	0,874	+	4	25	82	45	+ 0,067	0,871	10,320	4,910	0,483	
11	0,288	—	90	—	—	—	— 0,288	0	10,320	4,910	(0,195)	Fusspkt der Schnur Nr. 10.
12	3,421	+	4	25	82	45	+ 0,263	3,411	10,750	8,294	0,746	
13	0,327	—	90	—	—	—	— 0,327	0	10,750	8,294	(0,419)	Fusspkt der Schnur Nr. 13.
14	1,250	+	4	25	82	45	+ 0,096	1,246	10,907	9,530	0,842	
15	0,320	—	90	—	—	—	— 0,320	0	10,907	9,530	(0,522)	Endpunkt an der hinteren Grundschwelle des Josephschachts; zugleich Fusspunkt der Schnur Nr. 15.

Nr. 1. Der Ursprung der Coordinaten liegt im Anfangspunkte a der ersten Schnur, welche lothrecht genommen wurde und daher weder Ebensohle noch Streichen, weder Länge noch Breite hat.

Nr. 2. Die Seigerhöhe ist $= 7{,}218 \sin 2^0\,30' = 0{,}337$; die Ebensohle $= 7{,}218 \cos 2^0\,30' = 7{,}212$; die Breite $X = 7{,}212 \cos 65^0\,10' = 2{,}952$; die Länge $Y = 7{,}212 \sin 65^0\,10' = 6{,}544$; die Höhe $Z = 0{,}472 + 0{,}337 = 0{,}809$.

Nr. 3. Eine Lothlinie hat kein Streichen und keine Ebensohle; es gilt folglich für ihren Fusspunkt die Länge und Breite ihres Kopfes; die Höhe Z aber ist, da der Zug abwärts geht, gleich $= 0{,}809 - 0{,}367 = 0{,}442$.

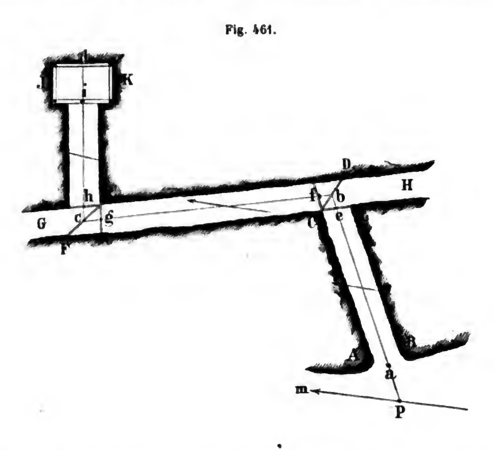
Nr. 4. Die Seigerhöhe über den Endpunkt von Nr. 2 ist $= 0{,}741 \sin 2^0\,30' = 0{,}032$; die Ebensohle $= 0{,}741 \cos 2^0\,30' = 0{,}740$; die Breite $X = 2{,}952 + 0{,}74 \cos 65^0\,10' = 3{,}255$; die Länge $Y = 6{,}544 + 0{,}74 \sin 65^0\,10' = 7{,}216$; die Höhe $Z = 0{,}809 + 0{,}032 = 0{,}841$.

Nr. 5. Die Breite X ist $= 3{,}255 + 0{,}81 \cos 335^0\,30' = 3{,}255 + 0{,}737 = 3{,}992$; die Länge $Y = 7{,}216 + 0{,}81 \sin 335^0\,30' = 7{,}216 - 0{,}336 = 6{,}880$.

Nr. 15. Die Hauptbreite des ganzen Zugs ist $= 10{,}907$; die Hauptlänge $= 9{,}530$; die Haupthöhe $= 0{,}522$; der Hauptstreichwinkel Σ, welcher sich aus der Gleichung $10{,}907 \operatorname{tg} \Sigma = 9{,}530$ ergibt, $= 41^0\,8'$.

2. Lösung der Aufgabe mit dem Theodolithen und Nivellirinstrument. Mit Bezug auf Fig. 461 wird man zuerst den Theodolithen in b aufstellen und nach einander zwei in a und c angebrachte Signale, wovon a ein Tagsignal ist, anvisiren, um den Horizontalwinkel abc zu erhalten. Hat man sonst kein Mittel, das Polygon abci zu orientiren, so misst man mit dem

Fig. 461.



auf dem Grubentheodolithen befestigten Compass auch den Streichwinkel der Linie bc, womit zugleich die Lage des Schenkels ab gegen die Mittagslinie bestimmt ist. Ebenso misst man, nachdem vorher in b und i Grubensignale aufgestellt wurden, in dem Punkte c den Horizontalwinkel bci und nochmals das Streichen der Linie cb. Mit dem Winkel bci ist alsdann auch das Streichen der Linie ci bekannt. Wäre über Tage, etwa in dem Punkte p, die Richtung der Mittagslinie pm gegeben, so dürfte man nur in p den Horizontalwinkel mpb messen, um damit auch die Neigung aller Polygonseiten ab, bc, ci gegen die Mittagslinie zu finden. Die horizontalen Entfernungen ae, ab, bf, bg, bc ... werden mit der Lachterkette oder dem Lachterstabe bestimmt, welche man am zweckmässigsten auf Dachlatten, die in den Richtungen des Zugs liegen, abzieht oder abschiebt. Ist auf die angegebene Weise die Horizontalprojection des Markscheidezugs festgestellt, so nimmt man die Vertikalprojection desselben entweder mittels des früher erwähnten Setzniveau's oder auch mit einem gewöhnlichen Nivellirinstrumente auf. Die Handhabung des Setzniveau's ergibt sich aus §. 209, und was das Nivelliren betrifft, so unterscheidet sich dasselbe vom Nivelliren über Tage gar nicht und ist darüber lediglich zu bemerken, dass man wegen der

Finsterniss in den Grubenräumen, welche das Ablesen durch das Fernrohr verbietet, statt der Reichenbach'schen Nivellirlatte eine Schieblatte anwendet, deren Zieltafel in der Mitte eine horizontale, von hinten erleuchtete Spalte (hf, Fig. 224) hat, die in die Visirlinie eingestellt wird.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass, wenn einmal nach den Seiten ab, bc, cd Latten gelegt sind, die Horizontalabstände der Punkte e, b, f am kürzesten mittelbar aus den schiefen Entfernungen und den mit dem Setzniveau gemessenen vertikalen Neigungswinkeln bestimmt werden, und dass die Aufzeichnungen in dem Zug- und Schinbuche nur zum Theil nach den Tabellen A und B geschehen können und eines anderen leicht zu findenden Schema's bedürfen.

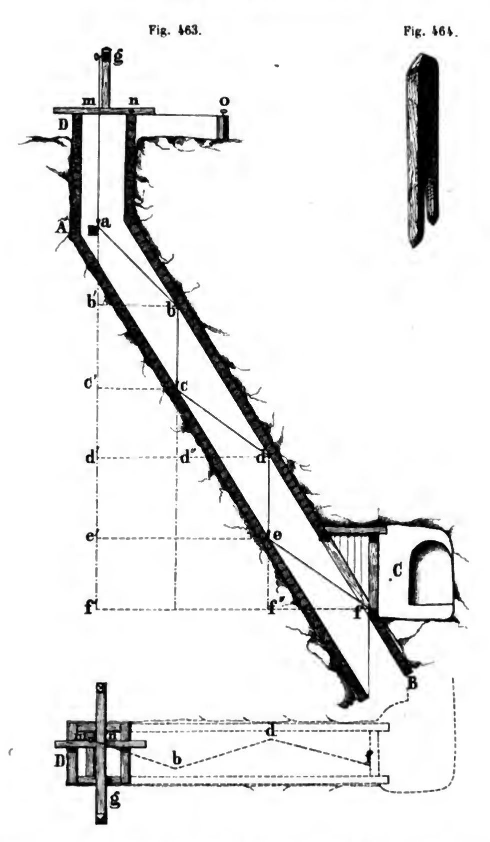
§. 382. Aufgabe. Einen Markscheidezug in einem Schachte und einer Strecke von starker Neigung vorzunehmen und zu berechnen.

In sehr stark geneigten Strecken, wie Fig. 463 zwischen A und B eine vorstellt, lässt man stets eine flache Schnur mit einer seigeren abwechseln. Die erste Schnur geht hier von einem in dem Balken g des Schachthauses befestigten Senkeleisen aus und reicht bis zu der Stelle a, wo die geneigte Strecke beginnt: sie wird nach §. 375 behandelt. Von a aus zieht man die zweite Schnur ab an das Hangende, misst sie nach §. 374 aus und bestimmt nach den §§. 376 und 377 ihren Streich- und Tonnlagewinkel. Hat man ferner den Punkt b auf das Liegende bei c gesenkelt und die Seigerhöhe bc gemessen, so verfährt man mit der Schnur cd wie mit ab; senkelt dann d nach e, misst de, und zieht endlich ef bis zur Grundschwelle f der Strecke c, worauf man wieder die Länge, das Streichen und die Tonnlage von ef misst. Reicht die Strecke AB noch weiter hinab, so wiederholt sich das oben angedeutete Verfahren so oft, bis die tiefste Stelle der Strecke erreicht ist.

Die Aufzeichnungen des in Rede stehenden Zugs geschehen nach dem Schema A, die Berechnungen nach den Formeln Nr. 450 bis Nr. 457 und die Einschreibungen in das Schinbuch nach dem Schema B, Seite 674. Man wird hiernach leicht im Stande seyn, die gesammte Tiefe des Schachtes AD und der Strecke $AB = mf' = ma + ab' + b'c' + c'd' + d'e' + e'f'$, sowie den Horizontalabstand der Punkte m und $f = ff' = bb' + dd'' + ff''$ anzugeben und, wenn auch die Abstände der Ulmen von den Schnüren gemessen und aufgezeichnet wurden, den Grund- und Aufriss des Schachtes und der Strecke AB zu zeichnen.

Bei starken Neigungen der Schnur muss dafür gesorgt werden, dass der Compass und der Gradbogen nicht rutschen. Dieses Rutschen wird aber entweder durch die in §. 177 beschriebenen Zwingen (Fig. 200), welche von Messing seyn müssen, damit sie nicht auf die Magnetnadel wirken, oder durch ganz einfache hölzerne Kluppen (Fig. 464), welche etwa 3 Zoll lang, $\frac{1}{2}$ Zoll breit und $\frac{1}{4}$ Zoll dick und so weit ausgeschlitzt sind, dass sie auf die Schnur gezwängt werden können, verhindert.

Fig. 463. Fig. 464.



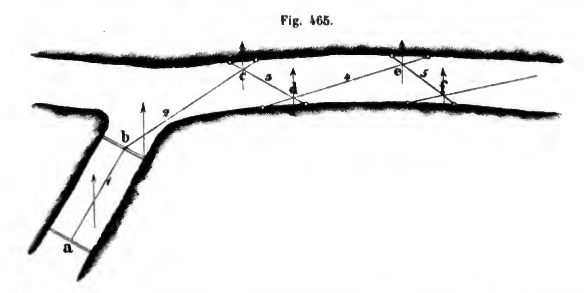
§. 383. **Aufgabe. Einen Markscheidezug in solchen Gruben vorzunehmen, wo die Magnetnadel abgelenkt wird.**

Gestatten es die Räumlichkeiten, so nimmt man den Zug mit dem Grubentheodolithen oder Messtische vor und setzt die Aufnahme nach einer oder zwei Richtungen so weit fort, dass schliesslich eine Orientirung gegen die Mittagslinie stattfinden kann. Muss aber wegen beschränkten Raumes mit dem Hängecompass gearbeitet werden, so bedient man sich am zweck-

mässigsten des von Rittinger empfohlenen Verfahrens, durch welches die aus der Abweichung der Magnetnadel entspringenden Fehler eliminirt werden.

Dieses Verfahren beruht auf der richtigen Voraussetzung, dass die Ablenkung der Magnetnadel an ein und derselben Stelle während der Messung des Winkels zweier Richtungen sich nicht ändert, und besteht demzufolge darin, dass man zwei an den Scheiteln der Winkel sich kreuzende Schnüre

Fig. 465.



zieht, an den Kreuzungspunkten die (um die Ablenkung δ falschen) Streichwinkel jeder Schnur abnimmt, und den Zug so weit fortsetzt, bis wenigstens eine Schnur ausserhalb des Bereichs der magnetischen Ablenkung kommt.

In Fig. 465 stelle ab diese Schnur vor, während die übrigen in einer Strecke liegen, die magnetische Ablenkungen veranlasst. An der Schnur ab wird nun die Länge, die Tonnlage und das Streichen, an allen übrigen Schnüren bc, cd, de... aber nur die Länge und Tonnlage auf bekannte Weise gemessen. Die Horizontalwinkel bcd, cde, def... ergeben sich dadurch, dass man den Compass in dem Punkte c zuerst an die Schnur bc und dann an die Schnur cd, in dem Punkte d zuerst an die Schnur cd und hierauf an de, in dem Punkte e zuerst an ed und hierauf an ef hängt und jedesmal den Stand der Nadel abliest. Sind nun die Ablesungen in c um die Grösse δ falsch, so gibt ihre Differenz doch den richtigen Winkel bcd, weil jede Ablesung um δ falsch ist; beträgt die Ablenkung in d den Winkel δ', so erhält man aus den beiden Ablesungen in d, indem man sie in der rechten Weise subtrahirt, doch den richtigen Winkel cde; und ebenso findet man def und alle übrigen Horizontalwinkel des Zugs.

Ueber die practische Ausführung dieser Art des Verziehens ist zu bemerken, dass die Kreuzung der Schnüre nicht unter zu stumpfen Winkeln erfolgen soll, wesshalb man gerne zwischen zwei längere Schnüre eine kürzere (wie cd zwischen bc und de, ef zwischen ed und fg) einschaltet; ferner dass die kreuzenden Schnüre, nachdem sie angespannt sind, an der Kreuzungsstelle sich gerade berühren und der Sicherheit wegen daselbst mit Bindfaden verbunden werden sollen; ferner dass der Drehpunkt der Magnet-

nadel bei den zwei Lagen des Compasses lothrecht unter dem Kreuzungspunkt sich befinden soll; und dass endlich bei den Aufschreibungen im Zugbuche angemerkt werden muss, ob die folgende Schnur von der vorhergehenden sich rechts oder links abwendet, wenn man sich in den Winkel gestellt und auf den Scheitel blickend denkt. Das Schema der Aufschreibung kann mit Bezug auf die Fig. 465 etwa folgendes seyn.

Tabelle C.

Schnur Nr.	Wendung der Schnur.	Abgelesenes Streichen der vorangehenden Schnur.	Abgelesenes Streichen der nachfolgenden Schnur.	Aeusserer Vielecks-winkel.	Wahres Streichen gegen die Magnetlinie.	Wahres Streichen gegen die Mittagslinie.	Bemerkungen.
1			30° 40′		30° 40′	15° 15′	Orientirungslinie. Bei b noch keine Ablenkung bemerkbar.
2	rechts	30° 40′	65° 15′	34° 35′	65° 15′	49° 50′	
3	rechts	66° 30′	115° 50′	49° 20′	114° 35′	99° 10′	
4	links	115° 25′	45° 10′	70° 15′	44° 20′	28° 55′	
5	rechts	45° 10′	138° 35′	93° 25′	137° 45′	122° 20′	

Mit dem Compass Nr. 3, dessen westliche Abweichung 15° 25′ betrug, aufgenommen am .... durch ....

Zur Erläuterung dieser Aufschreibung fügen wir noch folgende Anmerkungen bei:

1) Würden die Ablenkungen der Magnetnadel an allen Stellen gleich seyn, so müssten die abgelesenen vorangehenden und nachfolgenden Streichwinkel einer jeden Schnur gleich seyn, was sie hier nicht sind.

2) Der äussere Vieleckswinkel, durch Verlängerung der vorhergehenden Schnur entstehend, wird durch Subtraction der beiden Ablesungen erhalten, wenn, wie hier geschehen, bei der Aufhängung des Compasses der Nullpunkt des Gradrings immer vor dem Winkelscheitel, also bei c z. B. gegen b und den linken Anfangspunkt der Schnur Nr. 3 liegt.

3) Das wahre Streichen gegen die Magnetlinie ergibt sich aus dem wahren Streichen der Orientirungslinie ab und den Polygonwinkeln, indem man bei rechtsseitigen Wendungen der Schnur die äusseren Polygonwinkel zu dem Streichen der vorhergehenden Schnur addirt, bei linksseitigen Wendungen aber subtrahirt.

4) Zieht man endlich von dem Streichen gegen die Magnetlinie die westliche Declination der Magnetnadel, nämlich 15° 25′, ab, so ergibt sich schliesslich das wahre Streichen gegen die Mittagslinie. Alle übrigen Aufzeichnungen können nach dem Schema A geschehen.

Ausser dem eben beschriebenen Verfahren lässt sich auch noch ein anderes anwenden, welches darin besteht, dass man durch die ganze Strecke zusammenhängende Schnurdreiecke bildet, deren drei Seiten und Tonnlagewinkel misst, und dieses Dreiecknetz an eine bereits orientirte Seite

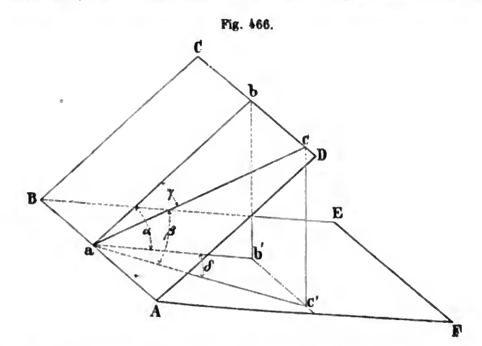
anschliesst. Diese Operation ist aber umständlicher und auch weniger genau als die vorhergehende, da sich sehr spitze und sehr stumpfe Dreieckswinkel nicht vermeiden lassen, ohne eine grosse Anzahl von kleinen Dreiecken. Sie findet daher wenig Anwendung. Dasselbe gilt auch von dem Verziehen mit der Eisenscheibe, welche ein unbehilfliches Ersatzmittel für den Grubentheodolithen ist.

D. Markscheide-Aufgaben.

§. 384. **Aufgabe. Aus dem bekannten Fallen einer Lagerstätte die Richtung einer Strecke von bestimmter Steigung, welche darauf getrieben werden soll, anzugeben.**

Es sey AC in Fig. 466 die Lagerstattebene, AE eine Horizontalebene, ab die Falllinie, ab′ deren Ebensohle, ac die gesuchte Streckenrichtung

Fig. 466.



und ac′ ihre horizontale Projection. Beobachtet sey der Fallwinkel bab′ $= \alpha$ und gegeben die Steigung der Strecke ac $= \beta$; gesucht wird entweder der Winkel bac $= \gamma$, welchen die Strecke mit der Falllinie bildet, oder dessen horizontale Projection b′ac′ $= \delta$.

Die Lösung der vorstehenden Aufgabe ist bereits durch die Gleichungen (446) und (447), welche mit Bezug auf die vorstehende Figur entwickelt wurden, gegeben; denn man erhält aus der ersteren

$$\cos\gamma = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

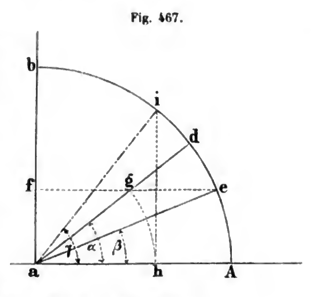
und aus der letzteren

$$\cos\delta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Will man den Winkel γ durch Construction finden, so zeichne man nach Fig. 467 einen rechten Winkel Aab, in welchem ab die Falllinie und

a A die Streichlinie vorstellt. Ueber demselben beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser $ab = r$ einen Viertelkreis und trage an den Schenkel aA den Winkel $\alpha = Aad$ und $\beta = Aae$ an. Fällt man von dem Punkte e aus die Senkrechte ef auf ab, beschreibt mit ag den Kreisbogen gh, macht hi senkrecht zu aA und zieht schliesslich die Gerade ia: so stellt iah den gesuchten Winkel γ vor. Denn es ist nach der Construction

Fig. 467.



$$af = ae \cdot \sin\beta = ag \cdot \sin\alpha = ah \cdot \sin\alpha$$

und folglich

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{ah}{ae} = \frac{ah}{r}.$$

Ferner ist der Winkel bai = aih und nach der Figur

$$\sin(aih) = \frac{ah}{ai} = \frac{ah}{r}.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \sin(aih) = \cos(iah);$$

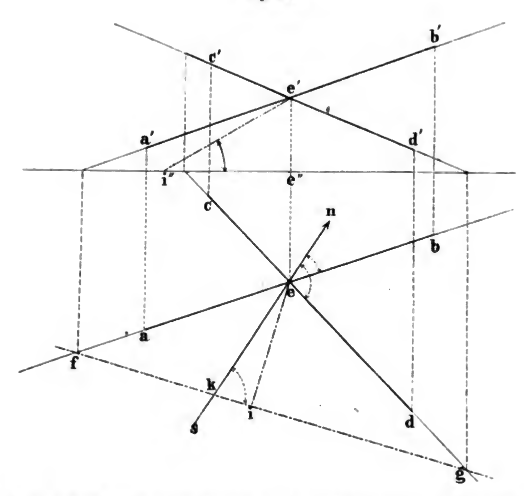
da aber das Verhältniss von $\sin\beta : \sin\alpha = \cos\gamma$ ist, so muss nothwendig $iah = \gamma$ seyn.

§. 385. Aufgabe. Von zwei in einer Lagerstattebene sich kreuzenden Strecken kennt man die horizontalen und vertikalen Projectionen: es soll hieraus das Streichen und Fallen jener Ebene abgeleitet werden.

Reicht zur Bestimmung des Streichens und Fallens die Zeichnung aus, so suche man zunächst die Schnittlinie der durch die Strecken gegebenen Lagerebene mit der horizontalen Projectionsebene und ziehe darauf die bekannte Richtung der Mittagslinie, so ist der Streichwinkel gefunden, da jene Schnittlinie die Streichlinie ist. Alsdann lege man durch den Schnittpunkt der Strecken eine Senkrechte zur Streichlinie und bestimme deren Neigungswinkel mit der horizontalen Projectionsebene: so ist dieses der gesuchte Fallwinkel.

Sind ab, a′b′ und cd, c′d′ in Fig. 468 die horizontalen und vertikalen Projectionen der in dem Punkte e, e′ sich schneidenden geraden Strecken AB, CD, so findet man auf bekannte Weise die horizontalen Durchgänge f und g der Geraden AB und CD; daher die Streichlinie = fg. Stellt sn die Mittagslinie vor und verlängert man dieselbe bis zu fg, so ist, wie man leicht sieht, der erhabene Winkel fke dem gesuchten Streichwinkel gleich.

Fig. 468.



Zieht man weiter ei senkrecht zu fg, macht e''i'' = ei und verbindet e' mit i'', so ist e'i''e'' der gesuchte Fallwinkel.

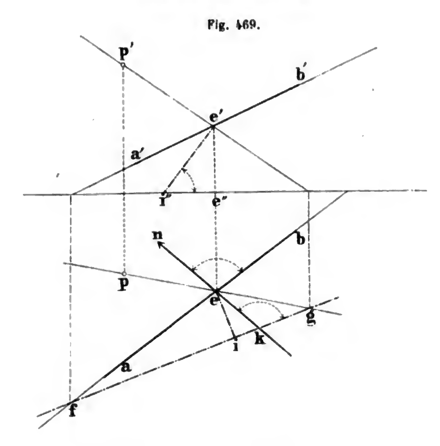
Wer mit den Rechnungen der analytischen Geometrie vertraut ist, wird hiernach die beiden gesuchten Winkel auch berechnen können; wer es aber nicht ist, dem nützt auch eine Ableitung dieser Winkel Nichts. Wir übergehen daher die Bestimmung des Fallens und Streichens durch Rechnung um so mehr, als in den meisten practischen Fällen der vorliegenden Art die Construction allein ausreicht.

§. 386. Aufgabe. Von einer Lagerstattebene sind eine gerade Strecke und ein Punkt durch ihre Projectionen gegeben: man soll das Streichen und Fallen dieser Lagerstätte bestimmen.

Die Lösung dieser Aufgabe führt sofort auf die des vorhergehenden Paragraphs zurück, wenn man sich durch den gegebenen Punkt p, p' (Fig. 469) eine Gerade pe, p'e' gelegt denkt, welche die gegebene Strecke ab, a'b' unter einem beliebigen Winkel schneidet. Man findet alsdann die Streichlinie fg aus den Horizontaldurchgängen f, g der Linien ab, a'b' und pe, p'e' und damit den Streichwinkel gke, wenn ek die Richtung der Mittagslinie ist. Ebenso erhält man aus der Senkrechten ei und dem Abstande ee'', indem man das rechtwinkelige Dreieck e'e''i'' construirt, den gesuchten Fallwinkel = e'i''e''.

Hinsichtlich der Berechnung des Fallens und Streichens, welche auch

Fig. 469.



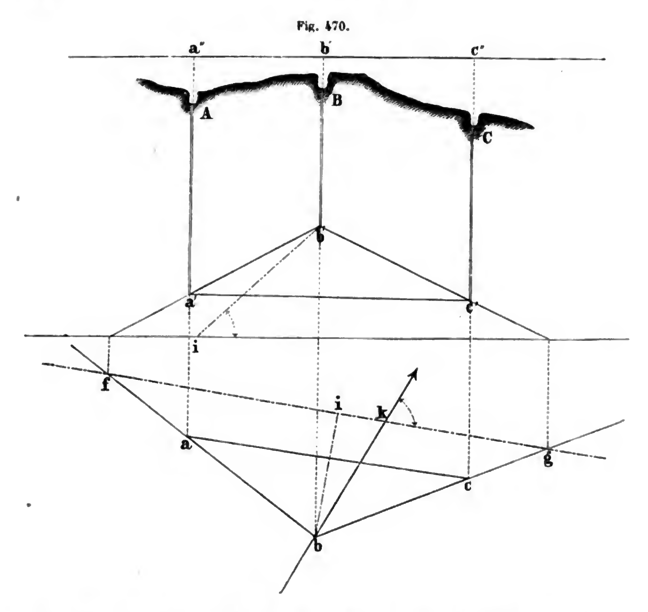
an die Stelle der Construction treten kann, gilt die Schlussbemerkung des vorhergehenden Paragraphs.

§. 387. Aufgabe. Aus drei ihrer gegenseitigen Lage nach bekannten Punkten einer Lagerstätte deren Streichen und Fallen zu bestimmen.

Es kommt im practischen Bergbaue sehr oft vor, dass man eine Lagerstätte bloss aus drei Bohrlöchern, welche bis zu derselben hinabführen, zu bestimmen hat. Soll diese Bestimmung möglich seyn, so muss man die Coordinaten der Fusspunkte jener drei Bohrlöcher gegen drei Axen kennen, wovon eine lothrecht steht und zwei horizontal sind, und von denen wiederum eine mit der Mittagslinie parallel läuft; oder mit andern Worten: es müssen die horizontalen und vertikalen Projectionen jener drei Punkte und die Richtung der Mittagslinie bekannt seyn.

Sind A, B, C (Fig. 470) die drei Stellen, von denen aus die Bohrlöcher abgeteuft werden, so hat man erstens die horizontale Projection abc des Dreiecks ABC und die Neigung einer Seite desselben gegen die Mittagslinie auf bekannte Weise zu bestimmen, zweitens die drei Punkte A, B, C in Bezug auf eine beliebige Horizontalebene einzunivelliren, und drittens die Tiefen Aa', Bb', Cc' an den Erdbohrern abzunehmen, ehe zur Bestimmung des Streichens und Fallens der Lagerstätte geschritten werden kann. Kennt man aber diese Daten, so lässt sich die Aufgabe auf constructivem Wege nach §. 385 lösen, da durch die Projectionen a, b, c und a', b', c' dreier in der Lagerstätte liegender Punkte auch drei Paare sich kreuzender Richtungen gegeben sind.

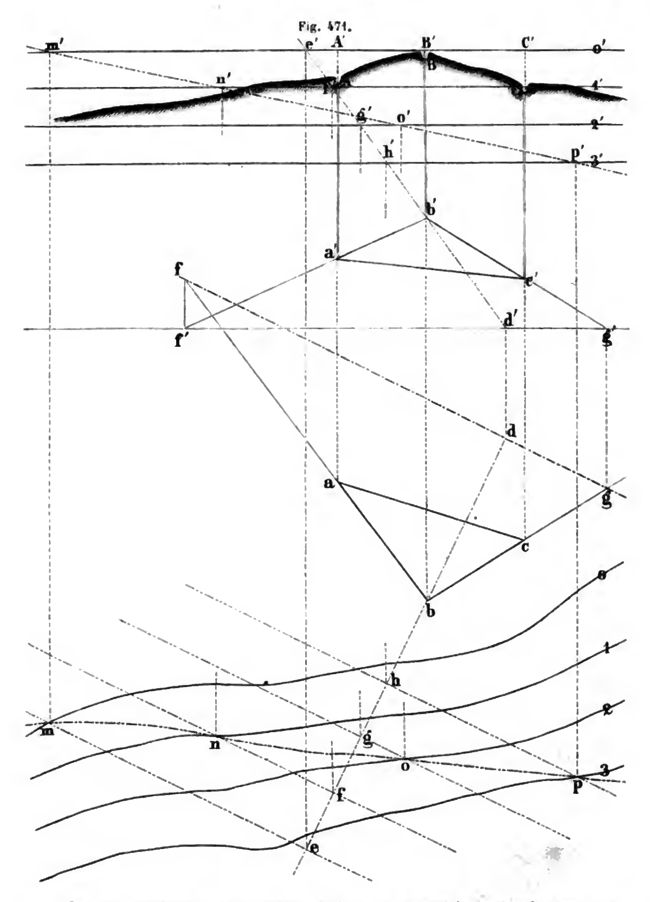
Fig. 470.



§. 388. **Aufgabe. Das Ausbeissen einer Lagerstätte über Tage zu bestimmen, wenn deren Streichen und Fallen aus drei Bohrlöchern bekannt ist.**

Es seyen in Fig. 471 A, B, C die drei Bohrlöcher und a, a′, b, b′, c, c′ die Projectionen ihrer Fusspunkte; fg, f′g′ stelle die gegebene Streichlinie bd, b′d′ die zu fg senkrechte Falllinie vor und 0, 0′, 1, 1′, 2, 2′, 3, 3′ .... seyen die Projectionen der Schnitte der Terrainoberfläche durch horizontale Ebenen, welche gleichweit (etwa 10′) von einander abstehen: die Aufgabe ist, die Linie mnop, m′n′o′p′ zu suchen, nach welcher das Lager zu Tage ausgeht. Verlängert man die Falllinie bis zur obersten Horizontalebene, so wird diese und jede andere Horizontalebene von ihr geschnitten. Zieht man nun in dieser Ebene durch die Schnittpunkte zur Streichlinie parallele Gerade, so liegen diese gleichzeitig auch in der Lagerebene und stellen deren Horizontalschnitte vor. Jeder solche gerade Schnitt wird, hinreichend erweitert, die seiner Ebene angehörende Horizontalcurve der Terrainfläche treffen, und jeder solche Durchgang ist ein Punkt der gesuchten Ausbeissungslinie.

Fig. 471.



Um die Zeichnung nach dieser Anleitung auszuführen, verlängere man die Vertikalprojection b′d′ bis e′ und bestimme die Horizontalprojection e des Punktes e, e′. Durch e ziehe man em parallel zu fg bis die Horizontalcurve 0 in m getroffen wird, so ist m, m′ ein Ausbeissungspunkt. Ebenso

suche man zu dem Schnittpunkte h′ die Horizontalprojection h, lege durch h die Parallele hp zu fg und verlängere sie, bis die Horizontalcurve 3 von ihr geschnitten wird, so ist p, p′ abermals ein Punkt der Ausbeissungslinie. Zwischen e′ und h′ liegen die Schnittpunkte f′, g′ in gleichen Entfernungen: darum theile man in der Horizontalprojection den Abstand eh in drei gleiche Theile und ziehe durch f, g die Parallelen fn, go, so ergeben sich schliesslich auch noch die Punkte n,n′ und o,o′ der gesuchten Linie mnop, m′n′o′p′.

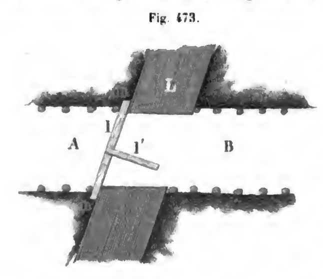
Wäre nach Fig. 472 das Lager L von einem jüngeren Gebilde G überdeckt, so dass jenes nicht zu Tage austreten könnte, so dürfte man sich nur vorstellen, dass die Horizontalcurven 0, 1, 2, 3 .... nicht der Terrainoberfläche DE, sondern der Grundfläche HJ des überdeckenden Gebildes angehören, um nach der vorstehenden Anleitung das Ausbeissen unter der Voraussetzung zu finden, dass die Ueberlagerung entfernt worden sey. Sollte nun die Lagerstätte an ihrem oberen Rande entblösst werden, so wäre lediglich die Horizontalprojection mnop auf dem Terrain abzustecken und überall die Mächtigkeit des Gebildes G zu durchsenken.

Fig. 472.

§. 389. **Aufgabe. Das wahre Streichen und Fallen einer Lagerstätte anzugeben, welche bloss durch einen Schlag gekreuzt wird.**

Stellt L in Fig. 473 die Lagerstätte vor, welche weder auf der Sohle noch auf dem Dache entblösst ist, sondern nur von einer Strecke oder einem Schlage AB gekreuzt wird, so durchfahre man erst die ganze Mächtigkeit des Lagers und suche hierauf mittels einer Latte (l) und Setzwage an dem Hangenden oder Liegenden (hier an dem Hangenden) der Lagerstätte durch Abgraben zwei Punkte (m, n) auf, welche in einer Horizontalebene liegen, und messe hiernach das Streichen mit dem Setzcompass. Alsdann lege man eine zweite Latte (l′) senkrecht zur ersten und so, dass sie ober- oder unterhalb der letzteren an einem Punkte des Hangenden oder Liegenden (hier des Hangenden) ansteht und folglich in die Dach- oder Sohlebene (hier in die Dachebene) der Lagerstätte fällt. Misst man nun den Neigungswinkel dieser Latte gegen den Horizont mit dem Gradbogen oder dem Setzniveau, so stellt dieser das gesuchte Fallen der Lagerstätte vor.

Fig. 473.



§. 390. **Aufgabe. Ein in der Grube gegebener Punkt soll in seiner Vertikallinie über Tag, und ausserdem die Länge dieser Linie angegeben werden.**

Diese Aufgabe, welche sich bergmännisch auch so ausdrücken lässt: „einen Grubenpunktseiger an den Tag überzutragen," oder so: „den Feldort eines Grubenpunktes anzugeben," hat der Markscheider sehr oft zu lösen; denn angenommen z. B., es sey nach Fig. 474 der Tagstollen ab

Fig. 474.

sehr lang, so wird die Luft in dem Kreuzschlage bc sowohl das Brennen der Lichter als das Athmen der Bergleute sehr erschweren, wesshalb zur Verbesserung der Luft entweder ein Wetterbohrloch oder ein Wetterschacht abgeteuft werden muss. Soll nun die Abteufung in einem bestimmten Punkte c der Grube eintreffen, so ist dessen Oertung über Tage (Feldort, Projection) genau anzugeben.

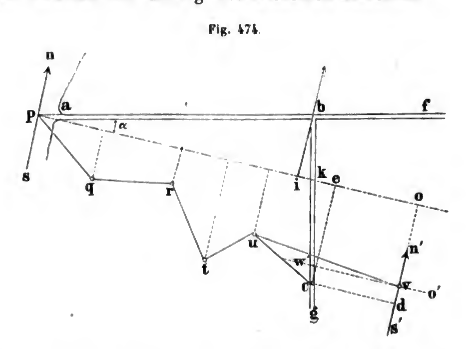
Um dieses zu bewirken, wird man vor allen Dingen einen Markscheidezug in der Grube ausführen und diesen an die vor dem Stollenmundloche a ausgesteckte Mittagslinie sn anknüpfen: hiedurch findet man die Länge, Breite und Höhe des Punktes c in Bezug auf den Fixpunkt p und die rechtwinkeligen Axen ps, po, pz, von denen die letztere lothrecht ist. An diese Axen und den Fixpunkt p anschliessend, steckt man über Tage ein Polygon pqrtuv bis zu einer Stelle hin aus, von der man glaubt, dass sie lothrecht über c liege. Dieses Polygon wird auf bekannte Weise nach seiner horizontalen und vertikalen Projection aufgenommen und von jedem Eckpunkte werden die Coordinaten (x, y, z) oder Länge, Breite und Höhe berechnet. Unter den horizontalen Coordinaten werden zwei der Länge und Breite von c ziemlich nahe kommen; wir wollen annehmen, die von v. Von diesem Punkte aus und im Anschlusse an die Polygonseite uv wird man nun leicht den Feldort c' finden. Denn trägt man an v die Mittagslinie s'n' an und errichtet darauf die Senkrechte o'w', so hat man die Axen

parallel zu ihrer ursprünglichen Richtung und die Coordinaten des Punktes v in die Lage v s', v o', v z' verschoben: es sind daher leicht die Coordinaten von c in Bezug auf diese neuen Axen zu berechnen und abzustecken. Hat man dieses aber gethan, so ist die Aufgabe gelöst, weil der Feldort c' und die Seigerhöhe c c', welche die Länge der Wetterführung angibt, bekannt sind.

§. 391. Aufgabe. Ein auf dem Felde gegebener Punkt soll in die Grube übergetragen oder projicirt werden.

Diese Aufgabe behandelt den umgekehrten Fall der vorigen, wesshalb wir darauf verweisen und die Fig. 474 wiederholt anwenden.

Fig. 474.



Man wird demnach den Punkt c', dessen gesuchte Projection (Oertung unter Tage) c ist, mit einem Fixpunkte p, der vor einem Stollenmundloche a steht, durch einen Polygon c u t r q p verbinden und die Coordinaten x, y, z aller Eckpunkte in Bezug auf die Axen p s, p o, p z berechnen. Hierauf schliesst man an dieselben Axen einen Grubenzug p a b f an und berechnet aus diesem einen Punkt b, der so liegt, dass, wenn von ihm aus ein Kreuzschlag b g unter einem Winkel $\beta =$ i b k gegen die Mittagslinie i b geführt wird, dieser Schlag durch das Loth von c' gehen, also zur unterirdischen Oertung c des Punktes c' führen muss, sobald die Strecke b c berechnet und hergestellt ist.

Um aber den Punkt b zu erhalten, verfahre man wie folgt. Es sey die Abscisse p e des Punktes $c = x_1$ und die Ordinate $ce = y_1$; die Richtung b c bilde mit der Mittagslinie den Winkel $ibc = \beta$ und die Richtung a b mit der Ostwestlinie den Winkel $bpo = \alpha$. Setzt man nun die gesuchte Abscisse von $b = pi = x$, die Ordinate $bi = y$ und den ebenfalls noch unbekannten Abschnitt $ik = m$, so ist (von den Vorzeichen abgesehen) aus der Aehnlichkeit der Dreiecke b i k und k c e:

$$my_1 = (x_1 - x - m)\, y.$$

Setzt man in diese Gleichung die aus den rechtwinkeligen Dreiecken bpi und bki folgenden Werthe von $y = x \operatorname{tg} \alpha = xt$ und $m = y \operatorname{tg} \beta = x \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = xtt'$, so findet man nach einander die gesuchten Coordinaten:

$$x = \frac{x_1 - y_1 t'}{1 + tt'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (458)$$

$$y = \frac{(x_1 - y_1 t') t}{1 + tt'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (459)$$

und hieraus die Hypotenuse pb des Dreiecks ipb gleich

$$l = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{x_1 - y_1 t'}{(1 + tt') \cos \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (460)$$

Mit dem berechneten Werthe von l kann man den Punkt b in der Grube abstecken, und ist dieser gefunden, so lässt sich die Richtung bc, deren Horizontalprojection die Länge

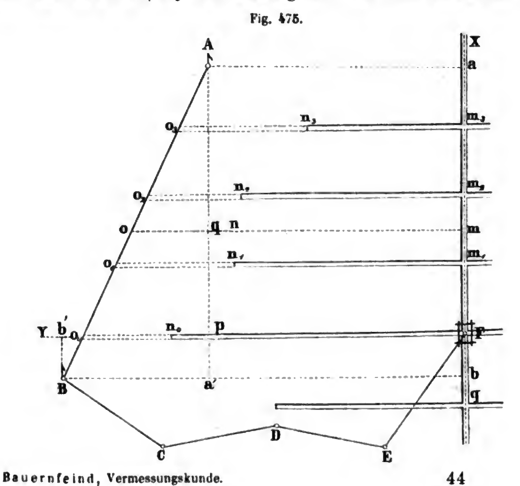
$$l' = \frac{y + y_1}{\cos \beta} = \frac{t x_1 + y_1}{(1 + tt') \cos \beta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (461)$$

hat, leicht bezeichnen. Ist nun der Querschlag bg bis auf die horizontale Länge l' von b aus in den Berg getrieben, so kann c abgemessen und die Aufgabe als gelöst betrachtet werden.

§. 392. **Aufgabe. Eine auf dem Felde gegebene Markscheide soll in die Grube übergetragen werden.**

Die Markscheide sey auf dem Felde durch die Fixsteine A, B (Fig. 475) bezeichnet und die Grube, in welcher die durch AB gehende Vertikalebene abzustecken ist, sey eine Kohlengrube. Für den Abbau des Kohlen-

Fig. 475.



flötzes seyen bereits der Schacht F, in der Richtung des Falles FX die Strecke Fa und in der Richtung des Streichens die Strecken Fn_0, $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, $m_3 n_3$ .... angelegt. Es handelt sich also nur darum, die Längen $Fo_0 = y_0$, $m_1 o_1 = y_1$, $m_2 o_2 = y_2$, $m_3 o_3 = y_3$ anzugeben, welche von FX bis an die Vertikalebene AB reichen.

Zu dem Ende stecke man über Tage zwischen der Markscheide AB und dem Schachte F ein Polygon ABCDEF aus, nehme es in bekannter Weise auf und berechne die Coordinaten von A und B in Bezug auf die rechtwinkeligen Axen FX und FY. Das Ergebniss dieser Messung und Rechnung sey:

$$Ap = + x', \quad Aa = y'$$
$$Bb' = - x'' \quad Bb = y''.$$

Für irgend eine mit der Y-Axe parallele Strecke mn, deren Horizontalabstand von F = Fm ist, erhält man die Länge

$$mo = \lambda = mq + qo = y' + \eta,$$

wobei Aa' parallel der X-Axe gezogen und $qo = \eta$ gesetzt ist. Schreibt man

$$\mathrm{tg}\,(BAa') = \frac{Ba'}{Aa'} = \frac{y'' - y'}{x'' + x'} = t,$$

so folgt sofort aus dem rechtwinkeligen Dreiecke Aqo, wenn $Fm = \zeta$ gesetzt wird:

$$\eta = (x' - \zeta)\, t$$

und daher durch Substitution dieses Werthes in den Ausdruck für mo die Gleichung

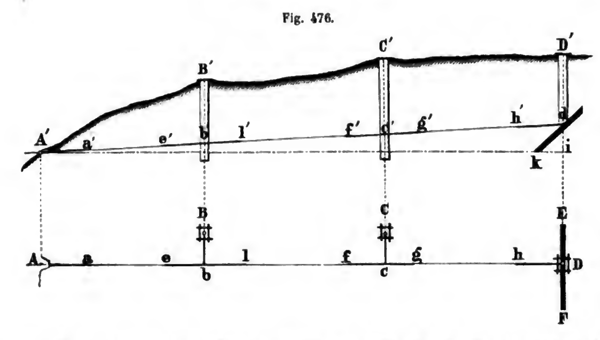
$$\lambda = y' + (x' - \zeta)\, t. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (462)$$

Setzt man hierin nach und nach für ζ die Werthe 0, ζ_1, ζ_2, ζ_3 ...., so findet man λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 .... und kann folglich damit, wenn die zugehörigen Strecken weit genug in den Berg getrieben sind, die Grenzpunkte o_0, o_1, o_2, o_3 .... durch Markscheidestufen und die Grenze selbst durch einen Querschlag bezeichnen.

§. 393. **Aufgabe. Einen Stollen mit Lichtschächten und Gegenortspunkten abzustecken.**

Stellt in Fig. 476 der schwarze Streifen EF den wagrechten und kd den lothrechten Durchschnitt einer Lagerstätte vor und soll von dem gegebenen Tagpunkte A, A' aus ein Stollen an diese Lagerstätte so geführt werden, dass er die kleinste Länge erhält und das Lager möglichst tief untersetzt: so muss seine Richtung senkrecht zur Streichlinie EF der Lagerstätte stehen, und seine Steigung α die kleinstmögliche seyn. Ist nun durch einen Markscheidezug die Lage des gegebenen Punktes A, A' gegen die mit EF parallele Streichlinie bestimmt, so steht damit auch die horizontale Projection AD der Stollenaxe fest, insoferne sie EF senkrecht schneidet; und wenn man von A' aus eine Linie A'd mit der gegebenen Steigung α gegen die Horizontale Ai zieht, so hat man auch die vertikale Projection A'd der Axe des Stollens.

Fig. 476.



Da die Lage des Punktes A gegen die Streichlinie der Lagerstätte als bekannt vorausgesetzt wird, so lässt sich die Absteckung der zur Streichlinie senkrechten Stollenrichtung auf dem Terrain nach den bereits bekannten Methoden für die Absteckung gerader Linien leicht bewirken. Diese Absteckung vorausgesetzt, erhält man die Lage des Endpunkts d des Stollens auf folgende Weise.

Man nivellirt die ausgesteckte Gerade bis zu einem (in Fig. 476 nicht mehr angedeuteten) Punkte L, an welchem die Lagerstätte entweder ausbeisst oder entblösst ist. Hierdurch erfährt man den Höhenunterschied $Lm = h$ und die Horizontalprojection von $A'L = A'm = l$. Da auch der Fallwinkel $Lkm = \beta$ bekannt ist, so ergibt sich aus dem rechtwinkeligen Dreiecke Lkm die Länge von

$$km = h \cdot \cot \beta$$

und aus dem ebenfalls rechtwinkeligen Dreiecke A′mn die absolute Steigung des Stollens bis zur Vertikalen Lm gleich

$$mn = l \operatorname{tg} \alpha.$$

Mit diesen Grössen findet man aber leicht, was über die Lage von d zu wissen nöthig ist, nämlich

$$A'i = \frac{h - l \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = s,$$

$$di = s \operatorname{tg} \alpha,$$

$$A'd = \frac{s}{\cos \alpha}.$$

Sobald man A′i kennt, kann man in der abgesteckten Stollenrichtung den Punkt D′ auf der Terrainoberfläche abmessen und somit die Oertung des Punktes d angeben. Aus dem Nivellement von A′ bis D′ ergibt sich auch die Tiefe des Schachtes D′d.

Sollen in den Punkten B, C zur Seite der Geraden AD zwei Lichtschächte bestimmt werden, so erhält man die Tiefe derselben (B′b′ und C′c′)

bis auf die Sohle des Stollens aus dem an die Linie AD geknüpften Nivellement der Punkte B, B' und C, C' in Verbindung mit den bekannten absoluten Steigungen des Stollens auf die Längen Ab und Ac. Die Schächte werden um 1 bis 2 Lachter tiefer gemacht, als die berechneten Grössen B'b' und C'c' verlangen, damit sich in der Vertiefung oder dem Sumpfe das Grubenwasser absetzen kann; die 3 bis 4 Lachter langen Querschläge Bb und Cc sind aber in der Höhe der Stollensohle anzulegen.

Damit man die Gegenortspunkte b, b' und c, c', von denen aus der Stollen nach be, bl und cf, cg hin getrieben wird, genau erhält, müssen erstens die Richtungen Bb und Cc in dem Kreuzstreichen des Stollens angelegt und die aus der Lage von B und C bekannten Abstände Bb und Cc genau abgemessen, und zweitens die Punkte b' und c' von B' und C' aus in den Schächten abgesenkelt und in den Querschlägen scharf einnivellirt werden. Sind diese Punkte ihrer horizontalen und vertikalen Projection nach bekannt, so ergeben sich die Richtungen be, bl und cf, cg aus dem bekannten Streichen und die Neigungen b'e', b'l' und c'f', c'g' aus dem vorgeschriebenen Gefälle der Stollenaxe. Die Lage der Linien el, e'l' und fg, f'g' oder der Feldörter e', l', f', g' wird in den die Breite des Stollens durchbrechenden Querschlägen Bb und Cc durch Fixpunkte (Einstemmungspunkte) genau bezeichnet, und während des Stollenbetriebs findet eine wiederholte Controle der Absteckung durch den Markscheider statt, um jede Abweichung von den im horizontalen und vertikalen Sinne vorgeschriebenen Richtungen des Stollens sofort zu verhindern.

Will man die horizontalen Richtungen der Querschläge und Gegenörter des Stollens nicht mit der Magnetnadel, sondern, was mehr zu rathen ist, mit dem Grubentheodolithen bestimmen, so kann man in der Weise verfahren, dass man in jedem Schachte zwei Punkte hinabsenkelt, welche möglichst weit von einander entfernt sind und deren Richtung gegen den Meridian und die Stollenaxe über Tage genau bestimmt ist. Mit dieser bereits orientirten und durch die Senkelung in die Grube übergetragenen Linie lässt sich, wie leicht einzusehen, der zu jedem Schachte gehörige Querschlag und, wenn dieser ausgeführt ist, die Stollenaxe abstecken.

Vierter Abschnitt.

Wassermessungen.

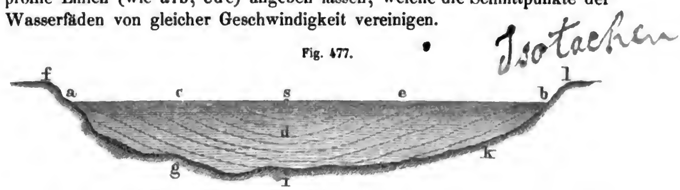
§. 394. Nachdem im sechsten Abschnitte der ersten Abtheilung nur diejenigen Messinstrumente betrachtet wurden, welche zur unmittelbaren Messung der Geschwindigkeiten fliessender Gewässer dienen, wird hier auch

nur von den hydrometrischen Arbeiten die Rede seyn, welche an Gerinnen, Bächen, Flüssen und Strömen vorzunehmen sind, um deren Geschwindigkeiten, Wassermengen und sogenannte Wasserkräfte kennen zu lernen. Es ist somit hier nicht die Rede von den Messungen, durch welche man die Geschwindigkeiten und Wassermengen sehr kleiner Wasserläufe, wie die der Quellen und Röhrenleitungen, erfährt, oder welche das Steigen und Fallen der Wasserstände der Flüsse betreffen und mit dem Ausdrucke „Pegelbeobachtungen“ bezeichnet werden; denn diese Messungen würden zu weit in das Gebiet des Flussbaues, jene aber zu weit in das der Hydraulik eingreifen.

A. Geschwindigkeitsmessungen.

§. 395. Die Geschwindigkeit eines fliessenden Wassers ist selbst an solchen Stellen, wo das Flussbett regelmässig beschaffen und von Wehren, Buhnen und anderen auf die Bewegung des Wassers störend einwirkenden Bauwerken entfernt ist, nicht in dem Sinne gleichförmig, dass alle Wasserfäden gleiche Geschwindigkeit besitzen, sondern nur insoferne, als ein und derselbe Wasserfaden auf eine ziemliche Länge seine Geschwindigkeit nicht merklich ändert. Es fliessen immer diejenigen Wasserfäden, welche sich näher an den Ufern oder in grösserer Tiefe befinden, langsamer als die mittleren und höher gelegenen, so dass sich nach Fig. 477 in jedem Querprofile Linien (wie aib, cde) angeben lassen, welche die Schnittpunkte der Wasserfäden von gleicher Geschwindigkeit vereinigen.

Fig. 477.



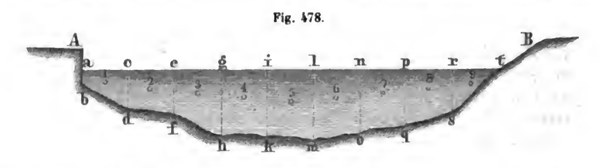
Das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeiten der Wasserfäden nach der Tiefe und den Seiten eines Querprofils abnehmen, ist nicht bekannt, obwohl es nicht an Formeln fehlt, welche diese Abnahme darzustellen suchen. Würde man dieses Gesetz kennen, so reichte es hin, die Geschwindigkeit des Stromstrichs zu messen, um daraus die mittlere Geschwindigkeit des Wassers durch Rechnung zu finden; so lange aber jene Kenntniss mangelt, ist man darauf angewiesen, die mittlere Geschwindigkeit des Wassers auf anderen Wegen zu suchen.

Einer dieser Wege besteht darin, dass man die von Eytelwein und Anderen entwickelten Formeln, welche die mathematischen Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit des Wassers und den Abmessungen eines regelmässigen Gerinnes darstellen, auch auf Flüsse überträgt und aus den Dimensionen einiger Querprofile und der Grösse des Wasserspiegelgefälles

die mittlere Geschwindigkeit berechnet. Dieses Verfahren ist als eine mittelbare Messung der Geschwindigkeit zu bezeichnen, insoferne Nivellirinstrumente und Längenmesser ausreichen, es zu vollziehen; es kann aber nur für solche Fälle empfohlen werden, in denen entweder gar keine unmittelbare Messung stattfinden kann, oder in welchen nur sehr geringe Genauigkeit gefordert wird.

Der andere Weg, die mittlere Geschwindigkeit eines Flusses auszumitteln, besteht darin, dass man, wie in Fig. 478 angedeutet, das Querprofil in eine entsprechende Anzahl Trapeze (ad, cf, eh ... st) abtheilt, in deren Mittelpunkten (1, 2, 3 ... 9) die Geschwindigkeiten direct misst,

Fig. 478.



die durch jedes Trapez fliessende Wassermenge berechnet, und aus der Gesammtwassermenge durch Division derselben mit dem Flächeninhalte des Querprofils die mittlere Geschwindigkeit sucht. Dieses Verfahren wird dem vorigen gegenüber als eine unmittelbare Messung der mittleren Geschwindigkeit des Flusses bezeichnet und liefert, wenn die einzelnen Geschwindigkeiten mit dem Woltman'schen Flügel gemessen werden, unter allen bis jetzt bekannten Methoden die zuverlässigsten Resultate. Wir brauchen jedoch hierüber Nichts weiter mitzutheilen, da bereits bei der Beschreibung der Instrumente zum Geschwindigkeitsmessen (S. 358—383) ausführlich von deren Gebrauch die Rede war und einige damit zusammenhängende Operationen auch bei den mittelbaren Geschwindigkeitsmessungen, von denen nunmehr die Rede seyn soll, vorkommen.

§. 396. **Eytelwein'sche Formel.** Da die mittelbaren Geschwindigkeitsmessungen von der mathematischen Beziehung zwischen der Geschwindigkeit, dem Gefälle und dem Querprofile eines Wasserlaufs abhängen, so ist vor Allem dieser Zusammenhang darzustellen.

Die ersten richtigen Ansichten über die Abhängigkeit der Geschwindigkeit eines Flusses von dessen Gefälle und Querprofile sprach A. Brahms in seinen vor hundert Jahren erschienenen „Anfangsgründen der Deich- und Wasserbaukunst" aus; er unterliess es aber, eine algebraische Formel, welche die von ihm aus Versuchen erkannte Gesetzmässigkeit ausdrückte, aufzustellen. Später beschäftigten sich in Frankreich namentlich Dubuat und Prony, in Deutschland Woltman und Eytelwein mit Herleitung eines Ausdrucks für die Geschwindigkeit des Wassers in Canälen und Flussbetten. Die Arbeiten von Eytelwein sind ohne Zweifel die gründlichsten und fanden daher auch die meiste Anerkennung und Anwendung.

Die nachstehend entwickelte Formel gilt eigentlich nur für ganz regelmässige Gerinne, in welchen die Querprofile gleich gross sind; für Flüsse gaben ihr Eytelwein und Prony eine etwas veränderte Gestalt. Vergleicht man jedoch die Ergebnisse directer Messungen mit den aus den zusammengesetzten Formeln berechneten Geschwindigkeiten, so sind die Abweichungen immer noch so gross, dass man die völlige Richtigkeit der Annahmen, worauf die Entwickelung der Formeln für die Flüsse beruht, bezweifeln muss. So lange diese Unsicherheit noch besteht, ist es daher wohl gerechtfertigt, sich des einfacheren Ausdrucks zur Berechnung der Geschwindigkeit aus dem Gefälle und Querprofile zu bedienen.

Bei der Herleitung dieses Ausdrucks ging man von der natürlichen Annahme aus, dass die Beschleunigung der Bewegung des Wassers, welche in Folge seines Falles über eine schiefe Ebene eintreten müsste, wenn keine Hindernisse entgegen wirkten, durch die Cohäsions- und Reibungs-Widerstände an der Sohle und den Seitenwänden des Canal- oder Flussbettes aufgehoben wird. Mit dieser Annahme hatte man einen Massstab zur Messung der Widerstände, und es kam nur mehr darauf an, festzustellen, wovon die Widerstände und die Beschleunigung abhängen. Durch Beobachtungen hielt man sich aber für berechtigt anzunehmen, dass der Widerstand zunächst mit der Grösse der vom Wasser berührten Fläche des Flussbetts wächst und abnimmt. Zieht man nun eine Flussstrecke von der Länge 1 in Betracht und ist p der benetzte Umfang des Querprofils dieser Strecke (in Fig. 477 ist $p = agikb$ und in Fig. 478 $p = abd \ldots st$), so ist die widerstandleistende Fläche $= p$. Ferner glaubte man nach Beobachtungen über die Bewegung des Wassers in Flüssen annehmen zu müssen, dass der Widerstand gegen die Bewegung auch mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wachse, insoferne bei doppelter Geschwindigkeit doppelt so viele Theile und jeder Theil in der halben Zeit von der benetzten Wand abgerissen werden müsse. Bezeichnet man nun den Widerstand mit w, die Geschwindigkeit in der Sekunde mit v, den benetzten Umfang des Querprofils mit p und eine noch unbekannte, von den Reibungsverhältnissen des Wassers abhängige constante Grösse mit i, so ist nach den vorstehenden Erörterungen

$$n = i p v^2. \qquad (463)$$

Nennt man ferner α das relative Gefälle des Wasserspiegels der durch das Querprofil q fliessenden Wassermasse, und bezeichnet g die Beschleunigung der Schwerkraft der Erde, so beträgt die Beschleunigung der Bewegung jeder cubischen Einheit der in Rede stehenden Wassermasse αg, da diese Beschleunigung der Neigung der schiefen Ebene (hier dem Gefälle des Wassers) proportional ist. Für die Länge 1 der Flussstrecke beträgt die Gesammtwassermasse q Raumeinheiten und folglich ist deren Beschleunigung $= \alpha g q$.

Nach der schon erwähnten Annahme über die Vernichtung der Beschleunigung durch die Widerstände der Bewegung muss nunmehr

$$\alpha g q = i p v^2$$

und somit die Geschwindigkeit des Wassers

$$v = \sqrt{\frac{g}{i}} \cdot \sqrt{\frac{q}{p} \alpha}$$

gesetzt werden. Nimmt man, wie es in der Regel geschieht, das Verhältniss von g zu i als constant an und setzt

$$k = \sqrt{\frac{g}{i}}, \qquad \qquad (464)$$

so geht die vorstehende Formel in folgende über:

$$v = k \sqrt{\frac{q}{p} \alpha}. \qquad \qquad (465)$$

Soll nun die Geschwindigkeit in der Sekunde in preussischen oder rheinländischen Fussen ausgedrückt werden, wenn q und p in demselben Masse gegeben sind, so ist nach Eytelwein $k = 90{,}9$ zu setzen. Für bayerisches und hannoverisches Fussmass ist demnach $k = 94$, und für wiener Fussmass $k = 90{,}6$ zu nehmen.

Der Coefficient k kann in keinem Falle für jeden Fluss derselbe seyn, sondern muss sich ohne Zweifel mit der Beschaffenheit des Flussbettes ändern. Wie viel diese Aenderung in den einzelnen Fällen beträgt, lässt sich bis jetzt nicht allgemein angeben; jedenfalls aber hat die Beschaffenheit des Flussmaterials einen wesentlichen Einfluss darauf. Will man in Ermangelung des Gesetzes, nach welchem sich dieser Einfluss richtet, den Werth von k, welcher einem gegebenen Flusse möglichst gut entspricht, durch Versuch bestimmen, so braucht man nur an diesem Flusse die Grössen q, p, α, v so genau als möglich unmittelbar zu messen und nach Gleichung (465) den Werth von

$$k = \frac{v}{\sqrt{\alpha t}} \qquad \qquad (466)$$

zu berechnen. Dabei ist das Verhältniss von $q : p = t$ gesetzt und angenommen, dass v die mittlere Geschwindigkeit im Querprofile q vorstellt.

§. 397. **Aufnahme der Querprofile.** Zur mittelbaren Bestimmung der Geschwindigkeit aus der Gleichung (465) gehört zunächst die Kenntniss der Werthe von q und p, welche sich aus der Aufnahme einiger Querprofile an einer geeigneten Flussstrecke ergeben. Als geeignet ist aber jede gerade oder unmerklich gebogene Flussstrecke zu betrachten, welche von Wehren, Schützen, Buhnen, Brücken etc. ziemlich weit entfernt ist und deren Querprofile nahezu gleiche mittlere Breite und Tiefe, also auch fast gleichen Flächeninhalt haben.

1) Ist der Fluss nicht sehr breit, so kann man mit Hilfe von starken Bohlen oder langen Leitern einen gegen die Ufer senkrecht gerichteten Steg über denselben herstellen, darauf die Breite des Betts in gleiche Theile theilen und mittels einer Peilstange, die wie der Schaft des Reichenbach-schen Strommessers (Fig. 270) beschaffen ist, damit sie keine merkliche Stauung des Wassers veranlasst, an den Theilungspunkten die lothrechten Wassertiefen messen.

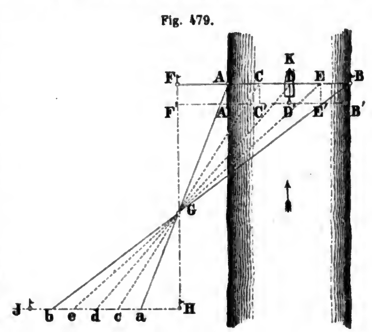
Der Steg gibt somit die Abscissen und die Peilstange die Ordinaten des Querprofils, welches hiernach gezeichnet und berechnet werden kann.

Hat man an den beiden Enden und in der Mitte Querprofile aufgenommen, und hat sich während dieser Zeit der Wasserstand nicht geändert, was man an einem am Ufer befestigten Massstabe erkennen kann: so gibt das arithmetische Mittel aus den Flächen der drei Profile den gesuchten Werth von q und das Mittel aus den drei benetzten Umfängen den Werth von p, welcher in die Formel (465) einzusetzen ist. Der bei der Messung der Profile stattfindende Wasserstand muss angemerkt werden, damit bei eben demselben das Gefälle des Wasserspiegels bestimmt werden kann.

2) Ist der Fluss breit aber nicht tief, so dass ein Arbeiter die Nivellirlatte in demselben noch halten kann, so lässt sich zur Sommerzeit das Querprofil dadurch aufnehmen, dass man über den Fluss eine starke in Leinöl getränkte, mit Wachs abgeriebene und in gleichen Abständen mit farbigen Läppchen versehene Leine spannt, an den durch die Läppchen bezeichneten Stellen die Nivellirlatte von dem im Flusse stehenden Arbeiter auf der Sohle des Flussbetts lothrecht aufstellen lässt, alle diese Punkte in Bezug auf einen am Ufer befindlichen Fixpfahl, dessen Kopf über den Wasserspiegel reicht, einnivellirt, ferner den Abstand des Wasserspiegels von dem Pfahlkopfe misst und endlich den Wasserstand an dem am Ufer stehenden Massstabe abnimmt. Man sieht, dass sich diese Aufnahme des Querprofils eines Flusses von der eines trockenen Bodens nur dadurch unterscheidet, dass hier noch der Abstand des Wasserspiegels in Bezug auf den am Ufer befindlichen Fixpfahl einzumessen ist. Dieses muss aber geschehen, wenn man den Flächeninhalt und den benetzten Umfang des Profils finden will.

3) Ist der Fluss so breit und tief, dass die vorhergehenden Methoden zur Messung der Abscissen und Ordinaten nicht mehr angewendet werden können, so müssen die Abscissen vom Ufer und die Ordinaten von einem Kahne aus gemessen werden, was in folgender Weise geschehen kann.

Fig. 479.



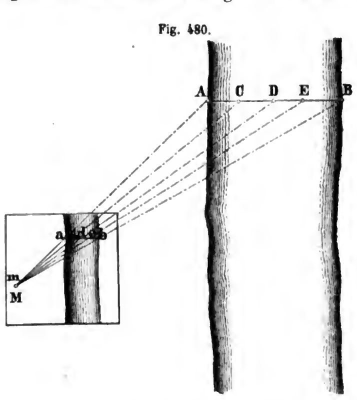
Es stehe ein Kahn (K, Fig. 479) oder statt dessen eine Verbindung von zwei Kähnen zur Verfügung, in deren Mitte eine Messfahne aufgestellt ist, die zum Einrichten des Fahrzeugs dient. An den Ufern werden die Stäbe A und B eingesteckt, welche eine Gerade bezeichnen, die dem in der Richtung A'B' aufzunehmenden Querprofile parallel ist und von diesem um die halbe Schiffslänge absteht. An der

Spitze (D') des Kahns werden die Tiefen abgepeilt, sowie dort auch die Geschwindigkeiten mit dem Woltman'schen Flügel gemessen werden, wenn es sich um unmittelbare Messungen handelt. Um nun die Länge von AB zu erfahren und in gleiche Theile zu theilen, verlängere man dieselbe bis F, errichte dort eine Senkrechte FH und stecke in H eine Parallele HJ zu FB ab. Misst man auf FH einen Punkt G so ab, dass $GH = m \cdot FG$ ist und von HJ aus über G die ganze Linie AB übersehen werden kann, und verlängert man AG und BG rückwärts bis zu HJ, so wird hierauf die Linie ab abgeschnitten, welche zu AB in dem Verhältnisse von 1 : m steht. Es ist also $AB = m\,(ab)$. Theilt man nun ab in so viele gleiche Theile, als AB erhalten soll, so werden die Absehlinien bG, cG, dG .... diese Theile auf AB bestimmen, vorausgesetzt, dass die Messfahne auf dem Schiffe auch in die an den Ufern bezeichnete Linie AB eingerichtet ist.

Dieses Einrichten kann ohne Beihilfe vom Schiffe aus geschehen, wenn man das Prismenkreuz anwendet; ohne dieses ist ein Gehilfe erforderlich, der von A oder B aus das Einwinken besorgt.

Ist der Strom in einem grossen Massstabe geometrisch aufgenommen, so kann man die Länge AB auf dem Plane abgreifen und mittels des Messtisches und der Kippregel in gleiche oder beliebige Theile theilen, wie aus Fig. 480 ohne Weiteres hervorgeht. Dabei versteht es sich übrigens von selbst, dass das Einstellen in die Linie AB vom Ufer oder vom Schiffe aus, wie vorhin angedeutet, nicht verabsäumt werden darf.

Fig. 480.



Wird es wegen grosser Tiefe oder Geschwindigkeit des Stroms zu schwer, die Peilstange lothrecht festzuhalten, so wendet man zur Tiefenmessung ein Senkblei an, dessen Leine eingetheilt ist und am unteren Ende ein etwa 10 Pfund schweres Gewicht trägt. Damit die Leine bei der Messung möglichst lothrecht gehalten werden kann, muss man das Gewicht so weit oberhalb des Punktes, an dem die Tiefe gesucht wird, einwerfen, als es während des Sinkens durch den Stoss des Wassers abwärts getrieben wird. Wie viel dieses Abwärtstreiben beträgt, erfährt man bald durch Uebung.

Da jede Profilmessung an Strömen längere Zeit dauert, so hat man fortwährend den Wasserstand an einem in der Nähe eingestellten Massstab

zu beobachten, damit man die gemessenen Tiefen alle auf eine und dieselbe Horizontale reduciren kann.

§. 398. **Aufnahme der Längenprofile.** Ausser den Werthen von q und p, welche der vorige Paragraph finden lehrt, bedarf man noch des relativen Gefälles α des Wasserspiegels zur Berechnung der Geschwindigkeit v nach der Formel (465). Dieses Gefälle ist stets eine sehr kleine Grösse, und da es ein geringer Messungsfehler in der Bestimmung des absoluten Falles h auf die horizontale Uferlänge l, woraus sich

$$\alpha = \frac{h}{l}$$

ergibt, oft bedeutend ändern kann, die Geschwindigkeit v aber der Quadratwurzel aus α proportional ist: so wird man auf die Bestimmung von h alle Sorgfalt verwenden.

Bestimmt man das Gefälle eines Flusses an mehreren unter sich zusammenhängenden Punkten und nimmt man zugleich an diesen Punkten Querprofile auf, so lässt sich aus diesen Aufnahmen das Längenprofil des Flusses für die betreffende Strecke berechnen und auftragen. Obwohl unser nächster Zweck eigentlich nur das relative Gefälle zwischen dem obersten und untersten Querprofile der Flussstrecke, in welcher die Geschwindigkeit mittelbar gemessen werden soll, fordert, so werden wir doch sofort näher angeben, wie die Arbeiten zur Aufnahme eines Längenprofils zu geschehen haben, weil dieser allgemeinere Zweck den besondern in sich schliesst und eine Wiederholung erspart wird.

Um das Längenprofil eines Flusses zwischen zwei Punkten M und N aufzunehmen, bezeichne man längs des Ufers von M bis N alle diejenigen Stellen mit Grundpfählen, welche entweder einen bestimmten Abstand von etwa 100 oder 200 Fuss von einander haben, oder an denen sich das Gefälle des Wasserspiegels ändert. Diese Grundpfähle werden in das Flussbett geschlagen und müssen mit ihren horizontal abgeschnittenen Köpfen einige Zolle über den zu nivellirenden Wasserspiegel vorragen; ausserhalb des Bettes schlage man Beipfähle mit entsprechenden Nummern wie für ein Längenprofil auf trockenem Boden. Hierauf messe man die horizontalen Entfernungen aller Grundpfähle mittels Ketten oder Latten am Ufer ab und nivellire schliesslich alle Grundpfähle unter sich und in Beziehung auf einen ständigen oder vorübergehend aufgestellten Pegel mit grösster Sorgfalt zweimal ein. Sobald der Wasserstand eintritt, für welchen man das Längenprofil wünscht, lasse man an allen Grundpfählen die Abstände des Wasserspiegels von den Pfahlköpfen gleichzeitig[1] genau messen und aufschreiben. Addirt man diese Abstände (Stichmasse) zu den vorher berechneten Abständen der Pfahlköpfe vom Horizont des Längenprofils, so erhält man die Ordinate der einnivellirten Punkte des Wasserspiegels und das Nivellement

[1] Gleichzeitig müssen die Abstände desshalb gemessen werden, weil man ausserdem nicht sicher ist, ob sich der Wasserstand des Flusses nicht geändert hat. Jede Aenderung würde das Gefälle bedeutend verfälschen.

des letzteren lässt sich nach §. 346 auftragen. Da vorher schon die Querprofile aufgenommen wurden, so kennt man in jedem die tiefste Stelle; trägt man daher an den zugehörigen Ordinaten deren Abstände vom allgemeinen Horizont ab und verbindet die Endpunkte, so erhält man auch die zum Längenprofil gehörige Stromrinne (§. 228), womit dieses aufgenommen ist. Bei höheren oder niederen Wasserständen sind die Stichmasse von Neuem zu nehmen und die Ordinaten wie vorhin zu berechnen und aufzutragen. Auf diese Weise kann man in ein Längenprofil sowohl den tiefsten als höchsten und einen mittleren Wasserstand einzeichnen. Um die eingetragenen Wasserstände auch in späterer Zeit auf dem Terrain angeben zu können, ist es nöthig, die Grundpfähle in Bezug auf einen Fixpunkt oder Pegel einzunivelliren.

Was in Bezug auf das Einnivelliren von Flussbauwerken und anderen in dem Ueberschwemmungsgebiete eines Flusses liegenden Gegenständen für den Hydrotechniker von Bedeutung ist, gehört in das Gebiet der Wasserbaukunde, mit der wir uns hier nicht beschäftigen.

B. Messung der Wassermenge eines Flusses.

§. 399. Die Bestimmung der Wassermenge, welche ein Fluss in der Zeiteinheit abführt, oder die Messung der „Wasserführung“ eines Flusses geschieht immer auf indirectem Wege, indem man die gesuchte Wassermenge aus den aufgenommenen Profilen und Geschwindigkeiten berechnet.

Hat man die mittlere Geschwindigkeit nach der Formel

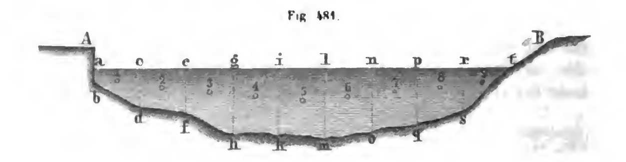
$$v = k \sqrt{\frac{q}{p} \alpha}$$

mittelbar bestimmt, so sind damit auch schon alle Messungen gemacht, welche die Wassermenge m geben, indem

$$m = vq = qk \sqrt{\frac{q}{p} \alpha}$$

ist. Wurden dagegen die verschiedenen Geschwindigkeiten, welche in einem Querprofile stattfinden, mittels des Reichenbach'schen Strommessers oder des Woltman'schen Flügels unmittelbar gemessen, und lag dabei ein Querprofil, wie das in Fig. 481 gezeichnete, zu Grunde, so ist, wenn

Fig. 481.



$f_1, f_2, f_3 \ldots f_9$ die auf einander folgenden Trapezflächen ad, cf, eh ... st und

$v_1, v_2, v_3 \ldots v_9$ die mittleren Geschwindigkeiten in diesen Trapezen

bezeichnen, die Gesammtwassermenge

$$m = f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + \ldots + f_9 v_9 = \Sigma (f v). \quad . \quad . \quad (467)$$

Will man nunmehr die mittlere Geschwindigkeit v des Flusses in dem Querprofile AB finden, so ist diese nach der Definition in §. 395 gleich

$$v = \frac{m}{F}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (468)$$

wo $F = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots f_9 = \Sigma f$ gesetzt wird.

C. Messung der Arbeitsstärke oder Wasserkraft eines Flusses.

§. 400. Wenn von der Wasserkraft eines Flusses oder Canales die Rede ist, so versteht man darunter nicht, wie man glauben könnte, die Kraft des Wassers, welche dessen Gewicht gleich ist, sondern die mechanische Wirkung, welche das fliessende Wasser in der Zeiteinheit hervorbringt. Es wird also hier keine Kraft, sondern ein durch die Kraft hervorgebrachter Effect gemessen; der Ausdruck Wasserkraft ist somit eben so ungeeignet als der Ausdruck Pferdekraft für die Masseinheit, in welcher die Stärke der Wirkung eines Flusses angegeben wird. Diese unrichtigen Bezeichnungen sollte man aus der Mechanik und aus der Technik um so mehr verbannen, als bereits andere und bessere dafür vorgeschlagen sind.

Am beachtenswerthesten in dieser Beziehung erscheinen die Vorschläge von Reuleaux (im 3. Bande des „Civilingenieurs“ S. 112 u. s. f.), welche weiter Nichts verlangen, als dass man das Wort Kraft mit Intensität oder Stärke vertausche.

Indem wir auf diese Vorschläge eingehen, verstehen wir unter Pferdestärke wie bisher unter Pferdekraft das Product aus der Kraft eines mittelstarken Pferdes und seiner Geschwindigkeit, oder dem Wege, den es in der Zeiteinheit zurücklegt. Die Kraft aber, welche ein mittleres Pferd bei 1 Meter Geschwindigkeit auszuüben im Stande ist, beträgt durchschnittlich 75 Kilogramm; daher ist das Product aus der Kraft $P = 75^k$ und der Geschwindigkeit $v = 1^m$ in der Sekunde oder

$$P v = 75^{km} \text{ in der Sekunde} = 1 \text{ Pferdestärke.}$$

Um den wörtlichen Beisatz (in der Sekunde, Minute, Stunde etc.) zu vermeiden, schlägt Reuleaux vor, die für die Zeiteinheiten gebräuchlichen Zeichen in wagrechter Lage unter die Bezeichnung der Gewichts- und Masseinheiten zu setzen, so dass also

$75^{\underline{\underline{km}}}$ mit „75^{km} in der Sekunde“ und

$10^{\underline{km}}$ mit „10^{km} in der Minute“

gleichbedeutend ist: wir werden diese Bezeichnung ebenfalls gebrauchen und also

1 Pferdestärke = $75^{\underline{\underline{km}}}$ = $510^{\underline{\underline{f\,\text{℔}}}}$ preuss. = $459^{\underline{\underline{f\,\text{℔}}}}$ bayer.

setzen, wobei f℔ „Fusspfund" bedeutet und der Beisatz: „preuss., bayer. etc." aussagt, dass preussische, bayerische etc. Fusse und Pfunde gemeint sind. Eine Pferdestärke ist somit = 510 ℔ preuss. in der Sekunde 1 preuss. Fuss, oder = 459 ℔ bayer. in der Sekunde 1 bayer. Fuss hoch gehoben.

Ferner ist

für österreichisches	Mass und Gewicht 1 Pferdestärke	= $424^{\underline{\underline{f\,\text{℔}}}}$
„ sächsisches	„ „ „ „ „	= $530^{\underline{\underline{f\,\text{℔}}}}$
„ württembergisches	„ „ „ „ „	= $560^{\underline{\underline{f\,\text{℔}}}}$
„ badisches und schweizerisches	„ „ „ „ „	= $500^{\underline{\underline{f\,\text{℔}}}}$
„ englisches	„ „ „ „ „	= $542^{\underline{\underline{f\,\text{℔}}}}$

Statt Wasserkraft eines Flusses sagen wir nunmehr Arbeitsstärke eines Flusses und drücken dieselbe in Pferdestärken von der vorstehenden Grösse aus.

§. 401. In der Technik bieten sich gewöhnlich zwei Fälle dar, in denen die Arbeitsstärke eines Wasserlaufes zu bestimmen ist. Es handelt sich nämlich entweder

a) um die Arbeitsstärke eines aufgestauten Wassers, das von einer durch die Localverhältnisse bedingten Höhe herabfallen muss, um durch seine Kraft, d. i. sein Gewicht, einen mechanischen Effect hervorzubringen; oder es handelt sich

b) um die Arbeitsstärke eines ungestauten fliessenden Wassers, also eines Baches, Flusses oder Werkcanals, in welchen unterschlächtige Wasserräder ohne Gerinne oder sog. Schiffsmühlräder eingehängt werden sollen.

Zu a. Um die Arbeitsstärke in dem ersten Falle zu bestimmen, ist es zunächst nöthig, die Wassermenge und das absolute Gefälle zwischen dem oberen und unteren Wasserspiegel genau zu kennen. Wie man die Wassermenge findet, ist aus dem Vorhergehenden bekannt; und was die Messung des absoluten Gefälles betrifft, so ist darüber lediglich zu bemerken, dass dieses durch Nivelliren unter Beobachtung derselben Vorsichtsmassregeln, welche bei der Aufnahme des Längenprofils eines Flusses zu berücksichtigen sind, geschieht. Der obere Wasserspiegel ist gewöhnlich durch den Aichpfahl (A) des Wasserwerks fixirt; der untere wird an einem eingeschlagenen Grundpfahle (B) gemessen. Hat man den Höhenunterschied u dieser zwei festen Punkte ermittelt, so staut man das Wasser bis zur Aiche und nimmt alsdann das Stichmass am unteren Pfahle B bis zum Wasserspiegel = v. Man darf nun nicht sofort das wirksame Gesammtgefälle = u + v setzen, sondern muss davon einen gewissen Betrag ε abziehen, welcher das Gefälle des Unterwassers von A bis B vorstellt. Bezeichnet α dieses Gefälle (welches zwischen 0,001 und 0,002 wechselt) und ist δ der Horizontalabstand AB, so hat man $\varepsilon = \alpha\delta$ und daher das in Rechnung zu bringende absolute Gefälle

$$h = u + v - \varepsilon = u + v - \alpha\delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (469)$$

Ist m die sekundliche Wassermenge, für welche die Arbeitsstärke des

aufgestauten Werkcanals bestimmt werden soll, und bezeichnet γ das absolute Gewicht der Raumeinheit Wasser: so beträgt das in jeder Sekunde von der Höhe h herabfallende Gewicht $m\gamma$ und folglich ist die Arbeitsstärke dieses Gewichtes oder dieser Kraft $= m\gamma h^{km}$, wenn m in Cubikmetern, h in Metern und γ in Kilogrammen für einen Cubikmeter Wasser ausgedrückt ist. Dagegen ist die Arbeitsstärke des herabfallenden Wassers $= m\gamma h^{f\text{℔}}$ preuss., wenn m in preuss. Cubikfussen, γ in preuss. Pfunden für einen Cubikfuss Wasser und h in preuss. Fussen ausgedrückt ist.

Da 1 Pferdestärke nach dem vorigen Paragraph $= 75^{km} = 510^{f\text{℔}}$, so hat man, je nachdem alle Abmessungen in französischem oder preussischem Masse und Gewichte gegeben sind, die Arbeitsstärke des in Rede stehenden Wassers gleich

$$x = \frac{m\gamma h^{km}}{75^{km}} = \frac{m\gamma h^{f\text{℔}}}{510^{f\text{℔}}} \text{ preuss.}$$

Betrüge z. B. die sekundliche Wassermenge 340 preuss. Cubikfuss und wäre das Gefälle h = 4',5 preuss., so hätte man, da das Gewicht γ eines preuss. Cubikfusses Wasser 66 ℔ preuss. beträgt:

$$x = \frac{340 \,.\, 66 \,.\, 4{,}5}{510} = 198 \text{ Pferdestärken.}$$

Von dieser Arbeitsstärke des Wassers würde eine gut construirte Turbine etwa 75% oder 148 Pferdestärken, ein unterschlächtiges Rad in geradem Gerinne aber nur etwa 33% oder 65 Pferdestärken als Nutzeffect verwerthen.

Zu b. Der zweite Fall erfordert, dass man die Wassermenge und die mittlere Geschwindigkeit des Flusses oder Canales kennt, dessen Arbeitsstärke bestimmt werden soll. Angenommen, es sey jene = m und diese = v für die Sekunde bekannt, so lässt sich die Berechnung dieses Falles auf die des ersten zurückführen, wenn man erwägt, dass zur Erzeugung der Geschwindigkeit v eine Druckhöhe h erfordert wird, welche sich aus der Gleichung

$$v = \sqrt{2gh}$$

ergibt, in der g die Beschleunigung der Schwere, also für unsere Gegenden die Grösse 9,81 Meter oder 31,25 preuss. Fuss vorstellt. Da hiernach

$$h = \frac{v^2}{2g}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (470)$$

so erhält man, wenn wieder γ das Gewicht der Raumeinheit Wasser bezeichnet, die Arbeitsstärke des Wasserlaufs in der Sekunde gleich

$$m\gamma h = m\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m\gamma}{g} \cdot v^2. \quad \ldots\ldots \quad (471)$$

Aus der Dynamik ist bekannt, dass der Quotient aus der Beschleunigung (g) in das Gewicht ($m\gamma$) eines Körpers dessen Masse vorstellt; setzen wir daher

$$\frac{m\gamma}{g} = M,$$

so folgt aus der letzten Gleichung

$$m \gamma h = {}^1/_2 \, M \, v^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (472)$$

womit nachgewiesen ist, dass die Arbeitsstärke des ungestauten Wasserlaufs nichts Anderes als seine „lebendige Kraft" ist.

Zur Berechnung der Arbeitsstärke des genannten Wasserlaufs in Pferdestärken dient somit, wenn h aus der Gleichung (470) berechnet ist, wieder die Gleichung:

$$x = \frac{m \gamma h^{\underline{\underline{km}}}}{75^{\underline{\underline{km}}}} = \frac{m \gamma h^{\underline{\underline{f\,\text{т}}}}}{510^{\underline{\underline{f\,\text{т}}}}} \text{ preuss.}$$

Zur schnellen Berechnung von h in den nachstehenden Masseinheiten dienen folgende Ausdrücke, wenn in denselben v in der gleichen Masseinheit und für die Sekunde eingesetzt wird:

$h = 0{,}05097 \, v^2$ Meter,
$h = 0{,}01600 \, v^2$ Fuss preuss.
$h = 0{,}01611 \, v^2$ „ österr.
$h = 0{,}01488 \, v^2$ „ bayer. und hannov.
$h = 0{,}01529 \, v^2$ „ badisch und schweiz.
$h = 0{,}01444 \, v^2$ „ sächsisch,
$h = 0{,}01460 \, v^2$ „ württemb.
$h = 0{,}01554 \, v^2$ „ englisch.

Fliesst in einem Bache bei einer mittleren Geschwindigkeit von 4',1 bayer. in der Sekunde eine Wassermenge von 222 Cubikfuss bayer. ab und beträgt das absolute Gewicht eines bayer. Cubikfusses Wasser 44,4 ℔ bayer., so hat man zunächst die Geschwindigkeitshöhe nach der vierten der vorstehenden Gleichungen:

$$h = 0{,}01488 \cdot 16{,}81 = 0',25$$

und hierauf die Arbeitsstärke des Baches

$$x = \frac{222 \cdot 44{,}4 \cdot 0{,}25}{459} = 5{,}4 \text{ Pferdestärken.}$$

Wir können diesen Gegenstand nicht beschliessen, ohne auf einen argen Missgriff hinzuweisen, den manche ausübende und sogar docirende Techniker bei der Berechnung der Arbeitsstärke eines ungestauten Wasserlaufs machen, indem sie aus Unkenntniss der ersten Elemente der Dynamik statt der Geschwindigkeitshöhe h des Wassers dessen Geschwindigkeit v selbst setzen. Die Folgen eines solchen unverzeihlichen Fehlers, welcher die Arbeitsstärke eines ungestauten Wassers viel zu gross angibt und den man kaum für möglich halten sollte, treffen leider immer die Wasserwerkbesitzer, welche dem Urtheile eines technischen Quacksalbers Zutrauen geschenkt haben.

Dritte Abtheilung.

Lehre von der bildlichen Darstellung des Gemessenen

oder

dem Entwerfen der Karten und Pläne.

Theorie der Plan- und Kartenzeichnung.

§. 402. Jede geometrische Aufnahme, geschehe sie auf oder unter der Erde und bestehe sie in Horizontal- oder Vertikalmessungen oder in beiden zugleich, erhält ihren vollständigen Abschluss erst durch das Bild, welches die Messungsresultate zur Anschauung bringt. Dieses Bild heisst nach §. 7 ein **Plan**, wenn es nur einen so kleinen Theil der Erdoberfläche oder der Erdrinde umfasst, dass bei dessen Darstellung die Kugelgestalt der Erde unberücksichtigt bleiben kann; dagegen eine **Karte**, wenn die darzustellende Fläche so gross ist, dass die Erdkrümmung berücksichtigt werden muss. Hieraus entspringt eine verschiedene Art der Darstellung, in so ferne die Pläne geometrisch-ähnliche, die Karten aber nur mehr oder minder verzerrte Bilder liefern, und in so ferne jene ein unmittelbares Abgreifen von Massen gestatten, diese aber stets eine (wenn auch einfache) Berechnung der Entfernungen erfordern. Es erscheint daher für die Lösung der Aufgabe dieser dritten Abtheilung: — zu zeigen, wie die Ergebnisse der auf oder unter der Erdoberfläche vorgenommenen Messungen bildlich darzustellen sind, — zweckmässig, die Theorie der Planzeichnung von jener der Kartenzeichnung zu trennen, wie hier auch geschieht.

Erster Abschnitt.

Kartenzeichnung.

§. 403. Als Grund, wesshalb die Karten keine geometrisch-treuen Abbildungen der darzustellenden Theile der Erdoberfläche seyn können, ist schon in der Einleitung die Unmöglichkeit, eine Kugelfläche und das von ihr getragene Bild in eine Ebene abzuwickeln, bezeichnet worden. Kann aber die Aehnlichkeit der natürlichen und abgebildeten Formen nicht vollständig

erreicht werden, so besteht jedenfalls für die Lehre von der Kartenzeichnung die Aufgabe, die Hilfsmittel anzugeben, durch welche die Abbildung der Erdoberfläche oder einzelner Theile derselben entweder mit der grössten Uebersichtlichkeit oder mit der kleinsten Abweichung von der Wahrheit geschehen kann.

Die Hilfsmittel, deren man sich zum Entwerfen von Karten bedient, sind zunächst gewisse Systeme von Linien, welche die auf der Erdoberfläche vorhanden gedachten Meridiane und Parallelkreise in der Ebene der Karte vorstellen, und in welche sich alle bemerkenswerthen Orte und Terrainpunkte nach ihren geographischen Längen und Breiten eintragen lassen. Diese Liniensysteme heissen Grad- oder Kartennetze und werden auf zwei verschiedenen Wegen erhalten.

Der eine Weg besteht darin, dass man die darzustellende Erdfläche so abbildet, wie sie von einem gegebenen Standpunkte (dem Aug- oder Gesichtspunkte) aus auf einer gleichfalls gegebenen Ebene (der Projections- oder Bildebene) erscheinen würde, wenn diese Ebene und der Erdkörper durchsichtig wären. Dieses Verfahren beruht auf den Grundsätzen der Perspective, wesshalb auch die durch dasselbe entworfenen Karten perspectivische Projectionen heissen. Diese Projectionen, welche nach der Lage des Augpunktes und der Bildebene verschieden benannt werden, gewähren im Vergleich zu den folgenden nur wenig Genauigkeit und lassen ohne umständliche Berechnung gar keine Vergleichung von Linien- und Winkelverhältnissen zu; dagegen aber sind sie geeignet, einen Ueberblick grosser Flächen zu gewähren, und aus diesem Grunde wendet man sie auch bei Darstellung von Hälften der Erdkugel an.

Der andere Weg, Grad- oder Kartennetze zu entwerfen, ist nur für die Darstellung kleinerer Theile der Erdoberfläche, z. B. eines Staates, einer Provinz etc. anwendbar, da er darauf beruht, den betreffenden Theil der Kugelfläche durch eine Kegel- oder Cylinderfläche zu ersetzen, welche sich der Kugel möglichst nahe anschliesst. Da sich die konischen und cylindrischen Flächen in eine Ebene abwickeln lassen, so kann man die auf ihnen gemachten Projectionen von Punkten und Linien der Erdkugel abwickelbare Projectionen nennen und sie nach der Form der abwickelbaren Fläche und der Art, die Meridiane und Parallelkreise darzustellen, unterscheiden.

Ausser den Kartennetzen erscheinen als weitere Hilfsmittel für die Abbildung von Theilen der Erdoberfläche die verschiedenen Zeichen, durch welche man entweder den Zweck und die Beschaffenheit der dargestellten räumlichen Gegenstände andeutet, oder die abgebildeten Gegenstände benennt und über gewisse, durch Figuren nicht darstellbare, Verhältnisse Aufschluss gibt. Es sind also zwei Classen von Zeichen zu unterscheiden, wovon man die ersteren Kartenzeichen, und die zweiten Kartenschrift nennen kann. Auf den meisten Karten sind zwar die angewendeten Zeichen erklärt und die Schrift ist für sich verständlich; gleichwohl aber darf es in einer

Theorie der Kartenzeichnung nicht unterlassen werden, Einiges über die Wahl der Zeichen und der Schrift zu bemerken.

A. Perspectivische Projectionen.

1. Stereographische Projectionen.

§. 404. Mit diesem Namen bezeichnet man diejenigen perspectivischen Projectionen der Erdoberfläche, bei welchen der Augpunkt in endlicher Entfernung von der darzustellenden Fläche liegt. Gewöhnlich nimmt man diesen Punkt nur auf der Erdoberfläche oder im Mittelpunkte derselben an; selten oder fast gar nie ausserhalb der Erde. Liegt der Augpunkt in einem Pole der Erde, so dient der Aequator als Projections- oder Bildebene für die jenem Punkte gegenüberliegende Halbkugel der Erde. Diese Lage des Augpunktes und der Bildebene characterisirt die stereographische Polarprojection oder auch die stereographische Projection auf den Aequator. Befindet sich der Augpunkt im Aequator, so geschieht die Projection der gegenüberstehenden Kugelfläche auf die Ebene desjenigen Erdmeridians, welcher auf dem durch den Augpunkt gezogenen Halbmesser senkrecht steht: diese Art der Abbildung nennt man die stereographische Aequatorialprojection oder auch die stereographische Projection auf einen Meridian. Wird der Augpunkt irgendwo auf der Erdoberfläche angenommen, so bildet man die ihm gegenüberliegende Kugelfläche auf der grössten Kreisebene ab, welche mit dem Halbmesser des Augpunktes einen rechten Winkel bildet. Da hier die Bildebene mit der scheinbaren Horizontalebene des Augpunktes parallel ist, so nennt man diese Darstellungsweise die stereographische Horizontalprojection oder auch die stereographische Projection auf den Horizont. Wählt man endlich den Erdmittelpunkt zum Augpunkt und eine der Mitte der darzustellenden Kugelfläche angehörige scheinbare Horizontalebene zur Bildebene, so geschieht die Abbildung durch die Centralprojection.

§. 405. Die stereographische Polarprojection ist die einfachste unter allen stereographischen Projectionen, weil sie alle Meridiane der Erde als Durchmesser des Aequators und alle Parallelkreise als concentrische Kreise erscheinen lässt (Fig. 482). Diese Behauptung bedarf wohl keines Beweises, da sie sich unmittelbar aus der geometrischen Anschauung des vorliegenden Falles ergibt. Ebenso wird man sich sofort überzeugen, dass die Polarprojection die abgebildeten Flächen in der Mitte am wenigsten, an den Rändern aber am meisten verzerrt, und dass daher die mittleren Theile einer in dieser Projection gezeichneten Karte verhältnissmässig richtiger sind als die äusseren.

Will man den Halbmesser ϱ eines auf den Aequator zu projicirenden Parallelkreises GH bestimmen, dessen geographische Breite $GCE = \varphi$ gegeben ist, so kann dieses sehr leicht geschehen. Zunächst ist nämlich,

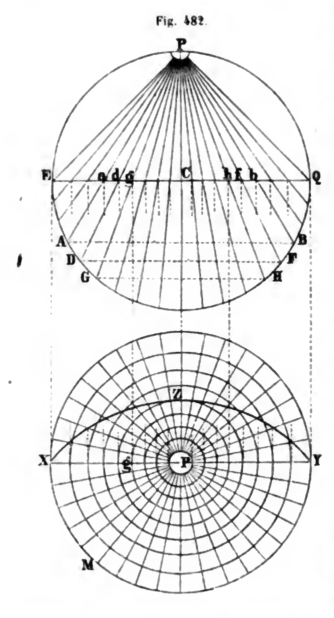


Fig. 482.

wenn r den Erdhalbmesser bezeichnet, der Halbmesser des abzubildenden Parallelkreises $= \frac{1}{2}$ GH $=$ r cos φ und es beträgt dessen Abstand vom Erdmittelpunkte r sin φ und vom Augpunkte P im Pole r $+$ r sin $\varphi =$ r $(1 + \sin \varphi)$. Es findet somit wegen der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke GHP und ghP die Proportion statt:

$$(1 + \sin \varphi) : \cos \varphi = r : \varrho,$$

woraus mit Rücksicht auf eine trigonometrische Umformung folgt:

$$\varrho = r \operatorname{tg} (45^0 - \tfrac{1}{2} \varphi). \quad . \quad (473)$$

Aus der Figur folgt übrigens auch sehr einfach $\angle$ GPC $= 45^0 - \frac{1}{2} \varphi$, und aus dem rechtwinkeligen Dreiecke gCP der vorstehende Werth von ϱ.

Mit Hilfe des berechneten und im Massstab der Karte ausgedrückten Werths von ϱ lässt sich somit der Parallelkreis zeichnen, auf dem ein gegebener Punkt von der Breite φ liegt; kennt man nun noch dessen geographische Länge λ, so kann der Meridian angegeben werden, welcher zu dieser Länge gehört und dessen Schnitt mit dem Parallelkreis die Projection des Punktes (φ, λ) auf der Karte bestimmt. Wie man umgekehrt aus einem auf der Karte gegebenen Punkte dessen Breite und Länge (φ und λ) finden kann, wenn der Kartenmassstab bekannt ist, bedarf wohl keiner Erläuterung.

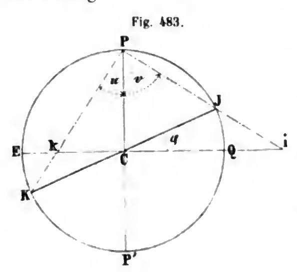


Fig. 483.

Soll in der stereographischen Polarprojection einer Halbkugel ein grösster Kreis angegeben werden, welcher eine beliebige Neigung φ gegen die Aequatorebene hat, so kann dieses leicht geschehen; denn erstens ist die Projection des genannten Kreises nach §. 406 auch ein Kreis; zweitens schneidet dieser Kreis und seine Projection den Aequator und dessen Projection in zwei leicht zu bestimmenden Punkten; und drittens lässt sich der Durchmesser der

Projection ohne Schwierigkeit construiren und berechnen. Stellt nämlich in Fig. 483 der Punkt P den Pol, EQ den Aequator, KJ den zu projicirenden grössten Kreis und PKP'Q einen Meridian vor, der auf der Schnittlinie von EQ und JK senkrecht steht: so ist klar, dass die von P aus gezogenen Gesichtslinien PK und PJ die Projectionen k und i von K und J ergeben, und dass demnach der Durchmesser KJ des zu projicirenden grössten Kreises sich in der Länge $ki = kC + Ci = \delta$ abbildet. Um δ zu berechnen hat man nach der Figur:

$$kC = PC \,.\, \mathrm{tg}\, u = r\, \mathrm{tg}\, (45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$iC = PC \,.\, \mathrm{tg}\, v = r\, \mathrm{tg}\, (45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

und mit Rücksicht darauf, dass $\mathrm{tg}\, (45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi) = \cot\, (45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)$,

$$\delta = r\, \mathrm{tg}\, (45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) + r \cot\, (45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = 2r \sec \varphi. \quad . \quad . \quad (474)$$

Der Halbmesser des Kreises ki hat somit die Länge $r \sec \varphi$.[1]

In Fig. 482 stellt die Linie XYZ die stereographische Polarprojection eines grössten Kreises, dessen Ebene mit dem Aequator einen Winkel von 40⁰ bildet, vor: denkt man sich an die Erdkugel eine Tangentialebene gelegt, welche diesem grössten Kreise parallel ist, so hat der Berührungspunkt eine geographische Breite von 50⁰ und die Tangentialebene schneidet am Sternenhimmel den scheinbaren Horizont dieses Punktes ab. Umgekehrt ist also XYZ die Projection des grössten Kreises, dessen Ebene dem scheinbaren Horizonte eines Ortes von 50⁰ Breite parallel läuft, und welche in ihrer unendlichen Erweiterung die Himmelskugel nach dem wahren astronomischen Horizonte schneidet. Da nun der Halbmesser der Himmelskugel im Verhältniss zu dem der Erdkugel unendlich gross ist, so fällt der wahre astronomische Horizont mit dem scheinbaren zusammen, und desshalb kann man die Linie XYZ auch die Projection des astronomischen Horizontes eines Orts von 50⁰ geographischer Breite nennen. Welchem Orte von 50⁰ Breite dieser Horizont angehört, wird durch die geographische Länge des Punktes Z oder des Meridians PZ bestimmt. Betrüge diese Länge z. B. 32⁰ östlich, so würde XYZ nahezu der Horizont von Prag seyn.

§. 406. Die **stereographische Aequatorialprojection** liefert ein Netz von Linien, welches aus lauter Kreisbögen besteht, mit Ausnahme des Aequators und des durch den Augpunkt gehenden Meridians, welche beide als gerade Linien erscheinen. In Fig. 484, welche eine vollständige Projection dieser Art darstellt, ist C der Augpunkt, EQ der Aequator, SCN der Meridian des Augpunktes und ANQS der Meridian, welcher als Bildebene dient.

Dass die Projectionen der Meridiane und Parallele wirklich Kreisbögen sind, lässt sich sowohl auf analytischem als geometrischem Wege leicht beweisen. Der letztere Weg ist der anschaulichere und desshalb hier vorzuziehen. Er fordert jedoch eine kurze Vorbereitung.

[1] Salneuve findet in seinem Cours de topographie etc. Nr. 413 den Halbmesser $= r \operatorname{cosec} \varphi$, was davon herrührt, dass er in seiner Entwickelung $\frac{1}{\sin 2x} = \sec 2x$ setzt, was unrichtig ist.

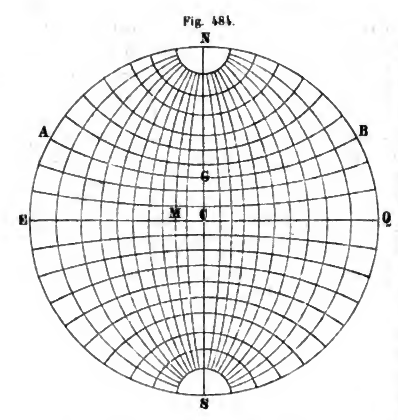


Fig. 484.

Stellt in Fig. 485 der Punkt C die Spitze, CB die kürzeste und CD die längste Erzeugende eines schiefen Kegels von kreisförmiger Basis vor; macht man CB' = CB, CD' = CD, und denkt sich durch B'D' eine zu CBD senkrechte Ebene gelegt: so schneidet diese den schiefen Kegel CBD nach einem Kreise. Denn da die Basen BD, B'D' eine Sehne S gemeinschaftlich haben, und, wenn man die Ebene B'D' um die Sehne S so dreht, dass B' auf B und D' auf D trifft, der Kegelschnitt B'D' mit dem Kreis BD im Ganzen vier Punkte gemeinsam hat: so ist klar, dass der Kegelschnitt B'D' ebenfalls nur ein Kreis seyn kann. Folglich ist auch jeder mit B'D' parallele Schnitt B''D'' ein Kreis. Die Linien B'D' und B''D'' sind, jede für sich, zu BD antiparallel, weil sie mit CB und CD Winkel bilden, welche BD beziehungsweise mit CD und CB einschliesst, oder weil sie mit BD erst parallel werden, wenn man die Ebenen CB'D' und CB''D'' um 180⁰ so dreht, dass der Schenkel CB' auf CB und CD' auf CD fällt.

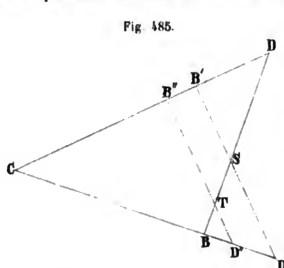


Fig. 485.

Die von dem Augpunkte ausgehenden und die Meridiane und Parallelkreise berührenden Gesichtsstrahlen bilden mit diesen lauter schiefe Kegel von kreisförmiger Basis, welche alle ihre Spitze in dem Augpunkte haben und von der als Bildebene dienenden Hauptmeridianebene geschnitten werden. Es lässt sich also auf sie der vorhergehende Satz anwenden, sobald man sich überzeugt hat, dass die schneidende Bildebene gegen den Kegelkreis so liegt, wie es Fig. 485 verlangt. Dieses ist aber der Fall; denn stellt C (Fig. 486) den Augpunkt, EQ den Schnitt der Bildebene mit der darauf senkrechtstehenden Aequatorebene CEDQ, und BD den Schnitt dieser Ebene mit einem beliebigen Meridiane vor: so ist CBD der vorhin besprochene schiefe Kegel mit kreisförmiger Basis und CB''D'' der durch die Bildebene erzeugte antiparallele

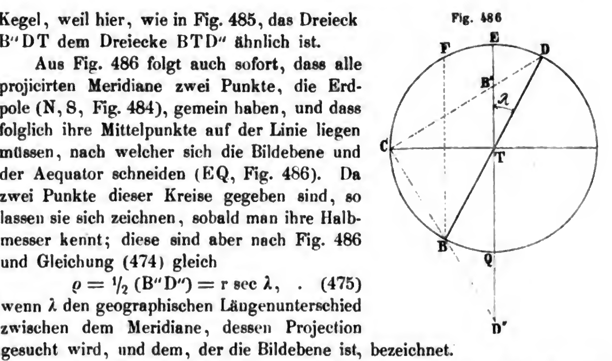
Kegel, weil hier, wie in Fig. 485, das Dreieck B″DT dem Dreiecke BTD″ ähnlich ist.

Aus Fig. 486 folgt auch sofort, dass alle projicirten Meridiane zwei Punkte, die Erdpole (N, S, Fig. 484), gemein haben, und dass folglich ihre Mittelpunkte auf der Linie liegen müssen, nach welcher sich die Bildebene und der Aequator schneiden (EQ, Fig. 486). Da zwei Punkte dieser Kreise gegeben sind, so lassen sie sich zeichnen, sobald man ihre Halbmesser kennt; diese sind aber nach Fig. 486 und Gleichung (474) gleich

$$\varrho = {}^1\!/_2\,(B''D'') = r \sec \lambda, \quad . \quad (475)$$

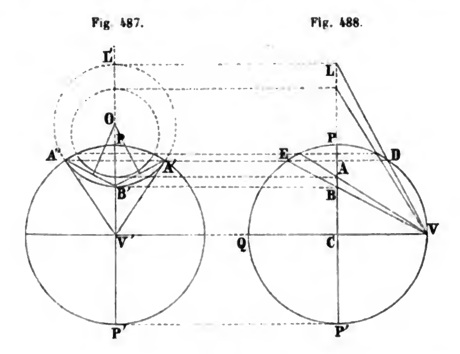
wenn λ den geographischen Längenunterschied zwischen dem Meridiane, dessen Projection gesucht wird, und dem, der die Bildebene ist, bezeichnet.

Fig. 486



Die Projectionen der Parallele, von denen schon bekannt ist, dass sie unter einer gewissen Bedingung Kreise sind, werden in ähnlicher Weise gefunden. Stellt nämlich (Fig. 488) V den Gesichtspunkt, VQ den Aequator, VPQ einen durch V gelegten Meridian, PP′ die Spur der Bildebene und

Fig. 487. Fig. 488.



DE die irgend eines Parallels vor: so bestimmt sich der projicirende Kegel durch die Strahlen VD und VE, welche die Bildebene in den Punkten L und B schneiden. Der von der Bildebene erzeugte Kegelschnitt ist aber ein Kreis, sobald der Kegel VLB dem Kegel VDE, oder auch, sobald die Basis LB der Basis DE antiparallel, d. h. das Dreieck ALD dem Dreiecke ABE ähnlich ist. Dieses ist aber der Fall; denn man überzeugt sich leicht, dass ausser den Scheitelwinkeln bei A auch die Winkel bei E und L gleich

sind. In Fig. 487, welche die Bildebene vorstellt, ist L'A''B'A' der projicirte Parallelkreis DE; in der Projection erscheint jedoch nur das ausgezogene Stück A''BA'. So wie dieses sind alle Projectionen der Parallele gegen den Aequator V'Q in Fig. 487 und EQ in Fig. 484 convex. Der Mittelpunkt des Kreises L'A''B'A' ist durch Construction leicht zu finden, weil er in der Mitte von B'L', und, wenn man L' nicht hätte, auf den Normalen liegen muss, welche in der Mitte der Sehnen A'B', A''B' errichtet werden können.

Will man den Halbmesser B'O des Parallels A'B'A'' berechnen, so kann dieses geschehen, indem man die Länge $LB = \delta'$ sucht und halbirt. Es ist aber nach Fig. 488:

$$AB = AE \,.\, \mathrm{tg}\ (DEV) = AE \,.\, \mathrm{tg}\ \varepsilon$$
$$AL = AD \,.\, \cot\ (ALD) = AD \,.\, \cot\ \varepsilon$$

und da $AD = AE = r \cos \varphi$, wenn φ die Breite des Parallels vorstellt:

$$\delta' = AB + AL = r \cos \varphi\ (\mathrm{tg}\ \varepsilon + \cot \varepsilon) = \frac{2r \cos \varphi}{\sin 2\varepsilon}.$$

Denkt man sich in Fig. 488 die Linie CD gezogen, so stehen die Centriwinkel φ und der Peripheriewinkel $DEV = \varepsilon$ auf einerlei Bogen DV; daher ist $\varepsilon = \frac{1}{2}\varphi$ und $\sin 2\varepsilon = \sin \varphi$, mithin auch

$$\delta' = LB = 2r \cot \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (476)$$

und somit der Halbmesser des Parallels $A'B''A'' = r \cot \varphi$.

Die stereographische Aequatorialprojection wird zur Darstellung der östlichen und westlichen Halbkugel der Erde benützt; ihre Abweichungen von der wahren Gestalt der abgebildeten Theile sind im Gegensatze zur stereographischen Polarprojection in der Mitte (bei C) am grössten und werden gegen die Ränder hin verhältnissmässig kleiner; überdiess bringt sie durch die Excentricität der Parallelkreise das Unbequeme mit sich, dass selbst Orte von gleicher Breite nicht mit einem und demselben Masse bestimmt werden können: strenge genommen wird jeder Punkt nur aus seinem Meridian und Parallelkreise, also mit Hilfe der Gleichungen (475) und (476) gefunden.

§. 407. Die **stereographische Horizontalprojection** ist zusammengesetzter als jede der vorhergehenden; doch erscheinen auch hier die Projectionen der Meridiane und Parallele als Kreise, deren Halbmesser und Mittelpunkte leicht bestimmt werden können, was die Construction des Netzes erleichtert. Wir werden uns zunächst mit den Projectionen der Meridiane befassen.

In den Figuren 489 und 490 stellen O, O' die Augpunkte, P, P' und Q, Q' die Erdpole, PQ, P'Q' die Erdaxe und AB, A'B' den Durchmesser des grössten Kreises vor, welcher als Bildebene dient und nach §. 404 von dem Augpunkte um 90° absteht. Die Bildebene ist in Fig. 489 durch den Kreis MANB begrenzt und in Fig. 490 stellt A'B' ihren Schnitt mit einem Meridiane O'Q'P' vor, welcher durch den Augpunkt geht.

Zieht man von der Kegelspitze O' aus die Erzeugenden O'P', O'Q', so treffen diese die Bildebene in p', q' (Fig. 490) und p, q (Fig. 489). Da alle

Erdmeridiane durch die Pole gehen, so müssen offenbar auch die Projectionen der Meridiane durch die projicirten Pole p, q gehen. Beweist man nun noch, dass die Meridianprojectionen Kreise sind, so liegen offenbar ihre Mittelpunkte auf der Linie RS, welche pq halbirt und senkrecht darauf steht.

Dass aber die Meridianprojectionen Kreise seyn müssen, folgt aus dem leicht zu erweisenden Umstande, dass die Basis P Q′ des Kegels O′P′Q′, welche allen Meridianen zukommt, dem Schnitte p′q′ durch die Bildebene A′B′ antiparallel ist (§. 406). Stellt nun p′q′ = pq eine Sehne eines jeden projicirten Meridians vor, so ist klar, dass die Senkrechte auf ihrer Mitte (RS) der geometrische Ort der Mittelpunkte aller jener Meridianprojectionen ist.

Denkt man sich diese Projectionen wie in Fig. 489 gezogen, in dem Pole p Tangenten pD, pE .... an sie gelegt und darauf Senkrechte pD′, pE′ .... errichtet: so stellen die Punkte D′, E′ .... die Mittelpunkte der von p ausgehenden Kreise vor, welche von den Tangenten pD, pE .... berührt werden.

Will man nun den Mittelpunkt der Projection pu′ eines bestimmten Meridians finden, so muss man den Winkel $Dpq = \lambda'$ kennen, den diese Projection oder ihre Tangente pD mit der Projection des Hauptmeridians AB einschliesst. Trägt man alsdann diesen Winkel bei p an pq gleich qpD an und zieht pD′ senkrecht auf pD, so ist D′ der gesuchte Mittelpunkt, aus dem der Meridian pu′q mit dem Halbmesser $\varrho = D'p$ beschrieben wird.

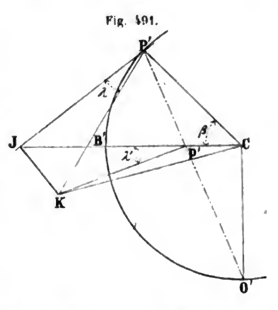
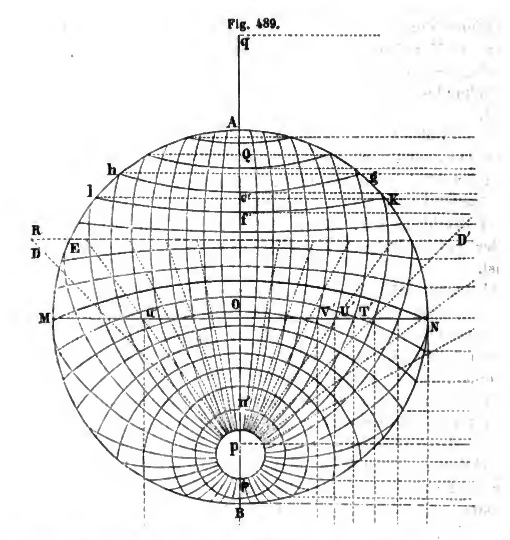


Fig. 491.

Der Winkel λ' ist aber merkwürdigerweise dem Längenunterschiede λ zwischen einem beliebigen Meridian und dem durch den Augpunkt gehenden Hauptmeridian AOB gleich.[1] Denn stellt in Fig. 491 der Punkt C den Mittelpunkt und P′ den Pol der Erde vor; ist ferner JCK ein Theil der Bildebene, welche mit der Erdaxe P′C den Winkel β einschliesst; bezeichnet weiter JP′ den Hauptmeridian und P′K einen anderen um den Winkel λ von ersterem abliegenden Meridian; und ist endlich P′O′ die Gesichtslinie des Punktes P′, also p′ das Bild von P′: so wird die Bildebene durch die Ebene JP′O′ nach Jp′ und durch die Ebene KP′O nach Kp′ geschnitten, so dass $\angle Jp'K = \lambda'$ die

[1] Wenn Salneuve in seinem Cours de topographie (Nr. 419) behauptet, zwischen λ', λ und β (der geographischen Breite des Augpunktes) bestehe die Relation: $\operatorname{tg} \lambda' = \operatorname{tg} \lambda \,.\, \sin \beta$, so irrt er darin, dass er den Scheitel des Winkels λ nach dem Mittelpunkte C der Erde und nicht nach dem perspectivischen Bildpunkte p′ (Fig. 490) projicirt.

Fig. 489.



perspectivische Projection von λ ist. Erwägt man nun, dass der Winkel $CP'O' = P'O'C = 45^0 - \frac{1}{2}\beta$ und $P'p'J = p'CP' + CP'O' = 45^0 + \frac{1}{2}\beta$; dass ferner $CP'J = 90^0$, also $p'P'J = 90^0 - CP'O' = 45^0 + \frac{1}{2}\beta = P'p'J$: so ist das Dreieck $JP'p'$ gleichschenkelig, also $JP' = Jp'$. Da nun vermöge der Construction die beiden Dreiecke JKP' und JKp' bei J rechtwinkelig sind und die gleichen Seiten JK und JP', Jp' haben; so sind dieselben congruent, und folglich ist der Winkel $\lambda' = \lambda$, was zu beweisen war.

Soll die Länge des Krümmungshalbmessers $\varrho = D'p$ berechnet werden, so hat man dazu für's Erste den mit Hilfe der Fig. 489 leicht zu bildenden Ausdruck:

$$2\varrho \sin \lambda' = p'q' = pq,$$

und hiernächst nach Fig. 490 die Länge $p'q' = pq = p'C + Cq'$. Da aber

$$p'C = r \operatorname{tg} (CO'p') = r \operatorname{tg} (45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)$$
$$q'C = r \operatorname{tg} (CO'q') = r \cot (45^0 - \tfrac{1}{2}\beta),$$

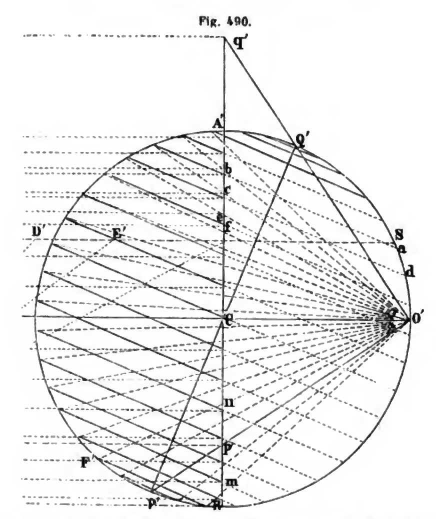
so erhält man durch Addition und einfache Reduction:

$$p'q' = \frac{2r}{\sin(90^0 - \beta)} = \frac{2r}{\cos\beta} = 2r \sec \beta;$$

mithin auch durch Substitution dieses Werthes von $p'q'$ in die Grundgleichung:

$$\varrho = \frac{r}{\cos\beta \sin\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (477)$$

Fig. 490.



Für $\beta = 0$, d. h. wenn der Augpunkt im Aequator liegt, geht die stereographische Horizontalprojection in die stereographische Aequatorialprojection über und man erhält

$$\varrho = \frac{r}{\sin \lambda'}.$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit dem in Nr. 475 für ϱ gefundenen, so existirt in so ferne eine Verschiedenheit, als dort

$$\varrho = r \sec \lambda = \frac{r}{\cos \lambda}$$

steht. Dieser Unterschied verschwindet aber, wenn man bedenkt, dass das λ des letzteren Ausdrucks das Complement von λ' im ersteren ist; dass somit $\lambda' = 90^0 - \lambda$ und folglich $\sin \lambda' = \cos \lambda$ ist. Es geht also, wie es seyn muss, für $\beta = 0$ die Horizontalprojection bezüglich der Meridiane in die Aequatorialprojection über.

Dass auch die Projectionen der Parallele Kreise sind, lässt sich wie folgt beweisen. Stellt O in Fig. 492 den Gesichtspunkt, OMN einen durch O gelegten und auf der Bildebene MN senkrecht stehenden grössten Kreis, PQ die Erdaxe und UV den Schnitt eines Parallels vor: so geben offenbar die Gesichtslinien OV, OU die Bilder v, u der Endpunkte des Parallelendurchmessers VU, und es wird der Perspectivkegel VOU von der Bildebene MN antiparallel geschnitten, weil das Dreieck vmV dem Dreiecke umU

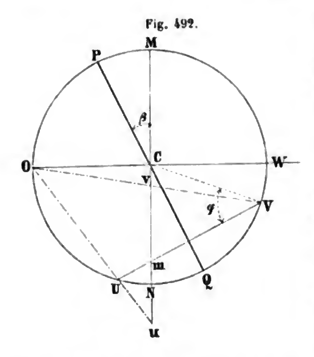


Fig. 492.

wegen der gleichen Winkel bei m und jener bei V und u ähnlich ist. Liegt aber vu antiparallel zu VU, so sind auch die Schnitte der Bildebene mit dem Kegel OVU nach §. 406 Kreise.

Nach dieser Vorbereitung ist die Zeichnung der perspectivischen Parallele nicht schwierig. Denn handelt es sich z. B. um das Parallel B'F' (Fig. 490), so sind n, m die Bilder der Endpunkte des Durchmessers B'F': halbirt man nun mn und projicirt den Mittelpunkt auf die Linie AB der Fig. 489, so hat man den Mittelpunkt des Perspectivparallels Bn', welches mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}$ (mn) beschrieben wird. Von dem Parallel ab (Fig. 490) kann der Schnittpunkt des Strahls O'a mit der Bildebene A'B' nicht erhalten werden, man muss sich desshalb begnügen, die ihm entsprechende Projection hc'g (Fig. 489) aus den drei Punkten c', h, g zu zeichnen. Der Punkt c' ergibt sich als das eine Ende des Durchmessers von ab wie bisher; h und g aber entsprechen dem Schnitte b der Ebene des Parallels ab mit der Axe A'B' und erscheinen auf der Bildebene offenbar am Kreise ANBM. Dass alle Parallelen-Mittelpunkte auf der Linie AB liegen müssen, ist wohl für sich klar.

Zur Berechnung des Halbmessers ϱ' der projicirten Parallelkreise kann man sich der Fig. 492 bedienen. Der Durchmesser $2\varrho'$ ist nämlich = vu = Cu — Cv, und da nach der Figur:

$$Cu = r \operatorname{tg} (COu) = r \operatorname{tg} (90^0 - \tfrac{1}{2} [\varphi + \beta]) = r \cot \tfrac{1}{2} (\varphi + \beta),$$
$$Cv = r \operatorname{tg} (COv) = r \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (VCW) = r \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\varphi - \beta),$$

so folgt

$$\varrho' = \frac{r \cos \varphi}{2 \sin \frac{1}{2} (\varphi + \beta) \cos \frac{1}{2} (\varphi - \beta)} = \frac{r \cos \varphi}{\sin \varphi + \sin \beta}. \quad . \quad (478)$$

Ist $\beta = 0$, so wird $\varrho' = r \cot \varphi$, was mit der Gleichung (476) übereinstimmt und übereinstimmen muss, da die stereographische Aequatorialprojection nur ein besonderer Fall der stereographischen Horizontalprojection ist. Dasselbe gilt von der stereographischen Polarprojection; denn setzt man in den Gleichungen (477) und (478) $\beta = 90^0$, so wird, den Entwickelungen des §. 405 entsprechend:

$$\varrho = \infty \text{ und } \varrho' = r \operatorname{tg} (45^0 - \tfrac{1}{2} \varphi).$$

§. 408. Die **Centralprojection** liefert Netze, in welchen die Meridiane als gerade Linien erscheinen, die sich im Pole der Erde schneiden, während die Parallele je nach der Lage der Bildebene als Theile von Kreisen, Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln erscheinen. Als Kreise stellen sich die Parallele, wie man leicht einsieht, nur dann dar, wenn die Bildebene den

Pol berührt. In diesem Falle, und wenn gleichzeitig nur ein mässiges Stück der Erdoberfläche in der Umgebung eines Pols abzubilden wäre, liesse sich die Centralprojection mit Vortheil anwenden; in jedem anderen Falle bietet sie viele Unbequemlichkeit wegen der Zeichnung der Parallele und grosse Unvollkommenheit an den Rändern der Karte. Desshalb wendet man sie fast gar nicht an, und darum findet sie auch hier keine weitere Beachtung.

2. Orthographische Projectionen.

§. 409. Wenn man den Gesichtspunkt in unendlicher Entfernung auf der Normale zur Bildebene annimmt, so sind alle projicirenden Linien unter sich parallel und senkrecht zur Bildebene; die hierdurch entstehenden Kartennetze nennt man orthographische Projectionen, und man unterscheidet nach der Lage des Augpunktes: Polar-, Aequatorial- und Horizontalprojectionen, oder Projectionen auf den Aequator, auf einen Meridian, oder auf einen grössten Kreis, welcher der Horizontalebene des in der Mitte der Karte gelegenen Orts parallel und folglich der wahre astronomische Horizont dieses Orts ist.

Im Allgemeinen sind die orthographischen Projectionen noch unvollkommener als die stereographischen, wesshalb sie nur wenig Anwendung finden, den Fall ausgenommen, wo es sich nicht um die Abbildung einer Halbkugel, sondern nur eines kleinen Theils der Erdoberfläche handelt; denn in diesem Falle würde die Bildebene theilweise mit der Kugelfläche zusammenfallen und nur an den Rändern abstehen, woselbst kleine Verzerrungen der Bilder stattfänden.

§. 410. Die **orthographische Polarprojection** ist in den Figuren 493 und 494 dargestellt und man macht sich sofort aus dem Anblick klar, dass die Meridiane als Durchmesser (AQ, ER) der durch den Aequator (EARQ, E'R') vorgestellten Bildebene, und die Parallele als concentrische Kreise erscheinen, deren Mittelpunkte das Bild des Erdpols ist. Die abgebildeten Meridiane haben gegen einander dieselbe Neigung (λ) wie die wirklichen, und die Halbmesser der Parallelkreise (z. B. BD, B'D') sind $r \cos \varphi$, wenn φ die geographische Breite des Parallels bezeichnet.

§. 411. Die **orthographische Aequatorialprojection** ist in den Figuren 495 und 496 dargestellt. Da der Augpunkt in unendlicher Entfernung auf der Aequatorebene liegt, so laufen alle Gesichtslinien dieser Ebene parallel und folglich erscheinen die Parallele (AB), wie der Aequator, (EQ) als gerade Linien. Die Meridiane bilden mit den auf der Bildebene senkrecht stehenden Gesichtslinien schiefe Cylinderflächen von kreisförmiger Basis: die Schnitte dieser Cylinder durch die Bildebene sind folglich Ellipsen, welche alle durch die Pole gehen und daher die Erdaxe SN zur grossen Axe haben; die kleine Axe ergibt sich, wenn man den auf der Erdaxe senkrecht stehenden Durchmesser des Meridians auf die Bildebene projicirt. In den folgenden Figuren ist für den Meridian M'C' die zugehörige

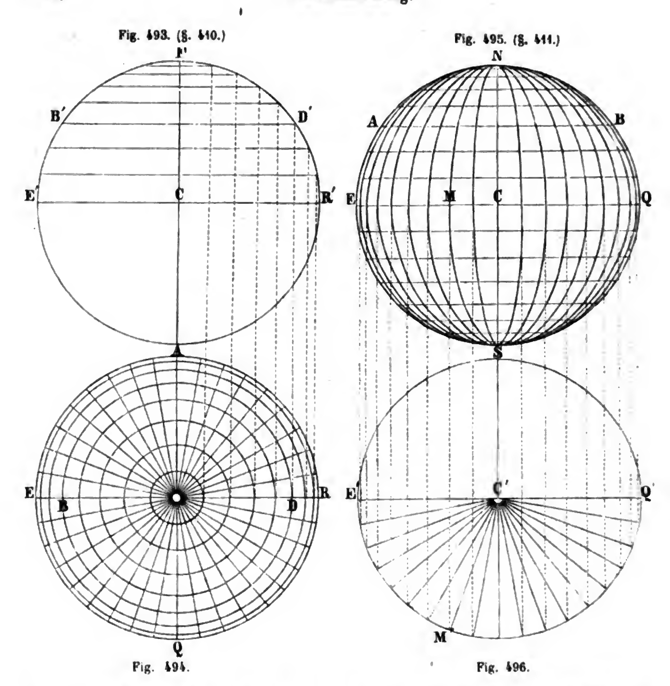


Fig. 494.

Fig. 496.

kleine Halbaxe = MC. Mit Hilfe der beiden Axen können die Ellipsen in bekannter Weise aufgetragen werden; genauer aber erhält man sie aus ihren Coordinaten. Sieht man nämlich die grosse Axe SN (Fig. 495) als Abscissenaxe an, so stellen die Projectionen der Parallele (AB, EQ) die Richtungen der Ordinaten vor. Handelt es sich nun um irgend einen Meridian (M'C'), dessen Längenunterschied gegen die Bildebene = λ' ist, so sind die beiden Halbaxen der Ellipse, welche ihn vorstellt, r und r cos λ, und mithin findet, wenn C der Mittelpunkt der Ellipse und der Anfang der Coordinaten ist, für die Ellipse SMNS die Gleichung statt:

$$y^2 + x^2 \cos^2 \lambda = r^2 \cos^2 \lambda.$$

Berücksichtigt man jedoch, dass $x = r \sin \varphi$, wenn φ die Breite eines Parallels (hier einer Ordinate), so geht vorstehende Gleichung über in

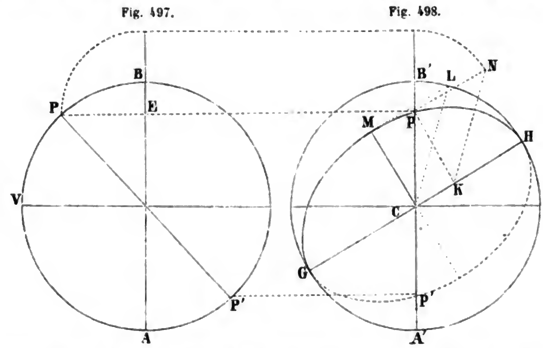
$$y = r \cos \lambda \cos \varphi, \quad \ldots \ldots \quad (479)$$

woraus man also auf sehr einfache Weise die Lage eines Punktes findet,

dessen geographische Länge λ gegen die Bildebene und dessen Breite φ bekannt sind.

§. 412. Die **orthographische Horizontalprojection** setzt als Augpunkt einen unendlich weit entfernten Punkt des Erdhalbmessers, welcher durch die Mitte des abzubildenden Landes geht, und als Bildebene den grössten Kreis, der auf diesem Halbmesser senkrecht steht, voraus.

Um die Projectionen der Meridiane zu finden, denke man sich in Fig. 497 durch einen beliebigen Punkt V, der den Mittelpunkt des abzubildenden Landes vorstellen kann, einen Meridian VPBP′A gelegt und



darauf eine senkrechte Ebene AB errichtet, welche der Horizont von V ist. Die Linie PP′ stelle die Erdaxe, also die Linie vor, welche mit dem Punkte V den Meridian VPP′ bestimmt. Bezeichnet Fig. 498 die auf diesem Meridiane nach AB senkrecht stehende Bildebene, so sind auf ihr p, p′ die Projectionen der Erdpole P, P′, durch welche nothwendig alle Meridiane gehen müssen. Da die Projectionen dieser Meridiane aus Schnitten von schiefen Kreis-Cylinderflächen entstehen, so sind dieselben Ellipsen, von denen man jetzt bereits zwei Punkte p und p′ kennt; und da alle Meridiane durch die Linie PP′ (Fig. 497) gehen und durch die Bildebene AB geschnitten werden, so ist klar, dass der Schnitt dieser Ebene mit jedem Meridian nur ein Durchmesser desselben und zugleich auch nur die grosse Axe seiner elliptischen Projection seyn kann. Diese Axe findet man aber wie folgt durch Construction.

Sieht man den durch V gelegten Meridian VPP′ als den Hauptmeridian an und bezeichnet λ den geographischen Längenunterschied zwischen diesem und dem Meridian, dessen Projection GMpHp′ gesucht wird; ist ferner β die geographische Breite des Punktes V und λ^0 die Projection des Winkels λ auf die Bildebene: so besteht die Relation

$$\operatorname{tg} \lambda^0 = \operatorname{tg} \lambda \sin \beta; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (480)$$

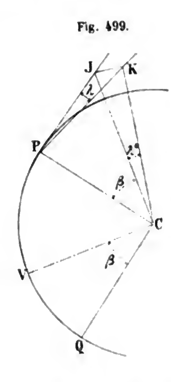


Fig. 499.

denn nach Fig. 499 ist, — wenn PJ, PK die Tangenten an die vorhin genannten Meridiane im Pole P und JC, KC ihre Projectionen auf der durch AB gehenden, senkrecht zu VPP' stehenden Bildebene, also JPK, JCK die Winkel λ, λ^0 sind, — aus dem bei J rechtwinkeligen Dreiecke PKJ:

$$JK = PJ \,.\, \operatorname{tg} \lambda,$$

und aus dem Dreiecke JKC, welches ebenfalls bei J einen rechten Winkel hat:

$$JK = JC \,.\, \operatorname{tg} \lambda^0.$$

Erwägt man nun, dass $PCJ = \beta$ und folglich $PJ = JC \,.\, \sin \beta$ ist, so folgt aus den vorstehenden zwei Gleichungen die mit (480) bezeichnete, deren Richtigkeit somit feststeht.

Da der Durchmesser A'B' in Fig. 498 die Projection des ersten Meridians VPP' ist, so braucht man, um den Schnitt des Meridians λ mit der Bildebene zu erhalten, nur den aus Gleichung (480) berechneten Winkel λ^0 an A'B' in C anzutragen und einen Durchmesser zu ziehen, so ist dieser die grosse Axe des zu projicirenden Meridians. Angenommen, es sey $B'CH = \lambda^0$, so ist GH die gesuchte grosse Axe und die Senkrechte CM die Richtung der kleinen Axe. Die Länge CM derselben ergibt sich, wenn man auf die in der Figur durch punktirte Linien angedeutete Weise $pKN = \lambda$ macht, CL parallel zu KN zieht und den Schnittpunkt L nach M projicirt.

Will man, nachdem die Richtung der grossen Axe (GH) der Projection eines Meridians mit Hilfe des aus der Gleichung (480) gesuchten Winkels λ^0 bestimmt ist, die Gleichung jener Projection (GMpHp') in Bezug auf ihre Axen ($CH = r$ und $CM = r \cos \lambda$) aufstellen, so hat man ganz einfach:

$$y = \cos \lambda \sqrt{r^2 - x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (481)$$

Werden hieraus für gegebene oder angenommene Werthe von x die zugehörigen y berechnet, so lassen sich alle beliebigen Punkte einer Meridianprojection genau auftragen.

Läge es in der Absicht des Verfertigers eines Netzes nach der orthographischen Horizontalprojection, alle Meridianpunkte nur auf ein Axensystem, nämlich auf die zu einander senkrechten Durchmesser A'B' und V'C (wovon der erste den Hauptmeridian vorstellt) zu beziehen, so könnte dieses geschehen, indem man die neuen auf CV' gezählten Abscissen mit x' und die auf CB' genommenen Ordinaten mit y' bezeichnet und, da Winkel $MCB' = 90^0 - \lambda^0$, nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie setzt:

$$x = x' \sin \lambda^0 - y' \cos \lambda^0,$$
$$y = x' \cos \lambda^0 + y' \sin \lambda^0.$$

Was schliesslich die Projectionen der Parallele betrifft, so werden diese aus demselben Grunde wie die der Meridiane auch Ellipsen; es kann sich

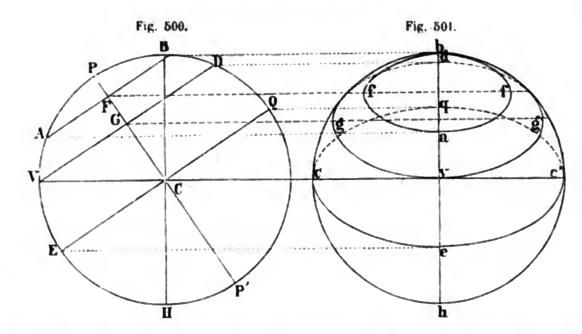


Fig. 500. Fig. 501.

also hier nur noch um die nähere Bestimmung derselben handeln. Stellt in Fig. 500 der Kreis VPP′ einen durch den Pol V der Bildebene BH gelegten und zu dieser Ebene senkrecht stehenden grössten Kreis, PP′ die Erdaxe und AB den Schnitt der Ebene eines Parallels mit der des Meridians VPP′

Fig. 502.

vor: so ist klar, dass der mit der Bildebene BH parallele Durchmesser des Parallels, dessen Projection in Fig. 500 der Punkt F ist, in der Projection auf die Bildebene (Fig. 501) in wahrer Grösse erscheint, und dass also, wenn man ff = AB macht, ff die grosse Axe der Ellipse ist, nach welcher sich das Parallel AB projicirt. Die kleine Axe ad erhält man durch Projection des Durchmessers AB auf BH oder bh. Das Parallel VD, welches durch den Pol der Bildebene geht, erscheint in seiner Projection als die Ellipse gvg'd und der Aequator EQ als die Ellipse cec'q.

Ein vollständiges Bild einer in orthographischer Horizontalprojection dargestellten Halbkugel liefert Fig. 502, in welcher P den Pol, PE den Hauptmeridian, PM einen anderen um 20° entfernten Meridian, AEQ den Aequator und DF ein Parallel von 30° geographischer Breite bezeichnet.

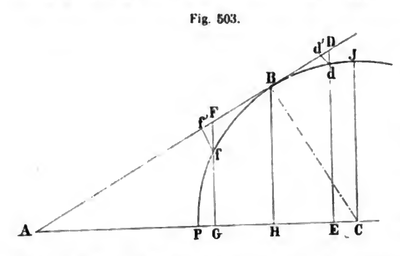
B. Abwickelbare Projectionen.

1. Conische Projectionen.

§. 413. Allen conischen Projectionen liegt die Idee zu Grunde, die Meridiane und Parallelkreise zuerst auf einem Kegel darzustellen, welcher den abzubildenden Theil der Kugelfläche nach dem mittleren Parallelkreis berührt, und alsdann diesen Kegel mit seinem Liniensysteme abzuwickeln. Da jedoch diese Methode, Kartennetze zu entwerfen, eben so wenig als irgend eine andere fehlerfrei ist, so hat man sie nach Beschaffenheit der Fehler, welche vermieden und jener, welche geduldet werden sollten, verschieden abgeändert, wie aus den folgenden Paragraphen zur Genüge hervorgeht.

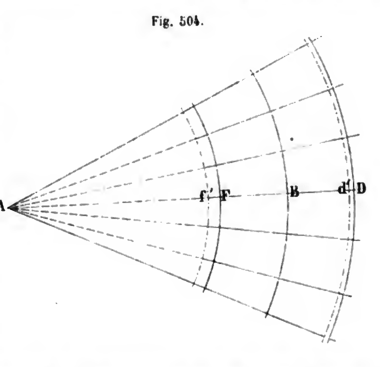
Um die Grundidee näher zu erläutern, sey PBJ in Fig. 503 ein Viertel eines Meridians und BH der Schnitt des mittleren Parallels mit der Meridianebene; DE und FG seyen die äussersten, von BH gleich weit entfernten Parallele des darzustellenden Stücks der Erdoberfläche. Zieht man an den Punkt B eine Tangente, welche der Erdaxe in dem Punkte A begegnet, so ist AD die Erzeugende des Kegels, auf dessen Mantelfläche (und zwar zwischen den Ebenen DE und FG) das Kartennetz gezeichnet werden soll. Auf diesem Kegel werden die Meridiane als Erzeugende, die Parallelkreise aber als senkrechte Querschnitte erscheinen und die Abwickelung wird sich auf die in Fig. 504 angedeutete und leicht zu erklärende Weise darstellen.

Fig. 503.



Aus der Vergleichung dieser beiden Figuren entnimmt man sofort, dass zwar die Netzvierecke wie auf der Kugel rechtwinkelig sind und die Punkte von einerlei geographischer Breite auf dem Bilde dieselben relativen Entfernungen wie auf der Erdoberfläche haben; dass aber die Längen (BD, BF ....) dieser Vierecke für gleiche Breitendifferenzen verschieden und um so kleiner sind, je näher sie am Pole liegen, während sie gegen den Aequator hin immer länger werden. Auch findet man leicht, dass — mit Ausnahme des mittleren Parallels — auf allen Parallelen des Netzes die Längendifferenzen grösser sind als auf den gleichnamigen Parallelen der Erdkugel.

Fig. 504.

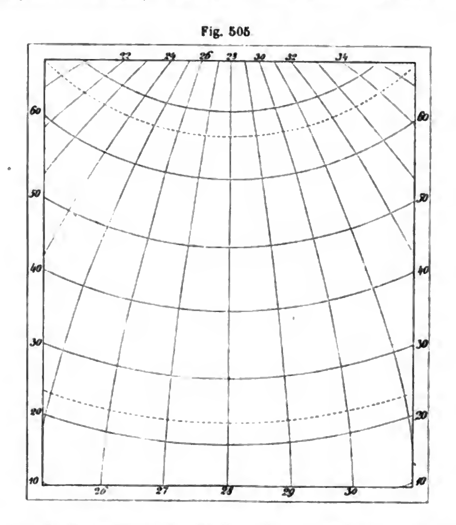


Um diese beiden Fehler theilweise zu verbessern, trägt man in Fig. 504 von dem Punkte B aus die Längen der Bögen Bd = Bd' und Bf = Bf' ab und beschreibt in der Abwickelung die punktirten Bögen d' und f' mit den Halbmessern Ad' und Af'. Dadurch erreicht man den Vortheil, dass die Längen Bd', Bf' .... der Netzvierecke denen auf der Kugel gleich und die Abweichungen in den geographischen Längen kleiner werden als vorhin.

§. 414. **Projection von Bonne.** Wenn man die geographischen Längenunterschiede des Netzes mit den wirklich stattfindenden übereinstimmen lassen will, so muss man (Fig. 505) auf jedem der construirten Parallelkreise (20, 30, 40 ....) von dem mittleren Meridiane (28) aus die wahren Grössen der geographischen Längengrade (28—27, 28—29 ....) abtragen und die einem Meridiane (27, 29 ....) angehörigen Punkte durch eine stetige Curve verbinden, welche dann dessen Projection darstellt. Zwar sind diese Meridiane keine Kegelelemente mehr, aber sie gewähren ausser dem eben bezeichneten Vortheile auch noch den, dass die Flächeninhalte der Netzvierecke auf der Karte den gleichnamigen auf der Kugel genau proportional sind. Von kleinen Fehlern ist selbstverständlich auch dieses Netz nicht frei, und es sind hier vor allen die Abweichungen der Winkel der Vierecke von 90° zu erwähnen; diese Abweichungen betragen jedoch so wenig, dass man sie bei nicht übermässiger Ausdehnung der Karte übersehen und die Entfernung zweier Punkte ohne erhebliche Differenz nach einem gemeinschaftlichen Meilenmassstabe bestimmen kann. Dieser Umstand ist der in Rede stehenden Projection sehr günstig, und man kann wohl behaupten,

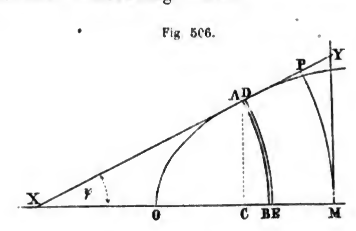
dass keine andere so häufig gebraucht wird als diese, welche man die Bonne'sche oder modificirte Flamsteed'sche Projection nennt. In §. 323 ist auch bereits eine Anwendung von ihr gemacht, da sie der dortselbst besprochenen topographischen Karte von Thüringen, und ebenso der von Bayern, Preussen, Frankreich und anderen Ländern zu Grunde

Fig. 505



liegt. Wegen ihrer Wichtigkeit soll sie etwas ausführlicher als die übrigen conischen Projectionen behandelt und dabei auch die sphäroidische Gestalt der Erde berücksichtigt werden.

Fig. 506.



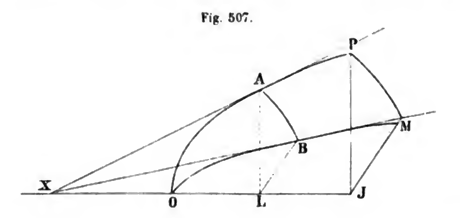
Bestimmen wir zunächst die Coordinaten eines seiner geographischen Lage nach gegebenen Punkts in Bezug auf zwei rechtwinkelige Axen. Diese Axen seyen nach Fig. 506 der mittlere Meridian MX für die Abscissen und der mittlere Parallelkreis MP für die Ordinaten; der Ursprung der Coordinaten liegt somit im Mittelpunkte der Karte, und es sey

β die geographische Breite dieses Punktes M,
φ die geographische Breite irgend eines anderen Punktes A, und
λ der geographische Längenunterschied zwischen den Punkten A und M im Bogenmass.

Unsere Aufgabe ist, aus diesen Stücken und den bekannten Erddimensionen die Coordinaten des Punktes A ($MC = x$ und $AC = y$) zu finden.

In Fig. 507 sey O der Pol der Erde, MBO der mittlere Meridian, PAO der Meridian des Orts A, so dass also die elliptischen Bögen MO

Fig. 507.



und AO zu den Complementen der Breiten β und φ gehören und ALB $= \lambda$ ist; ferner sey MX Tangente des mittleren Meridians in dem Punkte M und folglich zugleich der Halbmesser des mittleren Parallels MP auf der Karte (Fig. 506). Bezeichnet nun weiter

a die halbe grosse Axe der die Erdoberfläche erzeugenden Ellipse, also den Halbmesser des Aequators,
e die Excentricität dieser Ellipse,
ϱ den Halbmesser MX des Kartenparallels MP von der Breite β.
ϱ' den Halbmesser des Kartenparallels AB von der Breite φ,
δ die Differenz $\varphi - \beta$ der geographischen Breiten von A und M,
α die Länge des Meridianbogens MB, und endlich
ψ den Winkel AXB, welcher durch den Bogen $AB = \varepsilon$ gemessen wird:

so ist als bekannt anzunehmen, dass die Länge der Tangente $MX = \varrho$ an die bezeichnete Ellipse ausgedrückt wird durch

$$\varrho = \frac{a \cot \beta}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}}, \quad \ldots \ldots \quad (482)$$

und dass die Länge des Meridianbogens MB zwischen den geographischen Breiten φ und β gleich ist

$\alpha = a\,(1 - {}^1/_2 + {}^1/_{16}\,A^2)\,\delta - {}^3/_2\,a\,A \cos\gamma \sin\delta + {}^{15}/_{32}\,a\,A^2 \cos 2\gamma \sin 2\delta$,
wobei A die Abplattung und γ die Winkelsumme $\varphi + \beta$ oder $2\beta + \delta$ bedeutet. Den Bogen α braucht man übrigens nicht erst zu berechnen, da es Tafeln gibt, welche die Länge des Meridianbogens vom Aequator bis zu einem beliebigen Parallel darstellen, aus denen also durch Subtraction der Bogenlängen der Werth von α gefunden werden kann. Die Tafel Nr. I

des Anhangs enthält diese Längen von 30 zu 30 Minuten; in dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1852 sind sie aber von 10 zu 10 Minuten aufgeführt, und für zwischenliegende Breiten können die zugehörigen Werthe leicht eingeschaltet werden. Wir sehen daher α als eine gegebene Grösse an und erhalten somit den Halbmesser ϱ' des Kartenparallels AB, welcher um die Länge α kleiner ist als ϱ, aus der Gleichung:

$$\varrho' = \varrho - \alpha. \quad \ldots \quad (483)$$

Nach der Bonne'schen Projection ist der Kartenparallelbogen AB dem wirklichen Bogen AB auf dem Sphäroide (Fig. 507) gleich; demnach auch arc AB = arc ε = BL . λ, oder, wenn man den aus der höheren Geometrie ebenfalls bekannten Werth des Halbmessers BL einsetzt:

$$\varepsilon = \frac{a \lambda \cos \beta}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}}. \quad \ldots \quad (484)$$

Mit Hilfe dieses Werthes erhält man die Grösse des Winkels AXB = ψ im Bogenmass (d. i. für den Halbmesser 1) auf bekannte Weise gleich

$$\psi = \frac{a \lambda \cos \beta}{\varrho' \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \beta)}} \quad \ldots \quad (485)$$

Damit aber ergeben sich sofort aus Fig. 506 die Coordinaten des Punktes A, nämlich

$$x = MC = \varrho - \varrho' \cos \psi \quad \ldots \quad (486)$$

$$y = AC = \varrho' \sin \psi. \quad \ldots \quad (487)$$

Hat der Punkt M eine geographische Breite β von 50° 36′ und der Punkt A eine Breite $\varphi = 51°$; ist ferner der geographische Längenunterschied zwischen M und A = 1° 20′, log a = 6,5148235 und log e = 8,9122052; und bedenkt man, dass die Gleichung (485) den Winkel ψ auch im Gradmass liefert, sobald statt des Bogens λ der ihm entsprechende Winkel von 1° 20′ gesetzt wird: so erhält man nach den vorstehenden Formeln und der Tafel Nr. I:

ϱ = 2 693 095,19 Toisen.
α = 22 828,02 „
ϱ' = 2 670 267,17 „
ψ = 1° 2′ 20″
x = 23 231,79 „
y = 48 427,67 „

Hätte man die Erde als Kugel vom Halbmesser r = 3 266 608ᵗ (log r = 6,514 0964) angenommen, so würde man nahezu dieselben Werthe gefunden haben: die Unterschiede sind also unbedeutend, und man kann desshalb, so lange es sich nicht um Karten in grossen Massstäben handelt, recht wohl bei der Annahme, dass die Erde eine Kugel sey, verharren.

Die oben aufgestellte Behauptung, dass die Flächen der Netzvierecke den gleichnamigen auf der Kugel proportional seyen, lässt sich wie folgt beweisen. Denkt man sich auf der im natürlichen Massstabe gezeichneten Karte (Fig. 506) einen Bogen DE unendlich nahe an AB gezogen, so

kann man, mit Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung, das Flächenelement ABDE eines Netzvierecks gleich

$$dF = AB . BD = \varepsilon . d\alpha$$

setzen. Auf dem Erdellipsoide (Fig. 507) ist (wenn man sich wie vorhin den Bogen DE unendlich nahe an AB gezogen denkt) das Flächenelement des Netzvierecks ebenfalls durch ABDE vorgestellt, und es ist nach bekannten Annahmen der Differentialrechnung, wenn dieses Element mit dF' und der Halbmesser des Parallels AB mit ϱ'' bezeichnet wird:

$$dF' = AB. DE = \lambda \varrho''. d\alpha = \varepsilon d\alpha;$$

es ist folglich auch für eine Karte im natürlichen Massstabe, wenn dF und dF' zwischen gleichen Grenzen integrirt werden, $F = F'$ und für eine im m^{ten} Theile der natürlichen Grösse gezeichnete Karte $m^2F = F'$, d. h. die Kartenvierecke sind den gleichnamigen auf dem Erdsphäroide proportional, was zu beweisen war.

§. 415. **Projection von Flamsteed.** Nachdem im vorigen Paragraph bereits von der „modificirten" Flamsteed'schen Projection die Rede war, ist hier noch Einiges über die ursprüngliche Projection von Flamsteed zu bemerken. Dieselbe besteht darin, dass man auf dem mittleren Meridiane die Längen der Meridiangrade abträgt; in den Theilungspunkten Senkrechte errichtet, welche die Parallele vorstellen; auf diesen die entsprechenden Längen

Fig. 508.

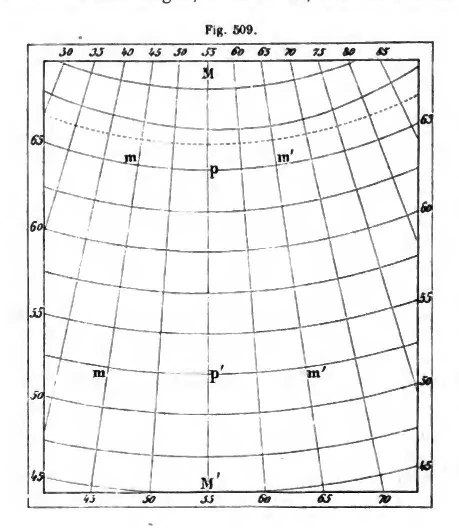
der Parallelgrade vom mittleren Meridian aus abmisst und durch die zusammengehörigen Theilpunkte krumme Linien zieht, welche die Meridiane bezeichnen.

Dieses Kartennetz weicht für Länder, die in der Nähe des Aequators liegen, nur wenig von der Wirklichkeit ab; die Abweichungen wachsen aber rasch mit dem Vorrücken des Landes gegen den Pol; darum wendet man es auch nur für Tropengegenden (z. B. für Karten von Afrika) an, wie auch Fig. 508 zeigt, in welcher M M der mittlere Meridian, EQ der Aequator, m m' ein Parallel und m m, m' m' je ein Meridian ist.

Dass für diese Zonen die Abweichungen nicht bedeutend seyn können, geht aus Gl. (482) hervor, welche für $\beta = 0$ den Halbmesser des Aequators auf der Karte $\varrho = \infty$ liefert; also wird der Aequator auch bei der vorigen Projection eine Gerade; für $\beta = 10^0$ erhält man $\varrho = 18\,525\,826{,}00$ und für $\beta = 20^0$ den Halbmesser $\varrho = 8\,974\,918{,}20$ Toisen; die Krümmungen der zu diesen Breiten gehörigen Parallele sind also auch nach der verbesserten Flamsteed'schen Projection nur schwach, folglich können auch bei geraden Parallelen die Fehler nicht gross seyn. Genauere Bestimmungen dieser Fehler übergehen wir wegen der seltenen Anwendung der Flamsteed-schen Projection.

§. 416. **Projection von De l'Isle.** Das Verfahren von De l'Isle, ein conisches Kartennetz anzufertigen, besteht darin, dass man von dem mittleren

Fig. 509.



Meridiane aus die Parallelkreise in derselben Weise wie nach Bonne (§. 414) beschreibt, dann aber auf den zwei Parallelkreisen p, p′ (Fig. 509), welche die äusseren Viertel Mp, M′p′ der Karte von der mittleren Hälfte abtrennen, die wahren Längen der Parallelgrade aufträgt und durch je zwei zusammengehörige Theilpunkte (mm, m′m′, ...) gerade Linien zieht, welche die Meridiane vorstellen.

Diese Projection unterscheidet sich von der in Fig. 504 angedeuteten Kegelprojection namentlich darin, dass die Meridiane nicht in dem Mittelpunkte A aller Parallele zusammenlaufen, sondern in verschiedenen Entfernungen sich schneiden, wenn man sie weit genug verlängert. Sie wurde der Herstellung einer Generalkarte von Russland zu Grunde gelegt und bei dieser Gelegenheit von Euler theoretisch untersucht und namentlich desshalb empfohlen, weil in Folge des Umstandes, dass die Meridiane gerade Linien sind, sich auch alle übrigen grössten Kreise nahezu als gerade Linien darstellen und folglich bei nicht zu grossen Ausdehnungen der Karte alle Entfernungen mit einem geradlinigen Meilenmassstabe annähernd richtig gemessen werden können.

2. Cylindrische Projectionen.

§. 417. Diese Projectionen bestehen darin, dass man sich die Erdkugel von einem Cylinder umhüllt denkt, welcher dieselbe nach dem Aequator berührt und dessen Erzeugende die Meridiane vorstellen, während seine Schnitte durch die Ebenen der Parallelkreise diese Kreise selbst bezeichnen. Wickelt man einen solchen Cylinder ab, so ist klar, dass sich die abgewickelten Meridiane und Parallele rechtwinkelig schneiden, und dass die letzteren um so näher an einander liegen, je weiter sie vom Aequator abstehen.

Man sieht sofort ein, dass, wenn man dieses Princip für beliebig grosse und beliebig gelegene Theile der Erdoberfläche strenge durchführen wollte, Karten entstünden, welche zu den unrichtigsten von allen gehörten; man begreift aber auch, dass es mit geringer Abänderung zur Darstellung von solchen Ländern, welche am Aequator liegen, recht wohl geeignet ist. Und in der That wird es auch für die heissen Zonen am meisten angewendet.

Eine andere wichtige Anwendung finden die cylindrischen Projectionen bei der Anfertigung von Seekarten. Hiezu eignen sich dieselben desshalb besonders, weil sich diejenige krumme Linie, welche ein Schiff beschreibt, das alle Meridiane der Erde unter einem constanten Winkel schneidet (die Loxodrome), in der Abwickelung der Cylinderfläche, also auf der Karte, als eine Gerade darstellt. Diese Eigenschaft ist offenbar für die Zeichnung von Schiffscursen auf den Seekarten sehr bequem und daher zu benützen.

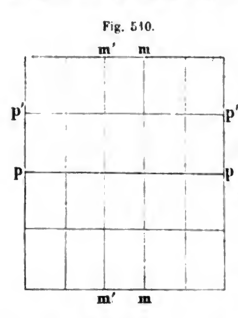
Gewöhnlich unterscheidet man nur zwei Arten von cylindrischen Projectionen, welche unter dem Namen „Plattkarten" und „reducirte Karten" bekannt sind; wir sehen jedoch die Projection von Cassini als eine besondere

Art der cylindrischen Projectionen an und unterscheiden daher drei Arten derselben.

§. 418. **Plattkarten.** Die einfachste Art des Netzes einer Plattkarte besteht aus lauter Quadraten von gleicher Grösse, wovon die in der Richtung von Süd nach Nord liegenden Seiten die Meridiane und die von Ost nach West laufenden die Parallelkreise vorstellen. Dass das auf einem solchen Netze dargestellte Bild eines Theils der Erdoberfläche sehr verzerrt ist, bedarf keines Beweises; sein einziger Vorzug ist, dass man die geographische Länge und Breite eines Punktes sehr leicht eintragen und umgekehrt aus der Karte abnehmen kann.

Ein weniger mangelhaftes Bild liefert dasjenige Netz (Fig. 510), bei welchem die Meridiane und Parallelkreise durch Rechtecke in der Art vorgestellt sind, dass die Entfernungen der Meridiane (mm, m′m′) nach der Grösse der Grade des mittleren Parallelkreises pp und die der Parallelen (pp, p′p′) nach der Grösse eines Meridiangrades bestimmt werden. Will man demnach ein Land darstellen, dessen mittlere geographische Breite $= \varphi$ ist, so ist der Halbmesser des zugehörigen Breitenkreises $= r \cos \varphi$, der Umfang dieses Kreises $= 2 r \pi \cos \varphi$ und die Länge eines Grades des Parallels:

Fig. 510.



$$\lambda = \frac{r \pi \cos \varphi}{180} = m m'. \quad . \quad . \quad (488)$$

Sollen nun die Meridiane von Grad zu Grad aufgetragen werden, und ist 1 : m die Verjüngung der Karte, so beträgt der Abstand der Meridiane auf dem Netze den m^ten^ Theil von λ. Da ferner die Länge eines Meridiangrades

$$\beta = \frac{r \pi}{180} = p p' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (489)$$

ist, so beträgt der Abstand der Parallele von Grad zu Grad $\frac{1}{m} \beta$, und es verhält sich folglich

$$\beta : \lambda = 1 : \cos \varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (490)$$

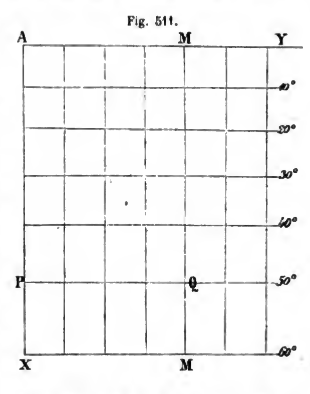
Es versteht sich von selbst, dass die Genauigkeit dieser Karten von der Mitte gegen die südlichen und nördlichen Grenzen sehr abnimmt, und dass man, um die geographische Länge und Breite eines Orts im Gradmasse auszudrücken, zwei Massstäbe anwenden muss, welche sich beziehlich wie $\lambda : \beta$ oder wie $\cos \varphi : 1$ verhalten.

§. 419. **Reducirte Karten.** Will man das cylindrische Kartennetz so einrichten, dass durch dasselbe überall das richtige Verhältniss der Längen der Meridiangrade und der Grade der Parallelkreise dargestellt wird, so kann dieses dadurch geschehen, dass man die Meridiane gleichweit, die

Parallelkreise aber um so weiter von einander abstehen lässt, je mehr sie sich den Polen nähern. Die Zunahme des Abstandes der Parallele ergibt sich aus der nachstehenden Rechnung.

Bezeichnet nämlich β die Länge des Meridianbogens, der zu einem sehr kleinen Winkel α gehört, so hat nach der Gleichung (490) der zu demselben Winkel α gehörige Bogen eines Parallelkreises von der Breite φ die Länge $\lambda = \beta \cos \varphi$; beide Bögen verhalten sich folglich wie $1 : \cos \varphi$ und beispielsweise für $\varphi = 60^0$ wie $2 : 1$. Es müsste also an dieser Stelle der dem Winkel α zukommende Meridianbogen doppelt so gross seyn als der zu α gehörige Bogen des Parallelkreises.

Fig. 511.



Nimmt man nun, um die Rechnung allgemeiner zu machen, den abgewickelten Aequator A Y (Fig. 511) als die Ordinaten- und den abgewickelten ersten Meridian A X als die Abscissenaxe an, und bezeichnet die Entfernung A P eines Parallels von der Breite φ mit x, so kann man nach den Principien der Differentialrechnung die der Breitenänderung $d\varphi$ entsprechende Aenderung von x mit dx bezeichnen. Drückt man die Aenderung des Breitenwinkels durch den Bogen vom Halbmesser r aus, so ist dieser unendlich kleine Bogen $= r\,d\varphi$, und es verhält sich folglich jetzt $dx : r\,d\varphi$ wie vorhin $\beta : \lambda$, d. i. wie $1 : \cos \varphi$. Es ist somit

$$dx = \frac{r\,d\varphi}{\cos \varphi}$$

und, wenn man integrirt und bei der Constantenbestimmung berücksichtigt, dass für $\varphi = 0$ auch $x = 0$ ist,

$$x = r \log n \operatorname{tg} (45^0 + {}^1\!/_2\, \varphi). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (491)$$

Führt man statt der natürlichen Logarithmen die gemeinen ein und drückt zugleich die vorstehende Gleichung logarithmisch aus, so wird, wenn man den Erdhalbmesser $r = 857{,}43$ geographischen Meilen setzt, die in solchen Meilen ausgedrückte Länge x aus der Gleichung gefunden:

$$\log x = 3{,}2954144 + \log [\log \operatorname{tg} (45^0 + {}^1\!/_2\, \varphi)]. \quad . \quad . \quad (492)$$

Soll die Entfernung A M des Meridians M M, welche zu einer in Graden gegebenen Länge ψ gehört, ausgedrückt werden, so dient dazu die Gleichung:

$$y = AM = \frac{r\pi}{180}\,\psi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (493)$$

oder, wenn man wieder $r = 857{,}43$ geographische Meilen setzt und den Logarithmus von y sucht:

$$\log y = 1{,}1750761 + \log \psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (494)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 491 bis 494 kann man selbstverständlich jeden durch seine geographische Länge und Breite gegebenen Ort in das reducirte Kartennetz eintragen, und umgekehrt die geographische Länge und Breite eines eingetragenen Punktes berechnen.

§. 420. **Projection von Cassini.** Diese Projectionsmethode besteht darin, dass man den mittleren Meridian des darzustellenden Landes als die Leitlinie des umhüllenden Cylinders ansieht und diesen Cylinder durch Ebenen geschnitten denkt, welche der des mittleren Meridians parallel laufen. Der Cylinder und die Schnittebenen haben folglich gegen die gleichnamigen Flächen, welche den gewöhnlichen Cylinderprojectionen zu Grunde liegen, eine senkrechte Stellung. Wickelt man den hieher gehörigen Cylinder ab, so stellen dessen Elemente die grössten Kreise vor, welche durch sie und den Erdmittelpunkt bestimmt sind, während die Schnitte der dem Hauptmeridian parallel laufenden kleineren Kreise die Meridiane des Netzes bezeichnen.

Theilt man die von Ost nach West laufenden grössten Kreise vom Hauptmeridian aus in gleiche Theile, so ist klar, dass die diesem Meridiane parallel laufenden Schnittebenen immer näher zusammenrücken, und dass folglich die Vierecke des Netzes um so unrichtiger werden, je weiter sie vom mittleren Meridian abliegen. Diese Nachtheile treten jedoch nicht stark hervor, wenn man die Cassini'sche Cylinderprojection auf ein Land anwendet, das sich in der Richtung von Ost nach West nicht weit ausdehnt. Cassini legte seiner Karte von Frankreich die nach ihm benannte Projection wohl desshalb zu Grunde, weil dieses Land sich etwas mehr von Süden nach Norden, als von Westen nach Osten erstreckt. Ein Vortheil, den die in Rede stehende Projection gewährt, besteht darin, dass sich die nach §. 317 berechneten Coordinaten der Eckpunkte eines grossen Dreiecknetzes sehr leicht eintragen lassen, sowie man umgekehrt mit Hilfe der dortselbst entwickelten Formeln die Coordinaten eingetragener Punkte leicht berechnen kann.

C. Geographische und topographische Karten.

§. 421. Man theilt die Landkarten gewöhnlich in geographische (erdbeschreibende) und in topographische (ortbeschreibende) ein, und versteht unter den ersteren Karten in sehr kleinem Massstabe (von 1 : 200000 bis 1 : 2000000 herab), welche ganze Länder, Welttheile und selbst Hälften der Erdoberfläche bildlich darstellen; unter den letzteren aber Karten in grösserem Massstabe (von 1 : 10000 bis 1 : 200000), welche die Einzelnheiten der dargestellten Orte und Gegenden mehr berücksichtigen, als dieses bei den Landkarten im gewöhnlichen Sinne gebräuchlich und möglich ist.

Der Unterschied zwischen geographischen und topographischen Karten entspringt somit lediglich aus dem Massstabe derselben. Eben desshalb liegt

auch der Unterschied zwischen geographischen und topographischen Schrift- und Kartenzeichen bloss in der Grösse und nicht in der Form dieser Zeichen. Es wird daher genügen, wenn wir hier vorzugsweise die Zeichen für grössere Karten berücksichtigen, da dieselben mannichfaltiger sind als die der kleinen, nur wenig Detail enthaltenden, und da jene Zeichen leicht verkleinert werden können.

Auf einer Karte sind, wie schon bemerkt, nicht bloss räumliche, sondern auch politische und historische Verhältnisse darzustellen. Zu jenen gehören: die Wohnorte der Menschen, stehendes und fliessendes Wasser, und der Boden mit seinen natürlichen und künstlichen Bildungen; zu diesen: die Grenzen der Länder und ihrer Bestandtheile, die Fundorte wichtiger Mineralien, die Stätten grosser geschichtlicher Ereignisse, die Grösse der Bevölkerung u. s. w.

1. Kartenzeichen.

§. 422. **Bezeichnung der Berge.** Von der geometrischen Gestalt einer Gegend bekommt man erst dann einen richtigen Begriff, wenn man ausser ihrer horizontalen Projection auch die Erhöhungen und Vertiefungen oder die Unebenheiten derselben kennt. Zur graphischen Darstellung derselben auf Karten bedient man sich nach der Angabe des sächsischen Majors Lehmann der Schraffirung der geneigten Flächen mittels Strichen, deren Dicke zu der Grösse der Neigung in einem bestimmten Verhältnisse steht. Die Lehre von der Bezeichnung geneigter Terrainflächen durch solche Striche (die Lehmann'sche Theorie der Bergzeichnung) ist namentlich für topographische Karten, die zu militärischen Zwecken benützt werden, sehr wichtig, und wir beginnen desshalb dieses Capitel mit einer kurzen Darstellung derselben.

Die Lehmann'sche Bergzeichnungstheorie beruht zum Theil auf dem Satze, dass die Helligkeit einer Fläche, welche von vertikalen Strahlen erleuchtet wird, unter übrigens gleichen Umständen dem Cosinus ihres Neigungswinkels gegen den Horizont proportional ist. Die horizontale Fläche erscheint hiernach am hellsten, die vertikale am dunkelsten. Wollte man nun jene ganz weiss, diese ganz schwarz und die dazwischen liegenden Abstufungen durch schwarze Striche mit weissen Zwischenräumen bezeichnen, so liesse sich leicht für jeden Neigungswinkel φ der beleuchteten Fläche angeben, wie breit die weissen Zwischenräume im Verhältniss zur Breite der schwarzen Striche seyn müssten. Für $\varphi = 60^0$ würden z. B. die Striche eben so breit seyn als die Zwischenräume, da $\cos \varphi = \cos 60^0 = 0{,}5$ ist.

Die strenge Durchführung dieses Princips hat indessen zur Folge, dass die Abstufungen der Neigungen nicht so scharf in's Auge fallen, als es wünschenswerth ist. Daher, und weil die Erfahrung lehrt, dass in der Natur Erdböschungen von mehr als 45^0 Neigung nur selten vorkommen,

bezeichnete Lehmann schon eine unter 45° gegen den Horizont geneigte Fläche ganz schwarz, während er für die übrigen das Verhältniss der weissen und schwarzen Streifen nach der Annahme bestimmte, dass sich die Breite der schwarzen Striche zur Breite der weissen Zwischenräume verhalten sollte wie der Neigungswinkel der Fläche gegen den Horizont zur Ergänzung dieses Winkels auf 45 Grade.

Diesen Vorschlag hat man fast auf allen topographischen Bureaux angenommen, nur mit dem Unterschiede, dass man den Grenzwinkel φ bald auf 45, bald auf 50, bald auf 60° setzte. In Bayern z. B. bezeichnet man erst die unter 60° geneigten Flächen ganz schwarz, und es ergibt sich nach dieser Annahme die Proportion

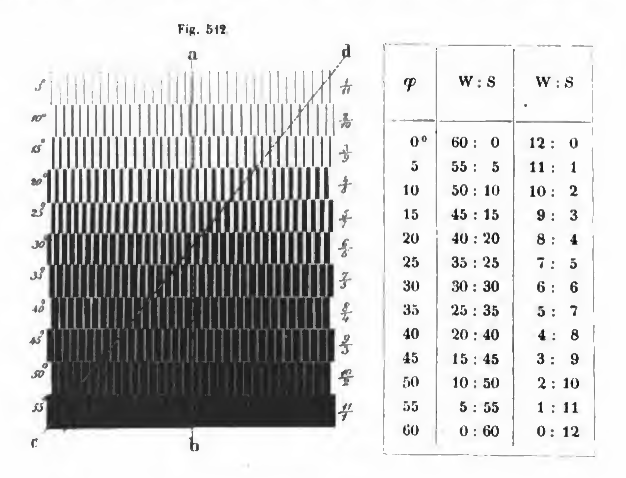
$$S : W = \varphi : 60^0 - \varphi,$$

wenn S die Breite der schwarzen Striche und W die der weissen Zwischenräume bezeichnet. Aus deser Proportion geht die nachstehende Tabelle hervor, welche zugleich durch die beigedruckte Fig. 512 so erläutert ist, dass jede weitere Bemerkung hierüber unnöthig erscheint.

Wenn eine topographische Karte genau nach diesem Schema gezeichnet ist, so kann man daraus die relative Höhenlage einzelner Punkte und beliebige Terrainprofile um so richtiger construiren, je genauer man das Verhältniss des Weissen zum Schwarzen zu schätzen im Stande ist.

Gesetzt, es handele sich um das Terrainprofil ab der Fig. 512, so hat man für die Länge der obersten Schichte das Verhältniss von W : S = 11 : 1, folglich eine Neigung von 5°; für die zweite Schichte das Verhältniss von

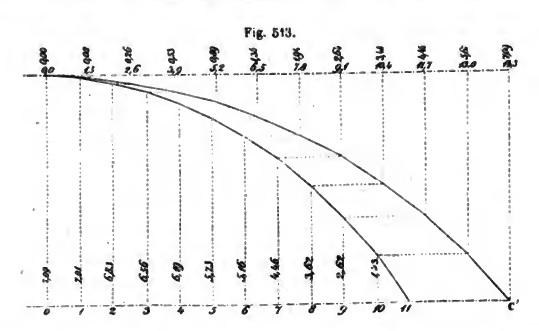
Fig. 512



φ	W : S	W : S
0°	60 : 0	12 : 0
5	55 : 5	11 : 1
10	50 : 10	10 : 2
15	45 : 15	9 : 3
20	40 : 20	8 : 4
25	35 : 25	7 : 5
30	30 : 30	6 : 6
35	25 : 35	5 : 7
40	20 : 40	4 : 8
45	15 : 45	3 : 9
50	10 : 50	2 : 10
55	5 : 55	1 : 11
60	0 : 60	0 : 12

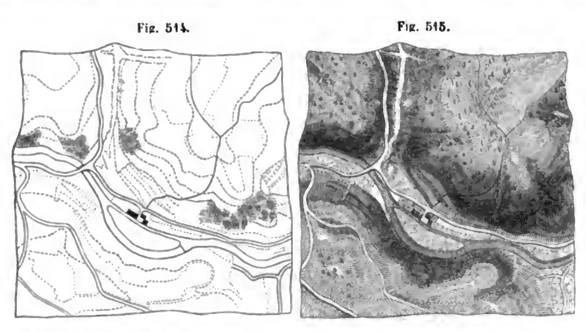
W : S = 10 : 2, folglich eine Neigung von 10⁰; für die dritte Schichte W : S = 9 : 3, mithin eine Neigung von 15⁰ u. s. w. Trägt man nun diese Neigungswinkel in der Länge der Schichten nach der Richtung a b an einander an, so entsteht die stärker geneigte untere Linie der Fig. 513, welche somit das gesuchte Profil a b vorstellt. In gleicher Weise findet man das Profil d c. Hier treten andere Neigungswinkel wie bei a b auf, da die horizontalen Erstreckungen der Schichten grösser sind, weshalb auch das Profil sanfter wird, wie die obere gebrochene Linie 0c' der Figur zeigt.

Fig. 513.



Die Darstellung eines Berges durch Schraffirung setzt dessen Horizontalcurven als bekannt voraus. Sind diese nach §. 351 bis 355 aufgenommen und auf dem Plane in Blei gezeichnet, so zieht man zwischen denselben in der Richtung des kleinsten Abstandes und in der erforderlichen Breite die schwarzen Striche, welche übrigens nicht mathematisch gerade zu seyn

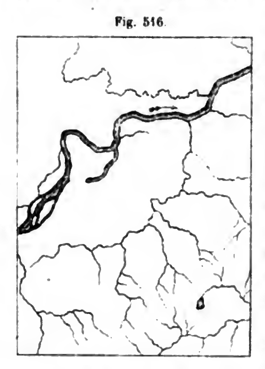
Fig. 514. Fig. 515.



brauchen, sondern etwas geschlängelt seyn dürfen. Erlaubt es die Fertigkeit der Hand nicht, die Striche sofort von einer Curve zur anderen auszuführen, so legt man Zwischencurven an und zieht zunächst die Striche bis an diese, worauf dann wie vorhin weiter fortgefahren und zuletzt jede als Hilfsmittel benützte Horizontalcurve ausgewischt wird. Berge gut zu schraffiren, setzt viele Uebung voraus; unsere Absicht ist es aber nicht, das Zeichnen selbst, sondern das Verstehen der Kartenzeichnungen zu lehren. Darum wird es genügen, dass wir oben zwei von Neutze gezeichnete Figuren (514 und 515) mittheilten, wovon eine die in Arbeit begriffene Karte ohne Schraffur mit punktirten Horizontalcurven, die andere aber die fertige Karte mit Schraffur und ohne Horizontalcurven enthält. Bei einiger Mühe wird man sich leicht eine bildliche Vorstellung von der geometrischen Gestaltung der vorliegenden Gegend machen können.

§. 423. **Bezeichnung der Gewässer.** Beträgt der Massstab einer topographischen Karte 1 : 10000, so werden Bäche unter 10 Fuss Breite, bei 1 : 25000 Bäche unter 20 Fuss Breite, bei 1 : 100000 Flüsse unter 40 Fuss Breite, bei 1 : 200000 Flüsse unter 160 Fuss Breite als einfache Linien gezeichnet. Breitere Bäche oder Flüsse stellt man durch doppelte Uferlinien mit der bekannten Wasserschraffirung dar. Diese wird um so feiner, je kleiner der Massstab ist; die Ufer auf der Schattenseite werden mit etwas stärkeren Linien ausgezogen, als die auf der Lichtseite. Der Lauf des Wassers wird durch einen kleinen Pfeil angedeutet, der nach Massgabe des Raumes entweder in oder neben der Wasserfläche liegt. Wird der Massstab der Karte kleiner als 1 : 100000, so werden kleine Bäche, Gräben und Teiche ganz weg gelassen; dagegen sind die einfachen Linien, welche Flüsse darstellen, im Verhältnisse ihrer Länge und der Zuflüsse, welche sie erhalten, zu verstärken. Werden die topographischen Karten farbig gezeichnet, so ist das Wasser blau anzulegen und so zu laviren, dass es gegen die Ufer dunkler erscheint. Diese aber werden, wenn es natürliche sind, schwarz, und wenn sie aus Mauerwerk bestehen, roth ausgezogen. Fig. 516 zeigt die Darstellung der Gewässer in schwarzer Manier und im Massstabe von 1 : 100000.

Fig. 516.



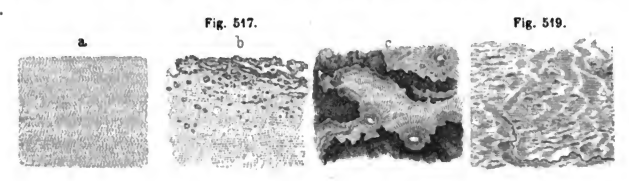
Es ist hier der Ort, auf die Veränderungen aufmerksam zu machen, denen die Ufer der Flüsse in Folge der Einwirkung des Wassers unterworfen sind. Diese Veränderungen treten auf einer Karte um so mehr hervor, je grösser deren Massstab ist und je mehr Zeit zwischen der Aufnahme und dem Gebrauche liegt. In diesen Fällen, und wenn es sich darum handelt,

den Wasserlauf ziemlich genau zu kennen, ist es durchaus nöthig, die Lage der Ufer einer geometrischen Revision zu unterwerfen.

§. 424. **Bezeichnung des Bodens.** Der Boden kann fest oder weich, kahl oder bewachsen seyn und diese verschiedenen Beschaffenheiten desselben sind in der Karte entsprechend anzudeuten.

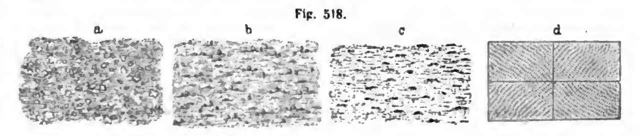
Beim kahlen Boden wird unterschieden, ob er an der Oberfläche aus Sand, Kies, Gerölle, Felsen oder beständig aus Eis besteht. Sand und Kies werden durch feinere und stärkere Punkte, Gerölle und Felsen durch eckige Figuren, Gletscher durch entsprechende Schraffirungen bezeichnet, wie aus der Fig. 517 zu entnehmen ist, in welcher a Sand und Kies, b Gerölle und Felsen, c Hochgebirg mit einem Gletscher vorstellt. In farbigen Karten wird der kahle Boden blassroth, das beständige Eis blassblau angelegt; Sand und Kies werden auch hier schwarz punktirt, Gletscher schraffirt.

Fig. 517. Fig. 519.



Der bewachsene Boden besteht entweder aus Wäldern, Feldern, Haiden, Wiesen oder Gärten. Die Wälder werden nach Fig. 518 Abtheilung a, die Haiden nach b, die Wiesen nach c, Wein- und Hopfengärten nach d, Felder aber gar nicht bezeichnet, d. h. weiss gelassen. Auf Plänen kann man Laub- und Nadelholz unterscheiden, auf Karten aber nicht. In Farben werden Wälder grau, Wiesen hellgrün, Haiden hellgelb, Weingärten rosenroth, Hopfengärten hellbraun bezeichnet.

Fig. 518.



Der weiche Boden ist entweder ein Moor oder ein Sumpf. Diese Unterabtheilungen unterscheidet man nach Fig. 519 durch Punkte, welche das Gesträuche der Moore und durch horizontale Linien, welche das Wasser der Sümpfe andeuten. Auf farbigen Karten stellt man die Moore und Sümpfe wie Wiesen dar, und unterscheidet die ersteren durch braune, die letzteren durch blaue horizontale Streifen.

§. 425. **Bezeichnung von Wohnorten, Gebäuden etc.** Die auf topographischen Karten zu bezeichnenden Wohnorte sind: Städte, Marktflecken,

Dörfer, Weiler, Schlösser, Einöden, Alpen; nicht bewohnte Gebäude: Kirchen, Kapellen, Ruinen etc. Ist der Kartenmassstab gross $\left(\frac{1}{10000}\right.$ bis $\left.\frac{1}{50000}\right)$, so deutet man die Hauptumrisse der Gebäude noch an, beträgt der Massstab aber weniger als 1 : 100000, so treten nur bestimmte Zeichen an die Stelle der Umrisse, wie aus Fig. 520 zu entnehmen ist, von welchen

Fig. 520.

a b c d e f g h i k l m

a, b, c grosse, mittlere und kleine Städte, d, e, f Marktflecken und Dörfer, g einen Ort mit Schloss, h einen Weiler und i ein einzelnes Schloss, k eine Ruine, l einen befestigten Ort und m eine Einöde vorstellt.

In farbigen Karten sind die Gebäude mit rothem Carmin anzulegen, in schwarzen zu schraffiren.

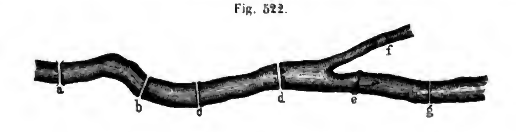
§. 426. **Bezeichnung von Wegen und Grenzen.** Zu den Wegen gehören die Land- und Wasserstrassen jeglicher Art mit ihren feststehenden oder beweglichen Brücken; zu den auf topographischen Karten noch darzustellenden Grenzen lediglich die Landes-, Kreis-, Bezirks- und Gemeindegrenzen.

Fig. 521.



Hauptstrassen werden durch zwei Parallellinien, wovon die im Schatten liegende etwas stärker zu halten ist (Fig. 521, b), Nebenstrassen durch eine ausgezogene und eine punktirte Linie (c), Gemeindewege durch eine einfache Linie (d), Saumwege und Fusspfade durch gestrichelte und punktirte Linien (e) bezeichnet. Bei Eisenbahnen unterscheidet man, ob sie schon im Betrieb stehen oder im Bau begriffen sind: die ersteren werden nach Art der Hauptstrassen durch ausgezogene und querabgetheilte Parallellinien (a), die letzteren wie diese, aber durch punktirte Linien vorgestellt. Schifffahrtscanäle werden wie Flüsse von gleicher Breite gezeichnet (k), und für Landes-,

Fig. 522.



Kreis-, Bezirks- und Gemeindegrenzen gelten beziehungsweise stark abgesetzte Striche und gestrichelt-punktirte Linien (f, g, h, i). Für die Bezeichnung der Wege über Flüsse gebraucht man die Formen der Fig. 522, in welcher a eine steinerne, b eine hölzerne, c eine eiserne Brücke, d eine Schiffbrücke, e eine fliegende Brücke, f einen Steg, g eine Furth bezeichnet. Wasserbauten von Bedeutung werden auf Karten selten angedeutet; wo man sie jedoch sichtbar machen will, wählt man ähnliche, jedoch kleinere Zeichen wie für die Pläne. (S. Fig. 548.)

2. Kartenschrift.

§. 427. **Gegenstände der Benennung.** Eine jede Karte bedarf zunächst eines Titels, welcher ihre Hauptbestimmung und ihren Umfang bezeichnet: z. B. „hydrographische Karte von Bayern,“ d. i. eine Karte, welche lediglich die Quellen, Bäche, Flüsse, Ströme und See'n Bayerns darstellt. Dem Titel sind ferner Notizen beizufügen, welche den Massstab, die topographischen Zeichen, die Zeit der Verfertigung und den Verfasser der Karte betreffen.

Die wichtigsten Bezeichnungen einer Karte sind ohne Zweifel die Ortsnamen; diese dürfen nirgends fehlen, und es müssen ihnen daher, wenn der Raum für minder wichtige Bezeichnungen zu klein wird, diese letzteren weichen. Jedes Gebäude, das in der Karte ein besonderes Zeichen hat, erhält seinen Namen.

Nächst den Orten erscheinen die Gewässer als wichtige geographische Objecte, deren Benennung in einer Karte ebenfalls nicht fehlen darf, und die sich bei langen Flüssen mehrmals wiederholen muss, um das Ablesen der Karte zu erleichtern.

Ausserdem ist das Terrain in einer der Beziehungen zu benennen, welche durch die Zeichnung nicht ausgedrückt werden können; z. B. das Donaumoos, das Wendelsteingebirge, der Schwarzwald u. s. w. Ferner sind, wo es nothwendig erscheint oder der Raum erlaubt, die Namen wichtiger Verkehrsanstalten anzuführen; z. B. der Hauptstrassen zwischen grossen Städten, die auf der Karte selbst nicht liegen; der Eisenbahnen, welche besondere Namen haben; der Dampfschiffwege auf dem Meere u. dgl. Endlich ist es unerlässlich, das Kartennetz, d. i. die Meridiane und Parallele nach ihrer Länge und Breite richtig zu bezeichnen, so dass man aus der leicht zu erkennenden Projectionsart des Netzes sofort die geographische Lage jedes Orts bestimmen kann.

§. 428. **Schriftzeichen.** Bei der Wahl der Schriftzeichen kommt sowohl deren Form als Grösse in Betracht, um auch hiedurch Wichtigeres von Unwichtigerem zu trennen, mit einem Worte die Uebersicht zu erleichtern.

Was die Form der Schrift betrifft, so sind folgende Schriftgattungen im Gebrauch:

1. Die grosse römische stehende und liegende Schrift, auch stehende und

liegende Capitalschrift genannt, für Titel, Namen der Landesbezirke und Benennungen geographisch wichtiger Gegenstände.

2. Die kleine römische stehende und liegende Schrift, auch stehende und liegende Rotond genannt, für die geographischen und topographischen Einzelnheiten der Karte, und zwar für die grösseren Objecte.

3. Die topographische Cursivschrift für die kleineren und kleinsten Objecte einer Karte.

4. Die stehenden und liegenden römischen und arabischen Ziffern zur Bezeichnung von Netzabtheilungen, Einwohnerzahlen, Berghöhen u. dgl. Gewöhnlich finden jedoch nur die arabischen Ziffern Anwendung.

Hinsichtlich der Grösse der Schrift ist zu bemerken, dass dieselbe zu dem Kartenmassstabe und den Kartenzeichen in einem passenden Verhältnisse stehen soll: wichtigere Gegenstände werden durch grössere, minder wichtige durch kleinere Schrift bezeichnet, die grösste Schrift wird auf die Bezeichnung des Hauptzwecks der Karte und deren grösste Abtheilungen verwendet; bei Ortschaften richtet sich die Grösse der Schrift nach ihrer Classe oder Einwohnerzahl; bei Flüssen nach deren Länge und Bedeutung; bei See'n und Landobjecten nach deren Flächenraum. Die im Anhange unter Nr. XXII mitgetheilte und aus Pfeiffer's „Anleitung zum Plan- und Kartenzeichnen" entnommene „Tabelle über die Gattungen und Grössen der Plan- und Kartenschriften" gibt hierüber weitere Aufschlüsse. Es ist jedoch zu bemerken, dass die angegebenen Formen und Masse nicht in aller Strenge eingehalten zu werden brauchen.

§. 429. **Stellung der Schrift.** Durch entsprechende Stellung der Schrift kann nicht nur mancher Zweifel über den bezeichneten Gegenstand gehoben, sondern auch die Uebersicht und das Ablesen der Karten sehr erleichtert werden: dieselbe ist also nicht so unwichtig, als es auf den ersten Augenblick scheinen mag.

Von der allgemeinen Regel, die Schriftzeilen dem oberen oder unteren Kartenrande parallel zu ziehen, werden nur wenige Ausnahmen gemacht. Zu diesen gehören die Bezeichnungen der Flüsse, welche nach deren Längenausdehnung entweder in die Wasserfläche selbst oder an deren Ufer zu stellen sind. Ferner gehören hieher die Hauptstrassen. Endlich grosse Terrainflächen, die sich längs eines Flusses oder Gebirges hinziehen, und deren Bezeichnung in mässiger Krümmung ungefähr der Mitte der Flächenfigur folgt.

Für Ortsbenennungen gilt als Regel, die Namen dicht oberhalb des Ortszeichens zu setzen. Bei beschränktem Raume darf man sich jedoch erlauben, die Benennung neben das Zeichen zu setzen, aber nie soll sie unter demselben stehen.

Kommt es vor, dass die Bezeichnung eines Terrainbezirks wegen dessen grosser Fläche gedehnt werden muss, so sieht man die doppelte Buchstabenhöhe als Grenze des Abstandes der einzelnen Buchstaben an. Reicht eine solche Dehnung nicht aus, so unterlässt man dieselbe und bezeichnet dafür den fraglichen Bezirk zweimal, um jeden Zweifel über dessen Namen zu beseitigen.

Zweiter Abschnitt.

Planzeichnung.

§. 430. Zur Kartenzeichnung sind Netze erforderlich, welche die Meridiane und Parallelkreise des abzubildenden Theils der Erdoberfläche darstellen, und in welche die einzelnen Objecte nach ihrer geographischen Lage mit mehr oder weniger Genauigkeit eingetragen werden. Die Zeichnung von Horizontalplänen gründet sich auch auf Netze, aber diese bestehen meist aus den Polygonen oder Dreieckverbindungen, welche behufs der Aufnahme der Pläne auf dem Felde ausgesteckt und gemessen wurden. An diese Netze schliesst sich die Zeichnung des Details um so besser an, je sorgfältiger jene gemessen und aufgetragen sind; es muss also hierauf alle Sorgfalt verwendet werden. Das Auftragen eines gut gemessenen Polygons oder Dreiecknetzes in einem bestimmten Massstabe kann aber für Denjenigen, der das geometrische Zeichnen versteht, durchaus keine Schwierigkeit haben, da es sich bloss darum handelt, ähnliche Figuren zu zeichnen; wir werden desshalb hievon eben so wenig, als von der ebenfalls bekannten Construction verjüngter Massstäbe handeln. Ueber die Zeichnung der Vertikalpläne oder der Nivellemente von Linien und Flächen, von welcher in diesem Abschnitte zu handeln ist, geben theilweise schon die Betrachtungen über das Nivelliren Aufschluss; es braucht also hier nur das Fehlende nachgeholt zu werden. Und was die Grubenpläne betrifft, die sich aus Horizontal- und Vertikalprojectionen zusammensetzen, so werden auch über diese nur kurze Bemerkungen genügen, da sie entweder nach den vorausgesetzten Plänen oder nach den Regeln der darstellenden Geometrie behandelt werden, deren Handhabung wir dem Leser eben so wie die Fertigkeit im Zeichnen zumuthen.

A. Horizontal- oder Situationspläne.

1. Bezeichnung der darzustellenden Gegenstände.

§. 431. Die geometrische Aufnahme erstreckt sich nur auf die Horizontalprojection der natürlichen oder künstlichen Grenzen von Eigenthum, der Bodencultur und Verkehrsanstalten; die Vertikalprojection des Terrains wird nur in bestimmten Fällen aufgenommen und auf Horizontalplänen in Form von Schichtenlinien, worüber bereits in den §§. 348 bis 355 gehandelt wurde, dargestellt. Die in dem §. 422 beschriebene Bergzeichnung wendet man in der Regel auf Karten, selten auf Plänen an, da sie erstens nicht so genau wie Schichtenlinien die Höhenverhältnisse des Bodens darstellt, zweitens mühsam auszuführen ist, und drittens bei stark geneigtem Terrain die Pläne so schwarz macht, dass Bau- und Culturprojecte in dieselben nicht mehr

deutlich eingezeichnet werden können. Es bleibt uns also hier nur übrig, die Bezeichnungen für die erst genannten Objecte vorzuführen und zu erläutern. Die mitzutheilenden Figuren passen leider bloss für schwarze und nicht für farbige Pläne; wer aber jemals eine Anleitung zum Zeichnen farbiger Pläne angesehen hat, wird durch die nachfolgenden Bemerkungen über die Colorirung der Horizontalpläne an die conventionelle Darstellung eines beliebigen Objects in Farbe wieder erinnert werden.

§. 432. **Bezeichnung natürlicher Gebilde.** Die auf Plänen darzustellenden natürlichen Gebilde umfassen alles Land und Wasser der Erdoberfläche; der Boden kann dabei kahl oder bewachsen, weich oder fest, nass oder trocken seyn.

Fig. 523.

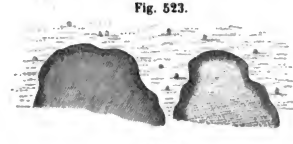


Fig. 524.

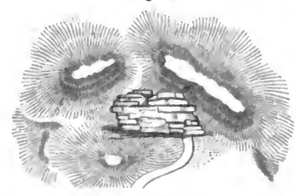
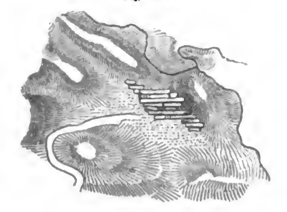


Fig. 525.



Fig. 526



Der kahle Boden stellt sich als Sand-, Kies-, Geröll-, Lehm- oder Felsboden, oder als ewiges Eis dar. Die Bezeichnungen für diese verschiedenen Arten des kahlen Bodens stimmen mit denen des §. 424 im Allgemeinen überein, nur sind sie hier, weil grösser, bestimmter.

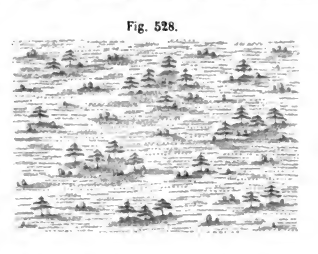
Wir fügen desshalb den früher gegebenen Bezeichnungen noch folgende bei: in Fig. 523 die Zeichen von Lehm- und Sandgruben, in Fig. 524 die von Steinbrüchen, in Fig. 525 die von Felsen im Hochgebirge, in Fig. 526 die von Kohlenflötzen, und bemerken hiezu, dass in farbigen Plänen die Sandgruben einen röthlichen Ton mit eingezeichneten schwarzen Punkten und Strichen (wie in Fig. 523) erhalten; die Lehmgruben aber mit Terra di Siena in zwei oder drei verschiedenen Tönen angelegt und mit Sepia gestrichelt werden; ferner dass Steinbrüche mit hellbrauner und Kohlenflötze mit dunkelbrauner Farbe (Sepia) angelegt und wie in den Fig. 524 und 526 schwarz bezeichnet werden.

Der bewachsene Boden umfasst die von Wäldern, Gesträuchen, Feldern, Gärten, Wiesen, Haiden,

Fig. 527.

Mooren und Sümpfen eingenommenen Flächen. Bei der Darstellung von Wäldern und Gebüschen ist das Laub- und Nadelholz zu unterscheiden. In schwarzen Plänen geschieht es nach den Fig. 527 und 528, in farbigen aber durch Anwendung eines lichtgrauen Tons für Nadelholz und eines blaugrauen für Laubholz. Grosse Waldflächen werden in schwarzen Plänen gewöhnlich nicht vollständig, sondern nur theilweise mit den betreffenden Characteren bezeichnet; dagegen setzt man zweckmässig die Buchstaben P. W. (Privatwaldung), ST. W. (Staatswaldung), C. W. (Communalwaldung) bei, um sogleich auch die Kategorie der Besitzer zu bezeichnen. (Fig. 529.)

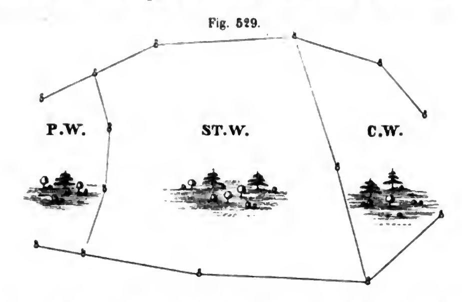
Fig. 528.



Die Felder bleiben sowohl in schwarzen als farbigen Plänen in der Regel weiss, wie das Papier; sind sie aber mit Bäumen besetzt, so deutet man dieses auf die aus Fig. 530 ersichtliche Weise an.

Bei Gärten ist zu unterscheiden, für welche Gewächse sie vorzugsweise bestimmt sind: Baumgärten werden in schwarzen Plänen nach Fig. 531

Fig. 529.



bezeichnet; in farbigen Plänen erhält der Boden die für ihn bestimmte Farbe. Zier- oder Blumengärten deutet man in schwarzen Plänen nach Fig. 532, Gemüsegärten nach Fig. 533 an. In farbigen Plänen werden Zier- und Gemüsegärten durch grün punktirte parallele Linien bezeichnet. Weinberge

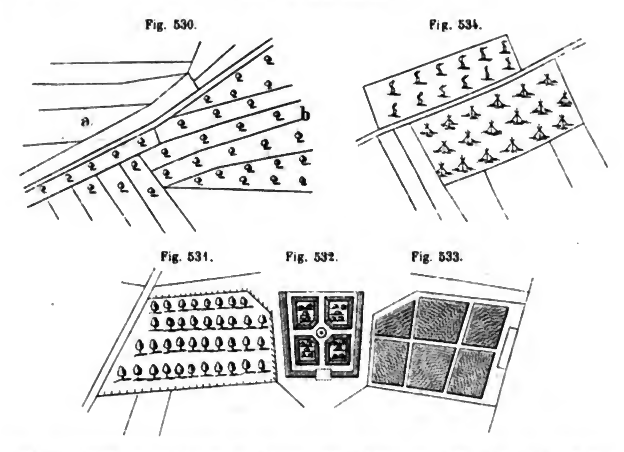
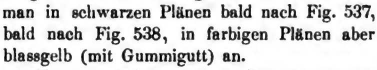


Fig. 530. Fig. 534.

Fig. 531. Fig. 532. Fig. 533.

und Hopfengärten erhalten in schwarzen Plänen die aus Fig. 534 ersichtlichen Zeichen; in farbigen werden die ersteren blassroth mit Carmin, die letzteren rothbraun mit Terra di Siena angelegt. Englische Anlagen werden in schwarzen Plänen nach Fig. 535, in farbigen wie eine Zusammensetzung von Wiesen, Gebüsch, Wald und Wegen behandelt.

Für **Wiesen** gilt die in Fig. 536 dargestellte Bezeichnung; in farbigen Plänen werden sie hellgrün angelegt, wobei die Mischung der Farbe aus Grünspanauflösung und Gummigutt besteht. Oedungen und Haiden deutet man in schwarzen Plänen bald nach Fig. 537, bald nach Fig. 538, in farbigen Plänen aber blassgelb (mit Gummigutt) an.



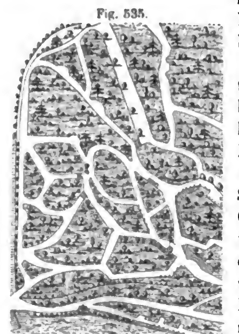


Fig. 535.

Moore werden, wenn sie kein Krummholz tragen, nach Fig. 539, wenn sie aber damit bewachsen sind, in welchem Falle sie **Filze** heissen, nach Fig. 540 dargestellt. In farbigen Plänen werden die Moore wie nasse Wiesen behandelt, erhalten aber lichtbraune und blaue Streifen und in die Filze wird noch überdiess Gebüsch eingezeichnet. Da sich die **Sümpfe** von den Mooren nur dadurch unterscheiden, dass sie mehr Wasser enthalten als diese, so werden sie auch in schwarzen und farbigen Plänen als wasserreiche Moore behandelt, d. h. man bringt in der Zeichnung (Fig. 541) mehr

Wasserstriche als bei einem gewöhnlichen Moore an und lässt dafür einen Theil der in Fig. 539 enthaltenen Punkte weg.

Wenn in einem Moore Torfstiche vorkommen, so werden dieselben nach Fig. 542 bezeichnet, und in farbigen Plänen ausserdem noch braun angelegt.

Fig. 536.

Fig. 537.

Fig. 538.

Das Wasser wird in Plänen ebenso wie auf Karten dargestellt, wesshalb wir uns hier auf §. 423 beziehen. Ist der Massstab des Plans = 1 : 5000, so zeichnet man die Bäche unter 5′ und bei 1 : 2000 Gräben von weniger als 2′ Breite als einfache Linien, welche aber selbst in schwarzen Plänen blau auszuziehen sind. Grosse Wasserflächen (Teiche, See'n etc.) kann man nach Fig. 543 behandeln, um das mühsame Schraffiren mit geschlängelten Linien zu ersparen.

§. 433. **Bezeichnung künstlicher Gebilde.** Zu den künstlichen Gebilden, welche in Plänen anzuzeigen sind, gehören: Gebäude, Strassen, Brücken, Wasserbauten, Befestigungen, Begrenzungen, Signale, Monumente etc.

Die Gebäude werden nach ihrer Lage und ihren äusseren Umrissen dargestellt. Durch entsprechende Schraffirung unterscheidet man, ob sie aus Stein oder Holz bestehen, ob sie Privat- oder öffentliche Gebäude oder

Fig. 539.

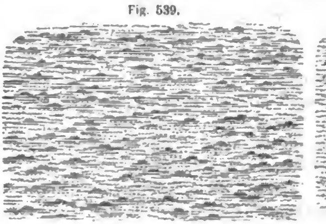


Fig. 540.



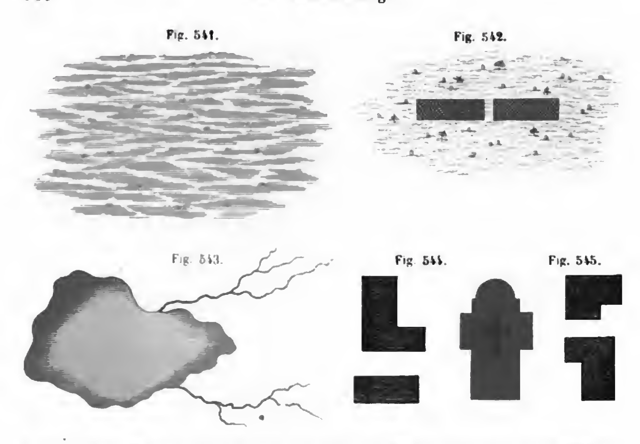


Fig. 541. Fig. 542. Fig. 543. Fig. 544. Fig. 545.

Ruinen sind. Massive Gebäude werden nach Fig. 545 unter einem Winkel von 45⁰ gegen ihre Grundlinien schraffirt und es ist bei öffentlichen Gebäuden die Schraffirung dunkler zu halten als bei Privatgebäuden. Hölzerne Gebäude schraffirt man parallel zu ihren Grundlinien, wie die beiden Gebäude in Fig. 544. Kirchen kann man noch durch ein Kreuz und den Standpunkt des Thurms durch einen Ring mit Mittelpunkt kenntlich machen. Ruinen werden nur an den Rändern schraffirt, um gleichsam anzudeuten, dass ein Theil des Mauerwerks fehlt. Bei Mühlen und anderen Wasserwerken sind nebenbei kleine Sternchen anzubringen, welche Wasserräder bedeuten. Kirchhöfe werden wie Wiesen behandelt und erhalten zum Unterschiede von diesen kleine Kreuze. In farbigen Plänen legt man die massiven Gebäude roth (mit Carmin), die hölzernen gelb (mit Gummigutt) an. Oeffentliche Gebäude werden in beiden Fällen zweimal angelegt.

Fig. 546.

a b c d e f g h

Die Strassen werden nach ihrer Grösse und Bedeutung verschieden bezeichnet. (Fig. 546.)

Lit. a. Eine Hauptstrasse (Staats- und Kreisstrasse, Strasse 1. und 2. Classe).

Befinden sich an derselben Alleebäume, so werden dieselben angedeutet. In farbigen Plänen zieht man die inneren Begrenzungslinien roth aus und legt die Oberfläche blassroth an.

Lit. b. Eine Nebenstrasse (Bezirksstrasse, Gemeindeweg, Strasse 3. und 4. Classe). Hinsichtlich der Alleebäume und Colorirung derselben gelten die vorhergehenden Bemerkungen.

Lit. c. Ein Feld- oder Waldweg. Es soll immer die obere Linie ausgezogen und die untere punktirt werden. In farbigen Plänen legt man den Zwischenraum lichtbraun an.

Lit. d. Ein Fussweg. Statt dieser Bezeichnung wird häufig auch nur eine aus Strichen und Punkten zusammengesetzte Linie angewendet.

Lit. e. Ein Damm (Erdschüttung, Auftrag). In farbigen Plänen wird die Dammkrone blassroth angelegt und jede Böschung mit Carmin verwaschen.

Lit. f. Ein Hohlweg (Trockengraben, Einschnitt). In farbigen Plänen legt man die Sohle lichtbraun und die Böschungen gelb an, letztere verwaschen.

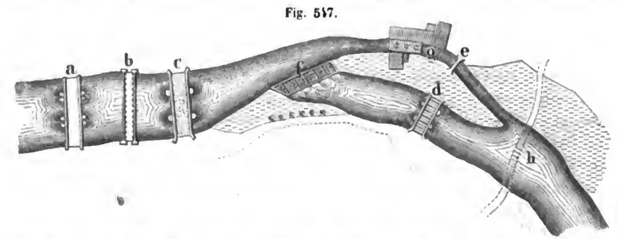
Lit. g. Ein Knüppelweg. Die Querstriche bezeichnen die Knüppel. Die lichten Stellen macht man in farbigen Plänen, je nach der Bedeutung des Wegs, blassroth oder lichtbraun.

Lit. h. Eine Eisenbahn. Nebenbei werden grosse Aufdämmungen nach Fig. e und bedeutende Einschnitte nach Fig. f angedeutet. In farbigen Plänen kann man die beiden Grenzlinien der Bahnkrone blau ausziehen.

Von den Brücken gibt man die Hauptlinien der horizontalen Projection an; in farbigen Plänen werden die steinernen roth, die hölzernen gelb, die eisernen graublau angelegt.

In Fig. 547 bezeichnet: a eine Schiffbrücke, bei welcher je zwei Schiffe (Pontons) ein Joch bilden; b eine eiserne und insbesondere eine Kettenbrücke; c eine steinerne, d eine hölzerne Brücke, e einen Steg. An seichten

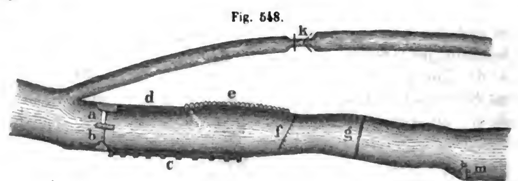
Fig. 547.



Stellen der Flüsse werden die Brücken bisweilen durch Furthen (h) ersetzt. Kommen in colorirten Zeichnungen Brücken vor, so bleibt die Form dieselbe wie in schwarzen Plänen, aber das vorherrschende Baumateriale wird, je nachdem es Stein, Holz oder Eisen ist, durch rothe, gelbe oder blaue Farbe angedeutet.

Die Wasserbauten werden in schwarzen und farbigen Plänen nach ihren Grundformen und ihrer Grösse dargestellt und man unterscheidet dabei, ob sie aus Stein oder Holz, oder aus beiden zugleich bestehen. In Fig. 548 bedeutet a eine steinerne und b eine hölzerne Schleuse; erstere wird in farbigen Plänen carminroth, letztere aber hellgelb (Gummigutt) angelegt.

Fig. 548.



Lit. c stellt ein steinernes und d ein hölzernes Beschlächt vor; in colorirten Plänen legt man jenes carminroth, dieses unter Weglassung der Schraffirung hellgelb an. Lit. e ist ein Flechtwerk, welches auch in farbigen Plänen in ähnlicher Weise wie hier behandelt wird. Dasselbe gilt von dem in f dargestellten Holzrechen und den mit g bezeichneten Ueberfällen. Ein grösseres Ueberfallwehr ist in Fig. 547 durch den Buchstaben f angedeutet.

Lit. k stellt eine Kammerschleuse vor: aus Steinen gebaut, wird sie in farbigen Plänen wie Mauerwerk, aus Holz wie Zimmerwerk behandelt.

Lit. m ist eine Schiffmühle: das vorne angebrachte Sternchen bezeichnet hier (ähnlich wie bei den feststehenden Mühlen) den Ort des Wasserrades. In farbigen Plänen lässt man die Schraffur ganz weg und behandelt die Figur mit einem blassgelben Farbenton. Eine Landmühle ist in Fig. 547 mit g bezeichnet.

Zu den Wasserbauten sind auch die Triftklausen oder jene ganz oder halb massiven Schleusenwehre zu rechnen, welche in grossen Wäldern quer durch Schluchten gebaut werden, um Quellen und kleine Bäche so weit aufzustauen, dass sie nach Oeffnung der Schleusenthore im Stande sind, das in dem Klausenhof angesammelte Holz den Berg hinab zu triften. Die Bezeichnung der Klause geschieht durch Andeutung des Wehres.

Befestigungen werden ebenfalls nach ihren Grundformen und der Verjüngung des Plans entsprechend horizontal projicirt. Böschungen werden nach dem Grade ihrer Neigung heller oder dunkler schraffirt; die Sohle trockener Gräben ist in schwarzen Plänen zu punktiren, in farbigen aber lichtbraun anzulegen; nasse Gräben werden dagegen in schwarzen und farbigen Plänen wie Flüsse behandelt. Für Mauer-, Holz- und Eisenwerk gelten die schon bekannten Unterscheidungszeichen.

Für Signale, Monumente und die übrigen künstlichen Gebilde, welche unter den vorhergehenden nicht begriffen und auch keine Grenzen

sind, bedient man sich der in Fig. 549 und 550 enthaltenen, gleichmässig für schwarze und farbige Pläne geltenden Bezeichnungen. Die Fig. 554

Fig. 549.

a b c d e f g h i k l m n o p q r s t u

enthält vorzugsweise solche Zeichen, welche bei Netzanlagen für Landesvermessungen und daher in Plänen von starker Verjüngung gebraucht werden. In derselben bedeutet: a einen Normalpunkt (§. 318), b ein massives Signal für eine Basis, c ein Gerüst-Signal, d ein dergleichen mit Dach,

Fig. 550.

a b c d e f g h i k

e ein Stecksignal, f einen Kirchthurm, g eine Capelle, h ein bewohnbares Schloss, i eine Schlossruine, k einen Blitzableiter, l einen Kamin, m einen Dachgiebel, n ein Baumsignal (Laubholz), o ein dergleichen von Nadelholz, p ein Feldkreuz, q einen Wegweiser, r eine Ortstafel, s eine Martersäule, t einen Markstein, u einen untergeordneten Netzpunkt. In Fig. 550 bezeichnet: a einen Bildstock, b einen massiven Meilenzeiger, c ein Monument, d einen Wegweiser, e ein Feldkreuz, f einen Schlagbaum, g eine Orts- und Warnungstafel, h eine Kohlstätte (Meiler), i einen Kalkofen, k eine Windmühle.

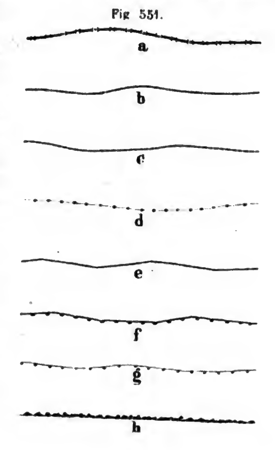


Fig 551.

Für Begrenzungen sind folgende Bezeichnungen im Gebrauche (Fig. 551): a Landesgrenzen, b Kreisgrenzen, c Bezirks- oder Landgerichtsgrenzen, d Gemeinde- und Flurgrenzen, e einfache Umfassungsmauern, f Umfassungsmauern mit Strebepfeilern, g Bretterwände, h lebendige Zäune.

2. Herstellung der Horizontalpläne.

§. 434. **Messtisch-Aufnahmen auszufertigen.** Die Horizontalpläne werden entweder mit oder ohne Messtisch aufgenommen. In dem ersteren Falle werden die Umrisse des Plans schon bei seiner Aufnahme gezeichnet,

und er bedarf nur noch der Vollendung oder Ausfertigung; in dem letzteren Falle aber ist der Plan aus den Messungs- und Rechnungsergebnissen erst herzustellen, und es wird seine Anfertigung ausschliesslich im Arbeitszimmer des Geometers vorgenommen.

Die Ausfertigung der mit dem Messtische aufgenommenen Pläne geschieht entweder mit oder ohne Farbe. In Bezug auf die schwarzen Pläne ist zu bemerken, dass sie grösstentheils schon während der Aufnahme mit guter schwarzer Tusche ausgezogen werden, so dass nach der Aufnahme die dargestellten Objecte nur noch mit den in den §§. 432 und 433 abgebildeten üblichen Zeichen zu versehen, der Massstab der Aufnahme beizufügen und die Schrift auszuführen ist, welche zum Verständniss des Plans erfordert wird. Sollen in den Horizontalplan Schichtenlinien eingezeichnet werden, um zugleich die Erhöhungen und Vertiefungen des Bodens anschaulich zu machen, so ist zu rathen, dass man diese Linien selbst in einem schwarzen Plane mit farbiger Tusche ausziehe, um jede Veranlassung zu Zweifeln über die Grenze der dargestellten Objecte abzuschneiden. Am natürlichsten erscheint es, diese Curven braun und nur jede fünfte oder zehnte vor den übrigen durch eine besondere Farbe (etwa grün) auszuzeichnen, um hierdurch den Ueberblick der Figurirung des Terrains zu erleichtern. Farbige Pläne werden der Hauptsache nach zunächst wie schwarze Pläne behandelt, nur dass bei der Auszeichnung mit Tusche in den Planzeichen die Schraffirungen und Punktirungen wegbleiben, welche durch die Farbe selbst ersetzt werden, und worüber die beiden vorhergehenden Paragraphen Aufschluss geben. Die Behandlung der Farben wird als bekannt vorausgesetzt und bezüglich der Horizontalcurven, des Massstabs und der Schrift gelten die für schwarze Pläne gemachten Bemerkungen.

§. 435. **Pläne nach Coordinatenmessungen anzufertigen.** Die ersten Arbeiten zur Herstellung dieser Pläne bestehen darin, dass man das aufgespannte Papier mit einem genau construirten Quadratnetz überzieht, dessen Seiten den für die Berechnung der Aufnahme gewählten Coordinatenaxen parallel laufen. Die Massstäbe des Netzes macht man für die Massstäbe 1 : 5000, 1 : 2500, 1 : 1200 beziehlich $^1/_2$, 1, 2 Dezimalzoll lang, so dass jede Seite in der Natur eine Länge von 250 Fuss hat; und wenn die Verjüngungen 1 : 4000, 1 : 2000, 1 : 1000 sind, so macht man auf den Plänen die Quadratseiten abermals beziehlich $^1/_2$, 1, 2 Dezimalzoll lang, so dass jede Seite einer natürlichen Länge von 200 Fuss entspricht. Wählt man von den Netzpunkten einen entsprechenden als Anfangspunkt der Coordinaten der Stationen, so ergeben sich damit auch die Axen des Blattes und es wird keiner Schwierigkeit unterliegen, unter Berücksichtigung des in §. 324 auseinander gesetzten Verfahrens, diese Stationspunkte selbst richtig in das Plannetz einzutragen. Hat man diese Punkte, so sind damit wiederum untergeordnete Abscissenaxen für die Aufnahme von Grenzen oder anderen Linien etc. gegeben, welche sich also auch leicht in den Plan eintragen lassen. Um die übrigen Punkte zu erhalten, ahmt man die zu ihrer

Aufnahme auf dem Felde angewendeten Constructionen auf dem Papiere nach. Geschieht es dabei, dass ein Punkt als der Schnitt zweier Linien bestimmt wird, welche durch Stationspunkte gehen, die ausserhalb des Planrandes liegen, so sind jedesmal nach den bekannten einfachen Sätzen der Trigonometrie oder analytischen Geometrie die Coordinaten des Schnittpunktes zu berechnen und darnach aufzutragen; denn es würde zu unsicher und zeitraubend seyn, wenn man die ausser dem Plane liegenden Stationspunkte erst construiren wollte, um durch eine entsprechende Verbindung derselben den gesuchten Punkt sofort direct zu erhalten. Findet man die gerade Verbindungslinie zweier Punkte, welche für die Aufnahme von Details mit der Kette als Abscissenaxe diente, grösser oder kleiner als sie der wirklichen Messung nach seyn soll, und ist die Differenz keinem groben Versehen beim Messen oder Auftragen zuzuschreiben: so müssen entweder die gemessenen Abscissen auf die im Plane gegebene Länge der Abscissenaxe, oder es muss diese auf die gemessenen Abscissen reducirt werden. Das erstere Verfahren ist für sich klar; zur Erläuterung des zweiten, welches intelligente Practiker vorziehen, dürfte ein einfaches Beispiel genügen.

Hat nämlich die Kettenmessung für eine Linie 784′,2 und der Plan nur 781′,2 ergeben, so verlängert man die Linie auf dem Plane um 800 — 784,2 = 15′,8, so dass deren Gesammtlänge jetzt = 781′,2 + 15′,8 = 797′ ist, und nimmt diese Länge für 800′ an. Theilt man diese Länge in 8 gleiche Theile, so wird jeder 99′,6 statt 100′ lang. Die Differenz von 0′,4 ist bei Massstäben, welche kleiner als 1 : 2000 sind, kaum mehr sichtbar und darf daher wohl vernachlässigt werden. Ist der Massstab grösser als 1 : 2000 oder die Differenz grösser als hier, so braucht man nur die Anzahl der Theile, in welche man die reducirte Linie zerlegt, zu vergrössern, um die Theildifferenzen so klein zu erhalten, dass sie vernachlässigt werden dürfen.

Man begreift, dass sich das in vorstehendem Beispiele versinnlichte Verfahren auch anwenden lässt, um eine geneigte Abscissenlinie, die nicht horizontal, sondern dem stetig steigenden oder fallenden Boden entlang gemessen worden ist, auf den Horizont zu reduciren. Ist man so weit gekommen, dass alle Punkte und Linien aufgetragen und alle Umrisse mit Tusche ausgezogen sind, so wird der Plan nach §. 434 ausgefertigt.

B. Vertikal- oder Nivellementspläne.

1. Längenprofile.

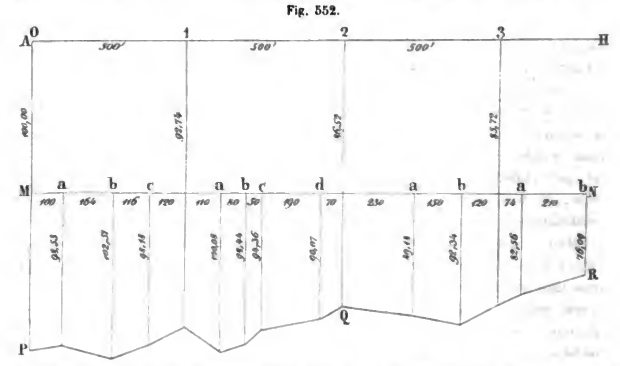
§. 436. Die Zeichnung eines Längenprofils der Erdoberfläche besteht der Hauptsache nach in dem Auftragen der gemessenen und berechneten Abscissen und Ordinaten aller Brechungs- und Abtheilungspunkte der nivellirten Linie. Da dergleichen Profile oft sehr lang sind, so kommt es darauf an, die Zeichnung möglichst übersichtlich zu machen. Zu dem Ende ist es Gebrauch:

1. die Horizontalprojection der Linie, nach welcher das Terrainprofil

genommen wird, auf dem Felde schon in gleiche Abschnitte von einer in runder Zahl auszudrückenden Länge (z. B. 100 Meter, 100 Klafter, 100 Ruthen, 500 Fuss, 1000 Fuss etc.) zu theilen und diese Abtheilungspunkte von 0 angefangen fortlaufend zu numeriren. Diese Numerirung gibt sofort die Längen der Abscissen an; denn beträgt eine Abtheilung 100 Ruthen à 10 Fuss, so gibt die Abtheilungs- oder Profilnummer 37 an, dass der damit bezeichnete Punkt 3700 Ruthen oder 37000 Fuss vom Anfangspunkte der Linie entfernt sey. Diese Hauptabtheilungen werden in der Zeichnung auf die Weise hervorgehoben, wie Fig. 552 zu erkennen gibt, in der die Linie AH den Horizont bezeichnet, auf den sich die Abstände der Terrainpunkte beziehen. Es ist ferner Gebrauch:

2. die zwischen den Hauptpunkten liegenden Brechungspunkte des Terrains auf dem Felde und in der Zeichnung durch Buchstaben zu benennen, wie dieses abermals aus der nachstehenden Figur zu entnehmen ist. Würde man die Buchstaben a, b, c .... auch über die Linie AH setzen, so liessen sich die Ziffern 1, 2, 3 .... nicht mehr so gut übersehen, als dieses der Fall

Fig. 552.



ist, wenn man in einer Entfernung von 1 bis 2 Zollen eine Parallele MN zu AH zieht und über diese Parallele den Namen der Zwischenpunkte setzt. Wenn auch in der Zeichnung die Ordinaten dieser Punkte nur bis an die Linie MN ausgezogen sind, so beziehen sich die beigeschriebenen Vertikalabstände doch auf die durch AH angedeutete gemeinsame Horizontalebene. Weiter ist es gebräuchlich:

3. die horizontalen Entfernungen der einzelnen Profilpunkte unter sich in den Plan einzuschreiben, wie die mehrgenannte Figur zeigt; und zwar stehen die Längen der Hauptabtheilungen unmittelbar unter der oberen, die der Zwischenabtheilungen aber unmittelbar unter der unteren Horizontalen. Für die Hauptabtheilungen wäre das Einschreiben der Längen unnöthig,

wenn es nicht manchmal vorkäme, dass eine Abtheilung grösser oder kleiner werden muss als das bestimmte Mass; z. B. bei Flüssen, Gebäuden etc. In solchen Fällen ergänzen sich aber immer zwei Nachbarabtheilungen; denn kann z. B. die eine nur 920′ lang gemacht werden, so erhält die folgende eine Länge von 1080′, so dass beide Abtheilungen zusammen doch wieder 2000′ lang sind. Eben so ist es eingeführt:

4. die Abscissen und Ordinaten nach verschiedenen Massstäben aufzutragen und zwar die Ordinaten in einem grösseren Massstab als die Abscissen. Der Höhenmassstab ist nach Erforderniss 5, 10, 20, 100mal grösser als jener der Längen. Durch diese Verschiedenheit der Massstäbe erhält man zwar ein verzerrtes Bild des Terrainprofils, aber man übersieht dessen Steigungen und Gefälle besser. Es hindert jedoch Nichts, Längen und Höhen nach einerlei Massstab aufzutragen, wenn man dazu Lust oder sonst wie Veranlassung hat. Endlich ist es ein allgemeines Uebereinkommen:

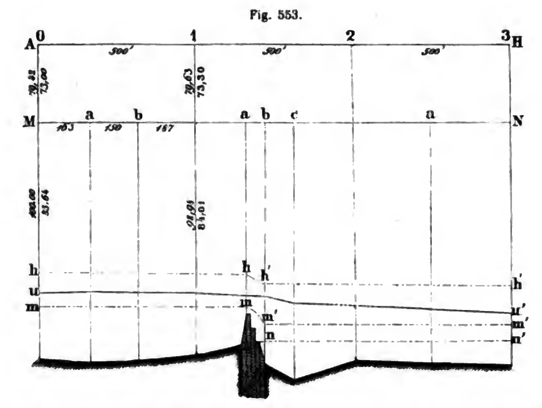
5. alle Linien, Zahlen und Worte, welche sich auf das natürliche Terrain beziehen, schwarz; jene aber, welche sich auf ein herzustellendes Bauwerk, z. B. eine Strasse, Eisenbahn, einen Canal, Durchstich etc. beziehen, roth zu zeichnen und zu schreiben, um durch diese Farben das Bestehende von dem Werdenden oder den auf dem Terrain vorzunehmenden Veränderungen anzuzeigen.

Näher hierauf einzugehen, liegt ausser dem Zwecke dieses Buches und gehört in das Bereich des Ingenieurwesens; wen es jedoch interessirt, die gebräuchliche Anlage und Ausstattung von Nivellementsplänen für Erdbauwerke näher kennen zu lernen, findet dergleichen in des Verfassers „Vorlegeblättern zur Strassen- und Eisenbahnbaukunde mit erläuterndem Texte,“ welche (zum Theil in Farbendruck) im Jahre 1856 in der literarisch-artistischen Anstalt der J. G. Cotta'schen Buchhandlung zu München erschienen.

§. 437. Das Längenprofil eines Flusses unterscheidet sich von dem einer trockenen Terrainstrecke nur insoferne, als es ausser dem Nivellement der Stromrinne oder des Thalwegs, welches gerade wie ein Terrain-Längenprofil dargestellt wird, noch die Wasserspiegel des Flusses bei verschiedenen Wasserständen und in der Regel auch ein Ufer desselben bildlich darstellt. Nehmen wir an, dass das Nivellement des Flusses nach §. 398 aufgenommen und das des Thalwegs nach §. 436 aufgetragen sey, so ist hinsichtlich des Einzeichnens der Wasserspiegel und des Flussufers unter Bezugnahme auf Fig. 553, welche ein Stück eines Flussnivellements vorstellt, noch Folgendes zu bemerken:

1. Die Linien und Zahlen, welche sich auf die Wasserstände beziehen, werden blau gezeichnet und geschrieben. Da wir aber diese Farbe in Fig. 553 nicht anwenden konnten, so haben wir die Wasserspiegel durch gestrichelt-punktirte Linien (—·—·—) und die sich auf sie beziehenden Zahlen durch stehende Schrift angedeutet. Die übrigen an den Ordinaten 0 und 1 sich befindenden Zahlen beziehen sich auf den Thalweg und das Flussufer, und gehen denen für die Wasserstände jederzeit voraus.

Fig. 553.



2. Ob die blauen Zahlen dem Hochwasser (h, h'), oder dem Mittelwasser (m, m'), oder dem Niederwasser (n, n') angehören, ergibt die Ansicht der Zeichnung ohne Weiteres. Ebenso versteht es sich von selbst, welche schwarze Zahl dem Thalweg und welche dem Ufer angehört. Die Uferlinie wird ebenfalls schwarz ausgezogen.

3. Für den Gebrauch des Längenprofils eines Flusses ist es bequemer, dasselbe so abzustecken und abzubilden, dass die fortlaufenden Nummern der Hauptabtheilungen und die Schrift, welche auf den Plan gehört, in der Richtung des Flusslaufes stehen. Man kann zwar ein Nivellement, welches in der entgegengesetzten Richtung aufgenommen und gezeichnet ist, ebenso gut wie das vorige gebrauchen; aber es tritt dem, der an die erstere Darstellungsweise gewöhnt ist — und das ist wohl der grössere Theil der Ingenieure — einigermassen störend entgegen.

4. Die Befolgung der hier gegebenen Regeln setzt keineswegs, wie oft behauptet wird, [1] voraus, dass die Aufnahme auf dem linken Flussufer geschehen müsse: sie kann unbeschadet der Darstellung ebenso gut auf dem rechten Ufer vorgenommen werden, da es offenbar gleichgültig ist, ob die sichtbare Uferlinie (u, u') diesseits oder jenseits des Wasserprofils (m m') liegt.

2. Querprofile.

§. 438. Für die bildliche Darstellung der Querprofile sowohl des festen Bodens als der Flüsse gelten im Allgemeinen die in den beiden vorhergehenden Paragraphen mitgetheilten Regeln; im Besondern ist aber noch Folgendes zu bemerken.

[1] Z. B. in Bachmann's »Theorie und Praxis des Nivellirens,« Weimar 1838, S. 185.

1. Benützt man die aufgenommenen Querprofile zur Darstellung der Bodenoberfläche durch Horizontalcurven, so trägt man dieselben (nach den Fig. 554 bis 556) in verschiedenen Massstäben auf und nimmt die der Abscissen gleich dem Massstabe des Horizontalplans, worauf die genannten Curven verzeichnet werden sollen, den der Ordinaten aber 5 oder 10mal grösser.

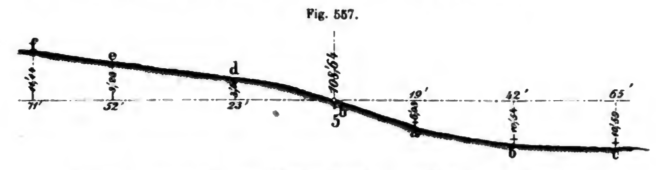
Fig. 554.

Fig. 555.

Fig. 556.

2. Gebraucht man die Querprofile zur Berechnung von Erdmassen oder zu Constructionen für Erdbauwerke, so werden die Abscissen und Ordinaten, wie in Fig. 557, in gleichem Massstabe aufgetragen, und dieser selbst wird so gross genommen, dass man die Dimensionen der zu berechnenden Flächentheile des Profils noch mit der Genauigkeit abgreifen kann, welche die Rechnung oder die Construction erfordert. Der gebräuchlichste Massstab ist 1 : 100; weniger oft wird 1 : 200 oder 1 : 50 angewendet.

Fig. 557.



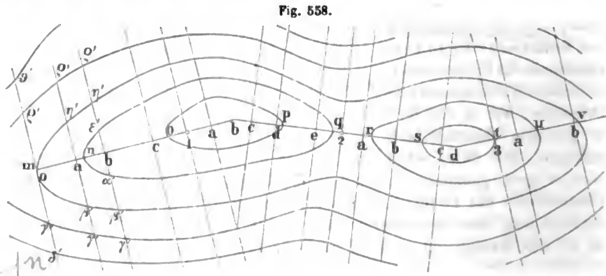
3. Die Querprofile der Flüsse werden entweder nach Fig. 553 oder 557 gezeichnet, je nachdem man sie bloss zur Darstellung der Beschaffenheit eines Flusses oder zu Erdberechnungen und Constructionen braucht; ausserdem werden in sie mit blauer Farbe die Wasserstände eingetragen, wie solche an der betreffenden Stelle des Längenprofils enthalten sind.

4. Schliesslich wiederholen wir die schon früher gemachte Bemerkung, dass bei der Zeichnung der Querprofile die rechte und linke Seite derselben nicht verwechselt werden darf, wenn man nicht Gefahr laufen will, die Construction oder Rechnung, wofür man solche Profile braucht, ganz zu entstellen und folglich unbrauchbar zu machen.

3. Horizontalcurven.

§. 439. Wie die Horizontalcurven aus gegebenen Terrainaufnahmen construirt werden, ist schon in den §§. 352 bis 355 gezeigt worden, da sich die Aufnahme derselben vollständiger erklären lässt, wenn man zugleich die verschiedenen Methoden, die Curven daraus zu finden, kennt. Eben so haben wir früher schon daran erinnert, dass es zweckmässig erscheine, selbst auf schwarzen Horizontalplänen die Schichtenlinien farbig (etwa braun) auszuziehen und bei sehr durchschnittenem Terrain jede fünfte oder zehnte Curve durch eine besondere Farbe (etwa grün) vor den übrigen auszuzeichnen, weil sich dadurch deren Gang und hiemit die Gestaltung des Terrains leichter erkennen lasse. In Fig. 439 S. 637 ist eine solche Curve (X) gestrichelt, während die übrigen ausgezeichnet sind; und in unseren „Vorlegeblättern zur Strassen- und Eisenbahnbaukunde" ist ein farbiger Situationsplan mit Horizontalcurven enthalten.

Fig. 558.



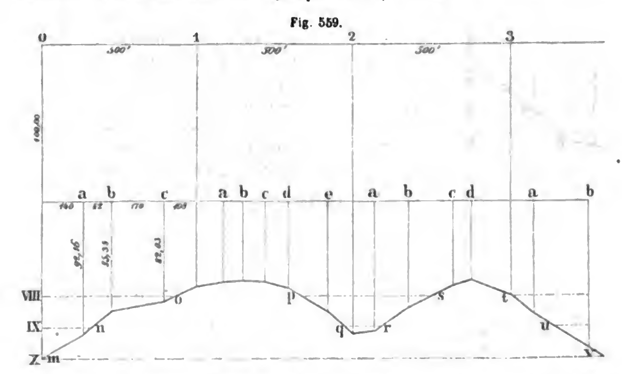
Ist eine Terrainfläche durch Horizontalcurven dargestellt, so lässt sich aus denselben nach jeder beliebigen Richtung ein Profil construiren. Denn angenommen, Fig. 558 stelle das Nivellement einer Fläche vor und der Abstand der Curve m vom allgemeinen Horizonte sey = 100 Fuss, so wird man das Längenprofil nach der Richtung m b d v erhalten, wenn man zuerst diese gebrochene Linie in Hauptabtheilungen (0, 1, 2, 3 ....) von etwa 500 Fuss Länge und in passende Zwischenabtheilungen (a, b, c ....) zerlegt und die Vertikalabstände dieser Punkte bestimmt. Für m = 0 ist dieser Abstand = 100'; für 0^a findet man ihn folgendermassen. Denkt man sich in der Richtung m b das Terrain durch eine Vertikalebene geschnitten und in a und n Senkrechte zur Horizontalprojection m n errichtet, bis sie die Terrainlinie in a' und n' schneiden: so hat man zwei ähnliche Dreiecke m n n' und m a a', in welchen drei Stücke bekannt sind, nämlich: n n' = 10' = dem Abstand der Horizontalebenen, m n = 178',6 und m a = 140' = den Längen, welche der im Massstabe von 1 : 5000 angefertigte Horizontalplan liefert; man findet desshalb aus der Proportion

$$m n : m a = n n' : a a' \text{ oder aus } 178',6 : 140' = 10' : a a' \quad a a' = 7',84$$

und es ist folglich der Abstand des in a projicirten Punktes a' oder 0^a, da er 7',84 über m, das den Abstand 100' hat, gleich 100 — 7',84 = 92',16. So fortfahrend erhält man die Abstände und Entfernungen der Punkte 0^b, 0^c, 1, 1^a, 1^b .... n, o, p, q .... und kann damit folglich den gesuchten und in Fig. 559 dargestellten Längendurchschnitt zeichnen.

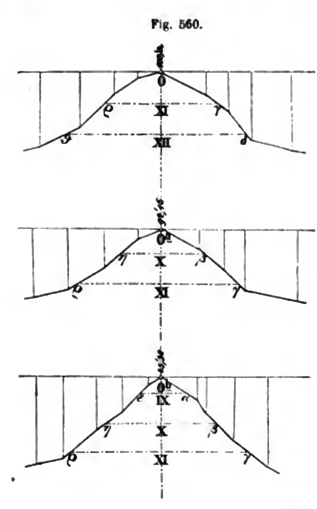
In gleicher Weise kann man in Bezug auf das Längenprofil mnopq .... Querprofile aus den Horizontalcurven construiren. Will man z. B. in dem Punkte m oder 0 der Fig. 558 ein zu mb senkrecht stehendes und folglich in der Richtung ϱ'mδ' zu nehmendes Querprofil zeichnen, so hat man zunächst für den Punkt m oder 0 den Abstand = 100'; für die Punkte γ' und ϱ' die Ordinaten = 110', die Abscissen beziehlich = mγ' und = mϱ'; für δ' und ϑ' die Ordinaten = 120', die Abscissen = mδ' und mϑ'. Damit ist das erste Querprofil 0 in Fig. 560 bestimmt. Durch ein gleiches Verfahren findet man auch die Querprofile 0^a, 0^b u. s. w.

Fig. 559.



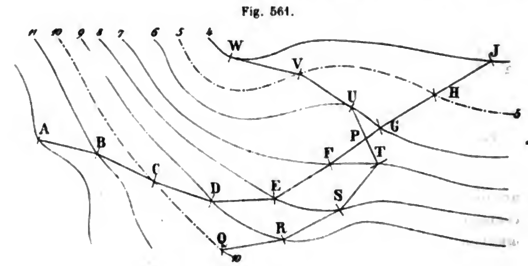
Für die Ingenieure werden die Horizontalcurven namentlich dadurch von besonderer Wichtigkeit, dass sie gestatten, auf sehr einfache Weise eine Linie von bestimmter Neigung aufzusuchen, welche von einem gegebenen Punkte ausgeht und in einem anderen gegebenen Punkte ankommt. Soll z. B. eine solche Linie von 5% Steigung zwischen den Punkten A und W der Fig. 561 gesucht werden und ist der Abstand der Horizontalebenen = 10 Fuss, der Massstab des Horizontalplanes = 1 : 5000 gegeben, so verfährt man folgendermassen. Man berechnet zuerst die Länge der Horizontalprojection einer Linie, deren oberer Endpunkt gerade um 10' höher liegt als der untere (diese Länge beträgt hier 200'); alsdann schneidet man mit dieser auf den Massstab des Planes reducirten Länge (hier mit einer Zirkelöffnung von 0',04) von dem Punkte A aus die Punkte B, C, D, E ...., und von W aus die Punkte V, U, T, S .... ab. Die Linien ABCDE .... und

Fig. 560.



WVUTS .... schneiden sich im Punkte P; da nun die Stücke FP (von FG) und PU (von TU) ebenfalls 5% Steigung haben, so erfüllt die Linie ABCDEFPUVW die gegebenen Bedingungen, und es ist dieselbe folglich eine der möglichen Lösungen der gestellten Aufgabe. Die Richtigkeit des Verfahrens bedarf wohl keines besonderen Beweises; und dass viele Lösungen möglich sind, erkennt man sofort an dem Umstande, dass von jedem Punkte A, B, C .... W, V, U .... aus im Allgemeinen zwei Schnittpunkte auf der nächst höheren oder tieferen Curve erhalten werden, von welchen aus wieder je zwei Schnitte möglich sind. Zu entscheiden, welche von den aufgefundenen Linien einem ausgesprochenen Zwecke am bessten genügt, gehört nicht mehr hieher.

Fig. 561.



C. Berg- oder Grubenpläne.

§. 440. Die Berg- oder Grubenpläne bestehen, wie die geometrischen Pläne, aus Horizontal- und Vertikalprojectionen oder aus „Grund- und Seigerrissen."

Die Grundrisse stellen entweder einen Theil der Erdoberfläche oder einen wagrechten Durchschnitt eines Grubenwerks vor; in dem ersteren Falle unterscheiden sie sich der Form nach durch Nichts von einem geometrischen Situationsplane, und im letzteren Falle stimmen sie formell mit

dem wagrechten Durchschnitte eines Gebäudes überein. Besondere allgemein übliche Zeichen für die Horizontalprojectionen von Gegenständen, die ausschliesslich dem Bergbaue und beziehungsweise der Markscheidekunst angehören, gibt es nur wenige. Die gebräuchlichsten sind in Fig. 562 zusammengestellt und nachstehend erklärt: a bedeutet einen Schacht, b ein Stollenmundloch ohne Rösche und c eines mit offener Rösche, d einen

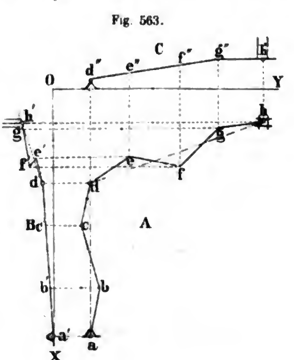


Fig. 562.

Bohrpunkt, e ein Schurfzeichen, f einen Mark- oder Lochstein. Die Mineralgattung, welche in einem Bergwerke gewonnen oder anderswo gefunden wird, bezeichnet man sowohl in topographischen Karten als in Situationsplänen und Grundrissen meist mit den in der Astronomie gebräuchlichen Zeichen der Himmelskörper, nämlich mit dem Zeichen der Sonne (g) das Gold, mit dem Zeichen des Mondes (h) das Silber, mit dem des Merkurs (i) das Quecksilber, mit dem der Venus (k) das Kupfer, mit dem des Mars (l) das Eisen, mit dem der Erde (m) das Blei, mit dem des Jupiters (n) das Zinn. Für Schwefel gebraucht man das Zeichen lit. o, für Kochsalz das unter lit. p und für Alaun das bei q.

Die Seigerrisse der Markscheider stimmen im Allgemeinen mit den Längen- und Querprofilen der Ingenieure und Geometer überein; in einzelnen Fällen aber unterscheiden sie sich dadurch von den geometrischen Profilen, dass sie wirkliche Vertikalprojectionen sind, während die genannten Längen- und Querprofile stets als Abwickelungen lothrecht stehender Prismen- oder Cylinderflächen erscheinen. In solchen Fällen sind dann auch gewöhnlich drei Projectionen eines Grubengebäudes vereinigt, nämlich die horizontale (söhlige Projection, Grundriss) und zwei auf einander senkrecht stehende (erste und zweite vertikale Projection, Aufriss und Kreuzriss); es werden also die aufgenommenen Linien und Winkel auf drei senkrechte Coordinatenebenen nach den Regeln der analytischen und darstellenden Geometrie projicirt. Die Wahl der Projectionsaxen und beziehungsweise der Projectionsebenen ist im Wesentlichen unbeschränkt; man wird jedoch gut thun, bei Dar-

Fig. 563.



stellungen von Stollen, Strecken, Querschlägen u. dgl. eine der Axen in das allgemeine Streichen dieser Grubenbaue zu legen, damit wenigstens eine vertikale Projection nahezu unverkürzt ist. Ferner erscheint es zweckmässig, die horizontale Projectionsebene bei Stollenbauen durch den tiefsten Punkt der Stollensohle und bei Tiefbauen in die höchste Stelle des Schachtes, d. i. in seinen Tagkranz zu legen; endlich kann man auch, wenn es die bildliche Darstellung übersichtlicher oder verständlicher macht, die beiden vertikalen Projectionsebenen unter einem spitzen oder stumpfen Winkel sich schneiden lassen.

In Fig. 563 ist die Axe OX dem allgemeinen Streichen ad des Stollens parallel, die Axe OY aber senkrecht auf OX gestellt; A ist der Grundriss, B der Aufriss, C der Kreuzriss des Stollens ad und seines Querschlags dh. Dass dieses Auftragen nur auf Grund eines vollständig berechneten Markscheidezugs, wozu die §§. 367 bis 370 Anleitung geben, geschehen kann, versteht sich von selbst, und dass auch hier die Höhen in der Regel nach einem anderen Massstabe aufgetragen werden als die Längen, bedarf wohl kaum der Erinnerung.

Für das Ueberschreiben und Copiren der Grubenpläne gelten die für geometrische Pläne mitgetheilten Regeln; und was das Coloriren der Zeichnungen betrifft, so gibt man den oberirdischen Gegenständen dieselben Farben, welche sie in topographischen Karten und Plänen erhalten, während die Bezeichnung der unterirdischen Objecte mit Farben ziemlich willkührlich ist. Empfehlenswerthe colorirte Grubenpläne findet man in Hanstadt's „Anleitung zur Markscheidekunst," Pesth 1835, und in Weisbach's „neuer Markscheidekunst," Braunschweig 1851, auf die wir hier mit dem Wunsche verweisen, dass sich die bildlichen Darstellungen der Markscheider denen der Geometer und Ingenieure eben so nähern mögen, wie dieses bei den Messungsmethoden schon der Fall ist.

Dritter Abschnitt.

Abzeichnung der Karten und Pläne.

§. 441. Wenn auch in neuerer Zeit die in den meisten europäischen Staaten hergestellten topographischen Karten und Katasterpläne durch Lithographie und Kupferstich vervielfältigt werden und besondere Copieen derselben desshalb unnöthig erscheinen, so ist doch diese Art des Copirens der Originalzeichnungen wegen ihrer Kostspieligkeit nicht auf alle geometrischen Aufnahmen, die man in mehreren Exemplaren zu besitzen wünscht, anwendbar, und es gibt also gleichwohl noch Fälle genug, in denen Karten und Pläne jeder Art in gleicher oder verjüngter Grösse abzuzeichnen sind.

Darum dürfen hier auch einige Erörterungen über das Copiren und Reduciren von Originalzeichnungen nicht fehlen.

Es gibt drei Methoden eine Zeichnung zu copiren, nämlich das Durchzeichnen, das Abzeichnen mittels quadratischer Netze, und das Abzeichnen mit Hilfe des Pantographen oder Storchschnabels. Die beiden letzteren Methoden sind zugleich geeignet, das Original in einem beliebigen Verhältnisse zu verkleinern oder zu vergrössern. Das Vergrössern einer Karte oder eines Planes ist jedoch aus demselben Grunde nicht zu empfehlen, aus dem man bei der geometrischen Aufnahme immer nur vom Grossen in's Kleine und nicht umgekehrt vom Kleinen in's Grosse arbeitet: nämlich wegen der Anhäufung der Fehler, die dadurch unvermeidlich entsteht. Desshalb ist hier auch nur von dem Verkleinern oder Reduciren der Karten und Pläne die Rede.

A. Das Durchzeichnen.

§. 442. Man kann drei Arten des Durchzeichnens unterscheiden, nämlich: das Durchzeichnen mittels Strohpapiers oder Bausleinwand (das Bausen), das Durchzeichnen mittels des Copirpultes, und das Durchzeichnen mittels der Pikirnadel (das Pikiren).

Das Bausen setzt ein durchscheinendes Gewebe, auf dem weder Tusch noch Farbe fliessen, voraus. Bisher hat man immer das bekannte sogenannte Strohpapier dazu verwendet; in neuerer Zeit bedient man sich aber namentlich zu Bausen, welche längere Dauer haben sollen, der Bausleinwand, welche in vorzüglicher Qualität von Winckler in Chemnitz u. A. geliefert wird. [1] Diese Leinwand (oder das Strohpapier) breitet man über die zu bausende Zeichnung glatt aus und befestigt sie daran mit etwas Wachs oder kleinen Zwingen; hierauf zieht man (unter Benützung eines Dreiecks für die geraden Linien) die Grenzen der Figuren mit Tusch so genau als möglich aus, und bringt schliesslich die topographischen Zeichen, Schrift und Farben am rechten Ort und in der rechten Weise an. Zum Gebrauch spannt man dergleichen Bausen, mögen sie auf Strohpapier oder Bausleinwand gemacht seyn, auf weisses Papier, wobei zu rathen ist, nicht bloss die Ränder der Bause, sondern deren ganze Fläche festzukleben.

Das Copirpult, dessen man zur zweiten Art des Durchzeichnens bedarf, besteht aus einer hinreichend grossen ebenen Glastafel, welche von einem Holzrahmen umschlossen ist und mit diesem um ein Scharnier wie eine Pultplatte gedreht werden kann. Zwei Spreizen dienen dazu, der Glastafel die Neigung zu geben, welche zum Zeichnen gewünscht wird.

Mit diesem Apparate copirt man eine Zeichnung dadurch, dass man sie erst mit dem Zeichenpapiere überspannt und dann beide auf der Glastafel des Pultes befestigt. Dieses wird gegen das Fenster gerückt und so lange gehoben oder gesenkt, bis man die Conturen gut durchscheinen sieht; wobei zu bemerken ist, dass man durch das Herablassen einer Rolette bis

[1] Von der 40'' breiten Leinwand kostet die sächs. Elle etwa 40 Krz. rhl., also 1 □' 6 Krz.

auf den oberen Holzrand des Pultes die Deutlichkeit der durchscheinenden Linien noch etwas vermehren kann. Hierauf wird wie beim Bausen verfahren.

Das Pikiren einer Karte oder eines Planes besteht darin, dass man alle Eck- und Krümmungspunkte der Originalzeichnung mittels einer feinen, in Holz befestigten Nadel durchsticht und auf diese Weise in das unverrückbar darunter liegende Zeichenpapier überträgt. Nachdem dieses geschehen ist, verbindet man die zusammengehörigen Punkte durch gerade oder krumme Linien und vollendet die Zeichnung, wie früher angegeben. Dass diese Art des Durchzeichnens das Original verdirbt, bedarf wohl keiner weiteren Erinnerung.

B. Das Abzeichnen durch Quadratnetze.

§. 443. Soll die Copie die Grösse des Originals erhalten, so wird erfordert, dass man sowohl dieses als das Zeichenpapier der Copie mit feinen Bleilinien in Quadrate von gleicher Grösse eintheilt und in jedes Quadrat der Copie genau Das einträgt, was das entsprechende Quadrat des Originals enthält. Das Einzeichnen in die Quadrate von 3 bis 6 Linien Seitenlänge geschieht im Allgemeinen nach dem Augenmasse; es hindert jedoch Nichts, einzelne Punkte mit dem Zirkel auf den Quadratseiten abzumessen oder in der Quadratfläche durch Kreisbögen zu bestimmen. Quadrate, welche sehr viel Detail enthalten, theilt man noch durch ihre Diagonalen, um weitere Anhaltspunkte für das Uebertragen nach dem Augenmasse zu erhalten.

Ist für die Copie ein kleinerer Massstab vorgeschrieben und verhält sich dieser zu dem Massstabe des Originals wie c : o, so müssen sich die Quadratseiten der Copie ebenfalls wie c : o verhalten. Wäre $o = {}^1/_{2000}$ und $c = {}^1/_{5000}$, so hätte man $c : o = 2 : 5 = 0{,}4 : 1$, d. h. die Quadratseiten der Copie dürften nur 0,4 der Länge der Seiten der Originalquadrate haben. Das Uebertragen des Details in die Copiequadrate geschieht wiederum nach dem Augenmasse; will man aber auch einzelne Entfernungen abmessen, so kann dieses entweder mit Hilfe eines Proportionalzirkels, dessen Einrichtung und Gebrauch als bekannt vorausgesetzt wird, oder mittels eines Reductions-Dreiecks geschehen. Von diesem Dreiecke verhalten sich zwei Seiten AB, BC (Fig. 564) zu einander wie o : c und machen bei B einen beliebigen (also z. B. einen rechten) Winkel. Ist nun AD die zu reducirende Länge, so gibt die zu BC parallele Gerade DE den im Verhältnisse von o : c verjüngten und in die Copie überzutragenden Abstand.

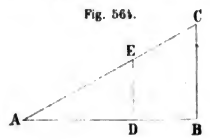


Fig. 564.

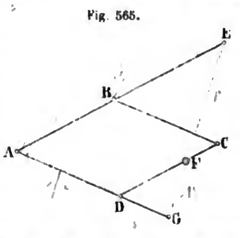
Wenn man eine Zeichnung zu copiren hat, deren Kostbarkeit nicht gestattet, sie mit einem Netze von Bleilinien zu überziehen, so zeichnet man dieses Netz mit Tusche auf Bausleinwand und befestigt diese auf dem Rande der Originalzeichnung so lange, bis die Copie gemacht ist. Netze von Seidenfäden, die man über

die zu copirenden Karten und Pläne spannt, und ebenso Netze, die auf Glastafeln geritzt sind, verursachen viel mehr Umstände und Kosten als die auf Bausleinwand, wesshalb diese nicht bloss in dem bezeichneten Falle vorzuziehen, sondern überhaupt zu empfehlen sind, da man sich damit die Mühe ersparen kann, für jede Copie ein Quadratnetz auf das Original zu zeichnen.

C. Das Abzeichnen mit dem Pantographen.

§. 444. **Theorie und Beschreibung des Pantographen.** Der Pantograph besteht aus einem verschiebbaren Parallelogramm ABCD (Fig. 565), dessen Seiten an den Enden durch Gewinde verbunden sind, und aus zwei auf den Seiten AB, AD befestigten Stiften E und G, welche mit einer auf der dritten Seite CD angebrachten Axe F in einer vertikalen Ebene liegen. Bei dem Gebrauche dreht sich das Instrument um die Axe F, welche ihren Ort nicht ändert; der Stift E wird auf dem Original herumgeführt und der Stift G dient zum Nachzeichnen.

Fig. 565.



Von einer solchen Vorrichtung lässt sich leicht beweisen: erstens, dass der Stift G eine Figur beschreibt, welche der vom Stifte E durchlaufenen ähnlich ist, und zweitens, dass sich die homologen Seiten beider Figuren wie die Abstände der Axe F von den Stiften E und G verhalten.

Denn es verhält sich in den ähnlichen Dreiecken AEG und DFG:

$$AE : DF = EG : FG = AG : DG;$$

und wenn man die erste Figur in die zweite Lage (Fig. 566) versetzt, in den ähnlichen Dreiecken A'E'G' und D'FG':

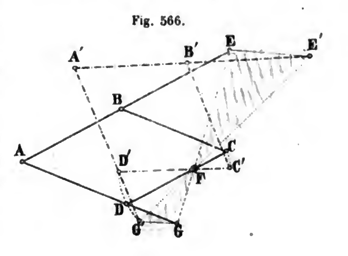
$$A'E' : D'F = E'G' : FG' = A'G' : D'G'.$$

Weil nun vermöge der Construction $D'F = DF$ und $A'E' = AE$, so folgt

$$EG : FG = E'G' : FG' \text{ oder } EF : FG = E'F : FG',$$

d. h. das Dreieck FGG' ist dem Dreieck FEE' ähnlich und der vom Stifte G durchlaufene Weg GG' verhält sich zu dem Wege EE' des Stifts E wie FG zu FE. Was aber von diesen zwei Dreiecken gilt, ist von allen wahr, in die sich die von den Stiften E und G beschriebenen Figuren von dem Punkte F aus zerlegen lassen; folglich ist auch bewiesen, was behauptet wurde.

Fig. 566.



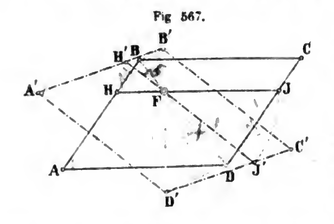
Nennt man die constanten Längen AD und AE beziehlich p und q, die veränderlichen Grössen DG und DF beziehlich x und y, und setzt das Verhältniss der Abstände FG : FE = u : v, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AEG und DFG (Fig. 565):

$$x = \frac{u}{v}\,p \quad \text{und} \quad y = \frac{u}{u+v}\,q. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (495)$$

Ertheilt man den Grössen p und q die Werthe, welche einem bestimmten Instrumente entsprechen, und nimmt man das Verhältniss von u : v ebenfalls als gegeben an, so kann man die Werthe von x und y berechnen, welche dazu dienen, auf dem Arme AD den Stift G (durch Abzählung von x = DG) und auf dem Arme CD die Axe F (durch Abmessung von y = DF) so festzustellen, dass die mit dem Stifte E umfahrene Figur von F in dem Verhältnisse von v : u verkleinert wird. Von der genauen Berechnung und Abmessung der Werthe von x und y kann man überzeugt seyn, sobald die Punkte E, F und G in einer Geraden liegen.

Eine Abänderung des in seinen mathematischen Beziehungen eben dargestellten Pantographen besteht darin, dass man die Stifte E und G in die Eckpunkte B und D des Parallelogramms ABCD (Fig. 565) und die Axe F in die Diagonale BD verlegt, wie die beigedruckte Fig. 567 zeigt, in der die accentuirten Buchstaben die aus der Drehung um die Axe F entstandene zweite Lage des Parallelogramms ABCD bezeichnen. Soll diese Vorrichtung wie die vorige wirken, so ist nachzuweisen, dass △ DD′F dem △ BB′F ähnlich ist, wenn alle Seiten des Parallelogramms und die Parallele HJ gleiche und unveränderliche Längen haben und der Punkt F fortwährend in der Diagonale BD liegt. Man findet aber aus der Aehnlickeit der Dreiecke ABD und HBF, so wie der Dreiecke A′B′D′ und H′B′F, und aus dem Umstande, dass FH′ = FH und B′H′ = BH ist, sehr einfach die Proportion

Fig 567.



$$BD : BF = B'D' : B'F, \text{ und hieraus } DF : BF = D'F : B'F;$$

und damit ist bewiesen, was zu beweisen war.

Setzt man DJ = y′, DF = x′, HB = u, BF = v und AB = AD = p, so hat man zur Berechnung der Werthe, welche die Lage der Axe F bestimmen, wenn p, u, v gegeben sind, die Gleichungen:

$$HB : DJ = BF : DF \text{ oder } p - y' : y' = v : u, \text{ woraus}$$

$$y' = \frac{u}{u+v}\,p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (496)$$

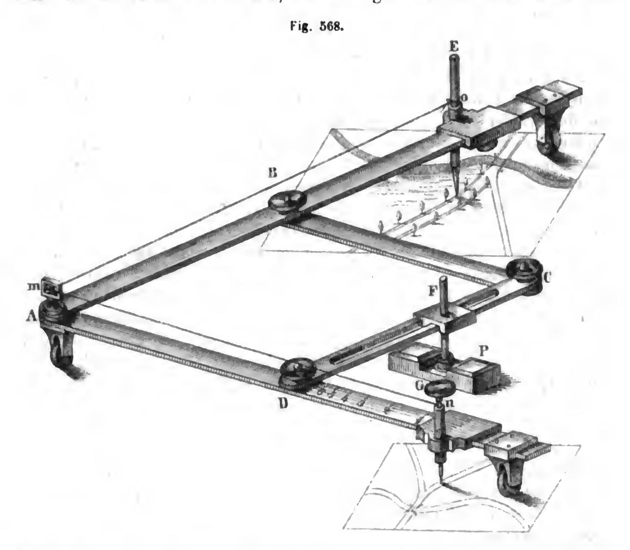
Da ferner nach der Fig. 565 die Proportion stattfindet:

$$DJ : JC = DF : BF = u : v, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (497)$$

so ist es hier gleichgültig, ob man sagt: der Stift D verkleinert im Verhältnisse der Abstände der Stifte von der Axe F, oder im Verhältnisse des Abstandes der Linie HJ von den parallelen Seiten AD und BC.

Die Fig. 568 stellt einen Storchschnabel vor, dem die in Fig. 565 angedeutete ältere Anordnung zu Grunde liegt. Das verschiebbare Parallelogramm ist auch hier mit ABCD, der auf der Originalzeichnung herumzuführende Fahrstift mit E, der Zeichenstift mit G, und endlich die vertikale Axe, um welche sich das Instrument während der Arbeit dreht, mit F bezeichnet. Die zwei Lineale AB, AD bewegen sich an ihren Enden auf

Fig. 568.



Rollen von Bein, während das dritte CD geschlitzt ist und dadurch gestattet, die Axe F mittels eines Schiebers so zu verstellen, dass sie in die durch die Stifte E und F bestimmte Gerade kommt. Mit ihrem unteren Theile ist die Axe F in ein eben bearbeitetes Stück Blei P, das in Folge seines Gewichtes und dreier sehr feiner kurzen Spitzen während der Arbeit auf dem Zeichentische unverrückt liegen bleibt, eingelassen. Die Stifte E und F lassen sich, wie man sieht, auf den Linealen AB und AD ebenfalls mittels Schiebern verstellen: wenn sie die richtige Lage haben, so werden sie wie der Schieber für F mittels Druckschrauben an den Linealen festgehalten. Um die in den Gleichungen (495) dargestellten Werthe von x

und y von D aus auf den Linealen AD und CD abmessen zu können, sind auf denselben entsprechende Theilungen angebracht, deren Einrichtung durch die beigefügten Zahlen von selbst klar ist. Durch die Linien mn, mo ist ein Faden angedeutet, der sich bei n um die Röhre, welche den Zeichenstift trägt, schlingt, bei m durch den Kopf des Zapfens A geht und bei o von dem Zeichner gehalten wird. Dieser Faden hat den Zweck, durch Anziehen den Zeichenstift G dann zu heben, wenn der Fahrstift E beim Versetzen von einem Punkte zum anderen eine Linie beschreibt, die nicht nachgezeichnet werden soll.

§. 445. **Gebrauch des Pantographen.** Der Gebrauch des Pantographen ist im Wesentlichen schon in seiner Theorie und Beschreibung enthalten; zur vollständigen Erläuterung desselben fügen wir aber noch einige Bemerkungen bei. Zum Nachzeichnen ist ein Tisch mit ganz ebener Platte oder ein Reissbrett nöthig, worauf Original und Copie hinreichend Raum finden. Um dem Papiere der letzteren gegen das bereits festgelegte Original die richtige Lage zu geben, ist es gut, dieses mit einem Rechtecke zu umgeben, dessen homologe Seiten in dem Verhältnisse der Massstäbe der Copie und des Originals stehen. Verrückt man nun dieses zweite Rechteck so lange, bis nacheinander drei Eckpunkte desselben vom Zeichenstifte berührt werden, wenn der Fahrstift auf den gleichnamigen Eckpunkten des Originalrechtecks steht, so wird die Nachzeichnung den gewünschten Platz auf dem Papiere einnehmen. Ist diese Lage gefunden, so befestigt man Original und Copie auf dem Zeichentische, so dass während der Abzeichnung nicht die mindeste Verrückung desselben stattfindet. Der Zeichenstift muss genau centrisch gespitzt seyn, wenn er richtig zeichnen soll. Ob er es ist, erfährt man durch Drehung der Röhre, welche ihn hält: deckt hiebei die Spitze immer einen und denselben Punkt, so ist sie centrisch. Während des Abzeichnens sieht man manchmal nach, ob sich die Lage des Originals und der Copie gegen die Axe des Instruments nicht geändert haben: es hat keine Aenderung stattgefunden, wenn, wie beim Anfange der Arbeit, die beiden Stifte je zwei gleichnamige Eckpunkte der auf dem Originale und der Copie befindlichen Hilfsrechtecke gleichzeitig decken. Ist das Original so gross, dass es nicht auf einmal copirt werden kann, so geschieht dieses in Abtheilungen, wobei aber sehr darauf zu achten ist, dass die Copie bei jeder Abtheilung richtig verschoben wird. Am zweckmässigsten ist es wohl, diese Verschiebung nach Richtungslinien vorzunehmen, welche man vor Anfang des Copirens in das Original- und Zeichenblatt, unter Berücksichtigung des Reductionsverhältnisses, auf's Genaueste eingezeichnet hat.

Anhang.

Tafeln über verschiedene Gegenstände der Vermessungskunde.

Einrichtung und Gebrauch.

Tafel Nr. I

gibt verschiedene oft gebrauchte Grössen der Erdgestalt. Sie ist nach den in dem Berliner astronomischen Jahrbuch für 1852 enthaltenen „Tafeln für die Gestalt der Erde nach Bessel's Bestimmungen," welche viel ausführlicher sind, zusammengestellt, und bedarf hinsichtlich ihrer Einrichtung und ihres Gebrauches wohl nur der Bemerkung, dass, wenn man die Grösse des Halbmessers eines Parallelkreises aus der in der Tafel enthaltenen Länge eines Grades in Toisen finden will, diese Länge lediglich zu multipliciren ist mit der Zahl

$$\frac{180}{\pi} = 57{,}2957795, \text{ deren } \log = 1{,}7581226.$$

Indem wir wegen der Entwickelung der Formeln zur Berechnung der I. Tafel auf das genannte Jahrbuch (S. 318—342) verweisen, fügen wir noch einige dortselbst enthaltene Zahlen bei, welche theils als Grundlage, theils als Ergänzung dieser Tafel anzusehen sind.

Bezeichnet a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe und e die Excentricität eines elliptischen Erdmeridians, so ist

$$a = 3\,272\,077^t{,}1399; \quad \log a = 6{,}5148235;$$
$$b = 3\,261\,139^t{,}3284; \quad \log b = 6{,}5133693;$$
$$a\,e = \sqrt{(a^2 - b^2)}; \quad \log e = 8{,}9122052.$$

Nach diesen Bestimmungen ist die Länge einer geographischen Meile, wovon 15 auf einen Grad des Aequators gehen, = 3807,23463 Toisen = 1970,25 preussischen Ruthen; ferner die Oberfläche der ganzen Erde = 9 261 238,3 geographischen Quadratmeilen, und der Rauminhalt des ganzen Erdkörpers = 2 650 184 445 geographischen Cubikmeilen.

Tafel Nr. II

dient zur Reduction der mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser gemessenen schiefen Längen auf den Horizont. Die Theorie zur Berechnung derselben ist im §. 182 (S. 284—287) enthalten, und die zu Grunde gelegten Constanten beziehen sich auf die Reichenbach'schen Distanzmesser, welche Ertel und Sohn in München für Messtisch-Aufnahmen liefern. Für andere Fernrohre und Latten würden sich die Constanten und damit auch die Reductionsgrössen ändern.

Da es nach §. 182 nicht gleichgültig ist, ob die zu reducirende Linie über oder unter dem Horizont des Instruments liegt, so zerfällt die Tafel in zwei Abtheilungen, wovon die erste, mit „Erhebung des Rohrs" bezeichnete, die Reductionen für beobachtete Höhen- oder Elevationswinkel, die zweite aber mit der Ueberschrift „Senkung des Rohrs" die Reductionen für Tiefen- oder Depressionswinkel liefert. Bei dem Gebrauche der entsprechenden Abtheilung der Tafel sucht man die abgelesene schiefe Länge oder eine ihr nahestehende in der obersten Horizontalreihe, den Neigungswinkel aber oder seinen Nachbarwerth in der ersten Vertikalreihe auf und zieht von beiden Reihen aus beziehungsweise ab- und seitwärts senkrechte Linien, bis sie sich begegnen: an dieser Stelle steht die Länge, welche von der Ablesung abzuziehen ist.

Ist z. B. bei einem Höhenwinkel von 14° 36′ eine Ablesung von 438′,5 gemacht worden, so benützt man in der Abtheilung 1 die Vertikalreihe 14° 30′ und die Horizontalreihe 450′: beide zusammen geben die Reductionsgrösse 12′,8 und somit beträgt die reducirte Länge 438,5 — 12,8 = 425,7 Fuss. Würde dieselbe Ablesung auf der Latte bei einem Tiefenwinkel von 14° 36′ gemacht worden seyn, so lieferte die Abtheilung 2 als Reductionsgrösse 16′,1 und die reducirte Länge wäre = 438,5 — 16,1 = 422,4 Fuss.

Die Tafel Nr. II ist für jedes bestimmte Fussmass zu benützen, wenn das Distanzfernrohr und die Distanzlatte dafür eingerichtet sind. Diese Einrichtung erfordert nur, dass die in §. 182 mit c, d, l bezeichneten Constanten ihre Werthe auch in dem neuen Masse behalten, und wird von der Ertel'schen Werkstätte auf Verlangen besorgt.

Tafel Nr. III

gibt die Reductionen für den Ertel'schen und jeden Reichenbach'schen Distanzmesser, welchem die in §. 186 (S. 296) besprochenen Constanten zukommen. Einrichtung und Gebrauch stimmen ganz und gar mit denen der vorhergehenden Tafel überein, sowie auch die für jene Tafel gemachte Schlussbemerkung hier gültig ist.

Tafel Nr. IV

gehört wie die beiden nächsten zum Gebrauche des zum Distanzmessen eingerichteten Nivellirinstruments von Stampfer und Starke. Nach der in §. 190 (S. 303—306) enthaltenen Theorie, worauf die Berechnung beruht,

liefert diese der „Anleitung zum Nivelliren“ von Stampfer entnommene Tafel den Werth des ersten Gliedes in dem Ausdrucke Nr. 164 für die Horizontalprojection der gemessenen schiefen Länge, nämlich den Werth von

$$\frac{324}{o-u} \text{ von } \frac{1}{100} \text{ zu } \frac{1}{100} \text{ Schraubengang.}$$

Sind die Schraubengänge bis auf $\frac{1}{1000}$ abgelesen worden, so findet man den Werth des genannten ersten Gliedes mit Hilfe der „Proportionaltheile,“ welche hinter der „Distanz“ stehen. Diese Proportionaltheile sind so gestellt, dass sie mit den Endziffern der ersten Spalte ($o - u$) correspondiren. So steht z. B. der Proportionaltheil für 0,003 in jener Zeile, worin der genäherte Werth von $o - u$ die Endziffer 3 hat, und beträgt, wenn $o - u = 1{,}03$ ist, 0,88; wenn $o - u = 1{,}13$ ist, 0,74 u. s. w. Diese Proportionaltheile müssen stets von der in der zweiten Spalte aufgesuchten Distanz abgezogen werden, da die Entfernung abnimmt, wenn die Differenz $o - u$ wächst.

Wenn $o - u = 2{,}784$ gefunden worden; was ist der Werth von $324 : (o - u)$?

Zunächst ist für 2,78 die Distanz . . = 116,55
Alsdann für 0,004 der Proportionaltheil = 0,17
Daher der gesuchte Werth . . . . = 116,38.

Mit dieser Zahl ist die in der Formel (164) enthaltene Grösse d zu multipliciren, wenn die Entfernung e in Ruthen, Klaftern, Fussen u. s. w. ausgedrückt werden soll. Stehen die beiden Scheiben der Distanzlatte genau 1 Klafter von einander ab, so ist $d = 1$ Klafter und daher in dem vorstehenden Falle $e = 116{,}38$ Klafter. Betrüge der Abstand der Scheiben 10 preuss. Fuss oder 1 preuss. Ruthe, so wäre $d = 1$ Ruthe und daher $e = 116{,}38$ preuss. Ruthen. Hätte man aber die Scheiben 7 Fuss bayerisch auseinander gestellt, so wäre $d = 7'$ bayer. und $e = 7 \times 116{,}38 = 814{,}66$ bayer. Fuss.

Die Werthe 1 und 10 für $o - u$, welche in der Tafel enthalten sind, werden zwar selten überschritten werden; sollte aber $o - u$ kleiner als 1 werden, so suche man die Distanz für den zehnfach grössern Werth von $o - u$ und nehme dieselbe zehnmal grösser; wird $o - u$ grösser als 10, so verfahre man entgegengesetzt. Ist z. B. $o - u = 0{,}943$, so findet man für 9,43 die Distanz = 34,36; es entspricht also 0,943 der Werth 343,6. Wäre $o - u = 12{,}34$, so hätte man für 1,234 die Distanz = 262,59 und daher für 12,34 die Entfernung = 26,259.

Tafel Nr. V

enthält die Verbesserung der Distanz, welche wegen des veränderlichen Werths der Schraubengänge oder desshalb nöthig wird, weil die Grösse k von dem Mittelwerthe 324, nach welchem die Tafel Nr. IV berechnet ist, mehr oder weniger abweicht. In Gl. (164) ist die genannte Verbesserung durch den Ausdruck

$$\frac{0{,}0356\,(o + u - 2m)}{o - u}$$

gegeben, wobei m nach Gl. (165) bestimmt wird; in der Tafel kommen die Glieder (o — u) und (o + u — 2m) ebenfalls vor.

Will man nun für einen gegebenen Werth von (o — u) den Werth des obigen Ausdrucks in Tafel Nr. V finden, so berechnet man erst (o + u — 2m), sucht diesen Werth in der obersten Horizontalreihe und (o — u) in der ersten Vertikalreihe auf und fährt ab- und seitwärts bis zum Schnittpunkte der Zeilen, wo sich die gesuchte Correction findet, welche mit (o + u — 2m) zugleich positiv oder negativ ist. Wenn sich der berechnete Werth von (o + u — 2m) oder der gegebene von (o — u) nicht genau in der Tafel findet, was häufig der Fall seyn wird, so genügt es die nächstliegenden Werthe der Tafel dafür zu nehmen. Und sollte (o — u) kleiner als 1 oder grösser als 10 seyn, so verfährt man nach dem Schlusse der zu Tafel Nr. IV gegebenen Anweisung.

Tafel Nr. VI

gibt die Reduction der nach beiden vorhergehenden Tafeln bestimmten Entfernung auf den Horizont oder das letzte Glied

$$-\frac{0{,}0031\,(h - u)^2}{o - u}$$

der Formel Nr. 164. Sie wird in derselben Weise wie Tafel Nr. V gebraucht. Die gefundene Reduction ist stets abzuziehen; in den meisten Fällen ist sie aber so gering, dass sie vernachlässigt werden kann. Sollte (h — u) grösser als 22 seyn, so suche man zu $\frac{1}{2}$ (h — u) die Reduction, multiplicire diese mit 4 und sehe das Product als die zu (h — u) gehörige Reduction an.

Beispiel. Wenn d = 1 Klafter, m = 28,1 gegeben und

h = 23,937 o = 18,200 u = 16,757

beobachtet worden sind; wie gross ist die horizontale Entfernung der Latte vom Instrumente?

Mit o — u = 1,523 liefert Tafel Nr. IV:		212,76
mit o + u — 2m = — 21,2 Tafel Nr. V:	—	0,47
und mit h — u = 7,2 gibt Tafel Nr. VI:	—	0,11
Daher die gesuchte Entfernung	=	212,18 Klafter.

Tafel Nr. VII

enthält die von Delcros nach der Formel von Schleiermacher berechneten und in Poggendorf's Annalen (Bd. 60, S. 377) sowie in Marbach's physik. Lexikon (Bd. 1, S. 739) zusammengestellten Werthe der Capillardepressionen des Quecksilbers in Barometerröhren, und man findet die zu einer gegebenen Röhrenweite und Kuppenhöhe gehörige Depression, indem man die Hälfte der ersteren, d. h. den Halbmesser der Röhre in der ersten Vertikalspalte und die Höhe der Quecksilberkuppe in der obersten Horizontal-

reihe aufsucht, und von diesen beiden Stellen aus wagrecht und lothrecht fortgeht, bis sich die betreffenden Spalten schneiden. An dem Schnittpunkte steht die gesuchte Depression in Millimetern.

Tafel Nr. VIII

oder die 1. hypsometrische Tafel gibt den zur Summe der Lufttemperaturen $(T + t)$ gehörigen Werth
$A = \log k + \log [1{,}0025 + 0{,}0000057\,(T + t)] + \log [1 + 0{,}0029\,(T + t)]$
sowohl für $k = 18404{,}9$ Meter als für $k = 56660$ Pariser Fuss. Der letztere Werth ist mit A' bezeichnet. Für Bruchtheile der Temperaturgrade findet man den zugehörigen Werth von A oder A' durch einfache Interpolation.

Tafel Nr. IX

oder die 2. hypsometrische Tafel gibt für jede geographische Breite ψ der Beobachtungsstationen die Correction wegen der Veränderlichkeit der Schwere oder $\log G = \log (1 + 0{,}0026 \cos 2\,\psi)$. Diese Correction ist für $\psi = 45^0$ null, für Breiten unter 45^0 positiv, und für Breiten über 45^0 negativ. Hienach versteht sich der Gebrauch dieser Tafel von selbst.

Tafel Nr. X

oder die 3. hypsometrische Tafel gibt den Werth von $\log z = \log \left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)$ in der Art, dass man mit dem aus $A + \log u = A + \log \left(\log \frac{B}{b} - \frac{T' - t'}{10000}\right)$ zusammengesetzten Werth von $\log h$ in die erste Vertikalspalte eingeht, wenn die Höhe h in Metern, und in die letzte, wenn h in Pariser Fuss gesucht wird, hierauf die zugehörige Horizontalreihe durchfährt bis an die Vertikalreihe, deren Kopf die beiläufige Meereshöhe z der unteren Station enthält, und die daselbst stehende Zahl als Einheiten der fünften Stelle des gesuchten Logarithmen ansieht. Für $z = 390^m$ und $A + \log u = 3{,}54275$ ist $\log z = 0{,}00027$; aber für $z = 390^m$ und $A' + \log u = 3{,}54275$ wird $\log z = 0{,}00012$.

Tafel Nr. XI

oder die 4. hypsometrische Tafel gibt die Maximalspannungen des in der Luft vorkommenden Wasserdampfs und zwar in der Abtheilung A für Réaumur'sche Grade der Lufttemperatur in Pariser Linien, und in der Abtheilung B für Centigrade in Millimetern Quecksilberdruck. Für Bruchtheile von Graden wird der entsprechende Druck durch einfaches Interpoliren gefunden.

Tafel Nr. XII

oder die 5. hypsometrische Tafel gibt das zweite Glied des Ausdrucks zur Berechnung des wirklichen Dampfdruckes der Atmosphäre nach der Formel:

$\sigma = \sigma' - \mu\,(t - t')\,b$, und zwar in der Abtheilung A in Pariser Linien, wenn der Barometerstand b in derselben Masseinheit und die psychrometrische Differenz $t - t'$ in Réaumur'schen Graden gegeben ist, und in der Abtheilung B in Millimetern Quecksilberdruck, wenn der Barometerstand in Millimetern und die psychrometrische Differenz in Centigraden bekannt ist. Diese und die vorige Tafel liefern zusammen die Spannung σ.

Tafel Nr. XIII

oder die 6. hypsometrische Tafel gibt den $\log F = \log (1 + {}^3/_8\,\varphi)$, wenn man den mittleren Barometerstand b der beiden Stationen und den mittleren Dampfdruck σ kennt. Ist b und σ in Linien gegeben, so benützt man die Abtheilung A; hat man aber b und σ in Millimetern, so findet sich log F in der Abtheilung B. Wenn in der obersten Horizontalreihe der 5. und 6. hypsometrischen Tafel beziehungsweise nur ganze Grade und Linien (oder Millimeter) stehen, während man die Werthe von $\mu\,(t - t')\,b$ und $\log (1 + {}^3/_8\,\varphi)$ auch für Bruchtheile von Graden und Linien (oder Millimetern) sucht, so ist zu bemerken, dass in dem vorliegenden Falle die gesuchten Werthe den Temperaturen und Dampfspannungen proportional sind, also für Zehntel- und Hundertel-Grade und Linien (oder Millimeter) leicht durch Division mit 10 oder 100 gefunden werden können. So ist z. B. für $t - t' = 6^0{,}54$ R. und $b = 310'''$ nach Abtheilung A der 5. Tafel: $\mu\,(t - t')\,b = 1{,}860 + 0{,}155 + 0{,}012 = 2''',027$ und für $\sigma = 10''',51$ und $b = 275'''$ nach Abtheilung A der 6. Tafel:

$$\log (1 + {}^3/_8\,\varphi) = 0{,}00592 + 0{,}000296 + 0{,}0000059 = 0{,}00622.$$

Tafel Nr. XIV

enthält die Werthe von $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ und $\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$, deren man bedarf, um aus den am Stromquadranten beobachteten Ablenkungswinkeln α die Geschwindigkeit des Wassers nach der in §. 231 entwickelten Formel $v = k \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ zu berechnen. Da k für jedes Instrument einen andern Werth hat, der nach §. 232 (S. 366 und 367) bestimmt wird, so konnte hier nicht mehr als der Factor $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ und dessen Logarithmus gegeben werden; dieser Factor ist also, um v zu finden, immer noch mit k zu multipliciren.

Tafel Nr. XV

dient zur Berechnung der Geschwindigkeiten der Flüsse, wenn mit dem Reichenbach'schen Strommesser die Grösse h' beobachtet und für das Instrument die Constante k bekannt ist. Letztere findet man nach §. 224 aus der Formel Nr. 178 (Abth. I, S. 370); erstere (h') ergibt sich aus den Ablesungen an den beiden Glasröhren. Nimmt man aus der Tafel den Werth von $\sqrt{h'}$ und multiplicirt ihn mit k, so ist die zu h' gehörige Geschwindigkeit gefunden. Wir haben die Tabelle nur bis zu Erhebungen von 1 Fuss fortgesetzt, weil diese schon Geschwindigkeiten von mehr als 8 Fuss entsprechen,

der Reichenbach'sche Strommesser aber zur Messung grosser Geschwindigkeiten wenig geeignet ist.

Tafel Nr. XVI

dient zur Absteckung von Kreisbögen und enthält die Ordinaten für gegebene Abscissen. Sie ist nach der Gleichung Nr. 208 (Abth. II, S. 415) berechnet. Für Kreise bis zu 450′ Halbmesser wachsen die auf den Tangenten von den Berührungspunkten aus gezählten Abscissen von 10 zu 10, für Kreise zwischen 500 und 950′ Halbmesser von 25 zu 25, und für Kreise von 1000 bis 10000′ Halbmesser von 50 zu 50 Fuss. Der Gebrauch dieser Tafel ist wohl für sich klar.

Tafel Nr. XVII

setzt abgesteckte Kreisbögen, deren Längen entweder 50 oder 100 Fuss betragen, voraus, und dient alsdann zur Absteckung von Zwischenpunkten dieser Bögen. Soll in der Mitte der Sehne eine senkrechte Ordinate abgesteckt werden, so findet man deren Werth in der Spalte, welche mit „Ordinate zu $\frac{1}{2}$ b“ überschrieben ist; und braucht man die Ordinate im ersten oder dritten Viertel der Sehne, so liefert die Spalte „Ordinate zu $\frac{1}{4}$ b“ die gesuchte Ordinate. Die Längeneinheit der Bögen, Sehnen, Halbmesser und Ordinaten kann selbstverständlich jede beliebige seyn.

Tafel Nr. XVIII

ist nach der in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ von Gauss befindlichen Tafel zusammengestellt und enthält die einander entsprechenden geographischen Breiten auf dem Erdellipsoide und der dafür substituirten Kugelfläche. Da es häufiger vorkommt, dass die Breite auf der Kugel gegeben und die für das Sphäroid gesucht wird, als umgekehrt, so bildet jene Breite das Argument der Tafel. Gauss lässt dieses innerhalb 12 Graden von Minute zu Minute wachsen und gibt die Sekunden der Breiten des Ellipsoids auf 5 Dezimalstellen genau an, um die Tafel „für die allerschärfste Berechnung einer trigonometrischen Vermessung, nämlich für eine Durchführung derselben mit zehnzifferigen Logarithmen vollkommen zureichend“ zu machen; für unsere Zwecke genügt es jedoch, das Argument von 2 zu 2 Minuten fortschreiten zu lassen und die Sekunde der elliptischen Breiten auf 2 Dezimalstellen genau anzugeben. Die in der Tafel nicht vorkommenden Breiten lassen sich mit hinreichender Genauigkeit aus den Differenzen je zweier Nachbarwerthe berechnen. Denn gesetzt, man wolle die elliptische Breite φ' finden, welche der Kugelbreite $\varphi = 49^0\,25'\,10''$ entspricht, so liefert die Tafel für 29⁰ 24′ eine elliptische Breite von $49^0\,25'\,44'',74$ und für $49^0\,26'$ eine elliptische Breite von $49^0\,27'\,44'',96$; die Differenz für 2 Minuten Kugelbreite beträgt also $2'\,0'',22$ elliptische Breite und folglich genau genug $1'\,10'',13$ elliptische Breite für $1'\,10''$ Kugelbreite. Es ist somit $\varphi' = 49^0\,25'\,44'',74 + 1'\,10'',13 = 49^0\,26'\,54'',87$.

Tafel Nr. XIX

gibt die mittleren Werthe der astronomischen Refraction für alle Höhenwinkel zwischen 0 und 90°. Diese Werthe bedürften noch Correctionen wegen der Temperatur und des Barometerstandes, wofür es ebenfalls nach Bessel's Bestimmungen entworfene Tafeln gibt. Da aber diese Correctionen nur unbedeutende Grössen sind, und die geodätischen Aufgaben, welche in diesem Buche vorkommen und die Berücksichtigung der astronomischen Refraction erfordern, nur angenäherte Resultate liefern sollen, so haben wir es unterlassen, auch die Correctionstafeln mitzutheilen. Die Berechnung der mittleren Refraction für andere als in der Tabelle vorkommende Höhenwinkel geschieht mit Hilfe der in der Tafel enthaltenen Proportionaltheile.

Tafel Nr. XX

ist eigentlich schon in der ersten Tafel enthalten, indem dort die Längen der Parallelgrade in Toisen angegeben sind. Wenn nun hier dieselben Längen in geographischen Meilen, wovon 15 auf einen Grad des Aequators gehen, ausgedrückt werden, so hat dieses lediglich darin seinen Grund, dass man bei Kartenzeichnungen gewöhnlich die geographische Meile (welche 3807,2346 Toisen gleich ist) als Längeneinheit des Massstabs wählt und daher durch Tafel Nr. XX die Reductionen der in Toisen ausgedrückten Längen auf Meilen erspart werden.

Tafel Nr. XXI

dient zur Zeichnung der Parallelkreise auf Karten, die nach der conischen Projection von Bonne oder de l'Isle entworfen werden. Diese Parallele erscheinen als Kreise, die ihre Mittelpunkte auf der verlängerten Erdaxe haben und deren Halbmesser R sich nach der Gleichung $R = r \cot \varphi$ bestimmt, in welcher r den Halbmesser der Erdkugel und φ die geographische Breite des Parallels bezeichnet. Der Berechnung der Tafel liegt der Werth $r = 857{,}43$ geographische Meilen zu Grunde.

Tafel Nr. XXII

enthält Vorschriften über Gattung und Grösse der Schrift zur Bezeichnung einzelner Objecte auf Karten und Plänen von verschiedenen Massstäben. Die Höhen sind zwar ursprünglich in badischem Masse ausgedrückt, sie können aber auch in Duodezimallinien jedes andern deutschen Fussmasses angewendet werden.

Die Abkürzungen in der Tafel bedeuten:

S. C: stehende Capitalschrift (grosse römische stehende Schrift);
L. C: liegende Capitalschrift (grosse römische liegende Schrift);
S. R: stehende Rotondschrift (kleine römische stehende Schrift);
T. C: topographische Cursivschrift.

Tafel Nr. I.

Längen der Erdmeridiane und Parallelkreise.

Geographische Breite.		Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
		In Pariser Toisen (Toise du Pérou bei 13° R.).			
0°		56727,356	57108,519	57108,519	0,000
	30′	727,399	108,534	106,359	28363,685
1°		56727,529	57108,578	57099,880	56727,414
	30′	727,745	108,650	089,080	85091,229
2°		56728,048	57108,752	57073,963	113455,173
	30′	728,437	108,882	054,527	141819,291
3°		56728,912	57109,041	57030,776	170183,624
	30′	729,473	109,230	002,710	198548,217
4°		56730,120	57109,447	56970,331	226913,111
	30′	730,852	109,693	933,643	255278,350
5°		56731,670	57109,967	56892,646	283643,977
	30′	732,574	110,270	847,346	312010,035
6°		56733,562	57110,602	56797,744	340376,565
	30′	734,635	110,962	743,844	368743,611
7°		56735,792	57111,350	56685,651	397111,214
	30′	737,033	111,767	623,168	425479,417
8°		56738,358	57112,211	56556,399	453848,261
	30′	739,766	112,684	485,350	482217,789
9°		56741,257	57113,184	56410,026	510588,041
	30′	742,830	113,712	330,432	538959,060
10°		56744,485	57114,267	56246,573	567330,885
	30′	746,222	114,850	158,456	595703,558
11°		56748,039	57115,459	56066,088	624077,120
	30′	749,937	116,096	55969,474	652451,611
12°		56751,915	57116,760	55868,621	680827,071
	30′	753,972	117,450	763,538	709203,539
13°		56756,107	57118,166	55654,231	737581,056
	30′	758,320	118,908	540,708	765959,659
14°		56760,611	57119,677	55422,978	794339,389
	30′	762,978	120,471	301,049	822720,283
15°		56765,421	57121,290	55174,930	851102,380
	30′	767,940	122,135	044,629	879485,717
16°		56770,532	57123,005	54910,156	907870,332
	30′	773,199	123,899	771,522	936256,262
17°		56775,938	57124,818	54628,735	964643,543
	30′	778,749	125,760	481,806	993032,211
18°		56781,632	57126,727	54330,746	1021422,304
	30′	784, 84	127,717	175,566	1049813,855

Geographische Breite.		Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
		In Pariser Toisen.			
19°		56787,607	57128,731	54016,276	1078206,900
	30′	790,698	129,767	53852,889	1106601,473
20°		56793,856	57130,826	53685,416	1134997,608
	30′	797,081	131,908	513,869	1163395,340
21°		56800,372	57133,011	53338,261	1191749,700
	30′	803,728	134,136	158,604	1220195,723
22°		56807,147	57135,283	52974,912	1248598,439
	30′	810,629	136,450	787,197	1277002,880
23°		56814,173	57137,638	52595,473	1305409,078
	30′	817,777	138,846	399,755	1333817,063
24°		56821,441	57140,074	52200,055	1362226,865
	30′	825,163	141,322	51996,390	1390638,514
25°		56828,943	57142,589	51788,773	1419052,038
	30′	832,779	143,875	577,220	1447467,466
26°		56836,670	57145,179	51361,746	1475884,826
	30′	840,614	146,501	142,367	1504304,145
27°		56844,612	57147,840	50919,099	1532725,449
	30′	848,661	149,197	691,957	1561148,765
28°		56852,760	57150,571	50460,959	1589574,119
	30′	856,908	151,961	226,121	1618001,534
29°		56861,105	57153,367	49987,461	1646431,035
	30′	865,347	154,788	744,995	1674862,646
30°		56869,635	57156,225	49498,743	1703296,390
	30′	873,967	157,676	248,720	1731732,288
31°		56878,341	57159,141	48994,947	1760170,364
	30′	882,757	160,620	737,441	1788610,637
32°		56887,213	57162,113	48476,221	1817053,127
	30′	891,708	163,618	211,307	1845497,856
33°		56896,240	57165,136	47942,717	1873944,841
	30′	900,808	166,666	670,472	1902394,102
34°		56905,410	57168,207	47394,592	1930845,655
	30′	910,046	169,760	115,096	1959299,517
35°		56914,713	57171,322	46832,006	1987755,706
	30′	919,411	172,895	545,341	2016214,235
36°		56924,138	57174,478	46255,124	2044675,121
	30′	928,892	176,070	45961,376	2073138,378
37°		56933,673	57177,670	45664,118	2101604,018
	30′	938,478	179,279	363,372	2130072,055
38°		56943,306	57180,895	45059,160	2158542,500
	30′	948,156	182,518	44751,505	2187015,364
39°		56953,027	57184,148	44440,430	2215490,659
	30′	957,916	185,785	125,957	2243968,394
40°		56962,822	57187,427	43808,110	2272448,578

Geographische Breite	Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
	In Pariser Toisen.			
40° 30′	56967,744	57189,074	43486,913	2300931,219
41°	56972,681	57190,726	43162,389	2329416,324
30′	977,631	192,382	42834,561	2357903,902
42°	56982,591	57194,041	42503,456	2386393,957
30′	987,562	195,704	169,097	2414886,495
43°	56992,541	57197,370	41831,508	2443381,520
30′	997,527	199,038	41490,716	2471879,037
44°	57002,518	57200,708	41146,746	2500379,048
30′	007,513	202,378	40799,622	2528881,555
45°	57012,510	57204,050	449,371	2557386,561
30′	017,508	205,721	40096,020	2585894,065
46°	57022,505	57207,392	39739,594	2614404,068
30′	027,499	209,062	380,120	2642916,570
47°	57032,490	57210,731	39017,625	2671431,567
30′	037,476	212,398	38652,136	2699949,059
48°	57042,454	57214,063	38283,681	2728469,042
30′	047,425	215,725	37912,286	2756991,512
49°	57052,385	57217,383	37537,981	2785516,465
30′	057,334	219,037	160,792	2814043,895
50°	57062,270	57220,687	36780,749	2842573,796
30′	067,191	222,332	397,879	2871106,162
51°	57072,097	57223,972	36012,212	2899640,985
30′	076,985	225,605	35623,777	2928178,256
52°	57081,854	57227,232	35232,602	2956717,966
30′	086,702	228,853	34838,718	2985260,106
53°	57091,529	57230,466	34442,154	3013804,665
30′	096,332	232,070	042,940	3042351,631
54°	57101,111	57233,667	33641,105	3070900,993
30′	105,863	235,255	236,682	3099452,737
55°	57110,587	57236,833	32829,699	3128006,851
30′	115,282	238,401	420,187	3156563,319
56°	57119,946	57239,959	32008,179	3185122,128
30′	124,578	241,507	31593,705	3213683,260
57°	57129,176	57243,042	31176,795	3242246,700
30′	133,740	244,567	30757,483	3270812,431
58°	57138,267	57246,079	30335,800	3299380,434
30′	142,756	247,578	29911,777	3327950,691
59°	57147,206	57249,064	29485,448	3356523,184
30′	151,616	250,536	056,843	3385097,891
60°	57155,984	57251,995	28625,997	3413674,793
30′	160,308	253,439	192,942	3442253,868
61°	57164,588	57254,867	27757,711	3470835,094
30′	168,822	256,281	320,336	3499418,448

Geographische Breite.		Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
		In Pariser Toisen.			
62°		57173,009	57257,679	26880,852	3528003,908
	30′	177,147	259,060	439,292	3556591,449
63°		57181,236	57260,425	25995,689	3585181,047
	30′	185,273	261,773	550,078	3613772,676
64°		57189,258	57263,103	25102,492	3642366,311
	30′	193,190	264,415	24652,966	3670961,925
65°		57197,067	57265,709	24201,534	3699559,492
	30′	200,888	266,984	23748,231	3728158,983
66°		57204,652	57268,240	23293,092	3756760,370
	30′	208,357	269,477	22836,150	3785363,625
67°		57212,003	57270,693	22377,443	3813968,718
	30′	215,589	271,890	21917,003	3842575,618
68°		57219,113	57273,065	21454,868	3871184,297
	30′	222,574	274,220	20991,072	3899794,721
69°		57225,971	57275,354	20525,651	3928406,860
	30′	229,304	276,465	058,641	3957020,681
70°		57232,570	57277,555	19590,078	3985636,153
	30′	235,770	278,622	119,997	4014253,240
71°		57238,901	57279,667	18648,435	4042871,911
	30′	241,964	280,688	175,429	4071492,130
72°		57244,957	57281,687	17701,015	4100113,863
	30′	247,879	282,661	225,228	4128737,075
73°		57250,729	57283,612	16748,107	4157361,730
	30′	253,507	284,538	269,688	4185987,792
74°		57256,211	57285,440	15790,007	4214615,225
	30′	258,841	286,317	309,102	4243243,991
75°		57261,396	57287,169	14827,011	4271874,053
	30′	263,875	287,996	343,769	4300505,374
76°		57266,277	57288,797	13859,414	4329137,916
	30′	268,602	289,573	373,985	4357771,639
77°		57270,849	57290,322	12887,518	4386406,505
	30′	273,017	291,045	400,052	4415042,474
78°		57275,105	57291,741	11911,623	4443679,508
	30′	277,113	292,410	11422 270	4472317,566
79°		57279,041	57293,053	10932,030	4500956,608
	30′	280,887	293,669	440,942	4529596,593
80°		57282,651	57294,257	9949,043	4558237,481
	30′	284,332	294,817	9456,372	4586879,230
81°		57285,931	57295,350	8962,967	4615521,799
	30′	287,445	295,855	468,867	4644165,147
82°		57288,876	57296,332	7974,108	4672809,231
	30′	290,223	296,781	478,731	4701454,009
83°		57291,484	57297,202	6982,772	4730099,440

Geographische Breite.		Grad im Meridian.	Grad senkrecht auf den Meridian.	Grad des Parallels.	Länge des Bogens vom Aequator bis zum Parallel.
		In Pariser Toisen.			
83°	30′	57292,661	57297,594	6486,272	4758745,479
84°		57293,751	57297,957	5989,267	4787392,086
	30′	294,756	298,292	491,798	4816039,216
85°		57295,674	57298,598	4993,902	4844686,827
	30′	296,506	298,876	495,618	4873334,876
86°		57297,251	57299,124	3996,985	4901938,318
	30′	297,908	299,343	498,041	4930632,112
87°		57298,479	57299,533	2998,826	4959281,212
	30′	298,962	299,694	499,378	4987930,576
88°		57299,357	57299,826	1999,735	5016580,159
	30′	299,665	299,929	499,937	5045229,918
89°		57299,885	57300,002	1000,023	5073879,809
	30′	300,017	300,046	500,031	5102529,788
90°		57300,061	57300,061	0,000	5131179,811

Tafel Nr. II.

Reductionen für den Reichenbach'schen Distanzmesser.

1. Erhebung des Rohrs.

Höhenwinkel.		50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Höhenwinkel.	
1°		2′,7	1′,1	0′,7	0′,4	0′,3	0′,2	0′,1	0′,1	0′,1	0′,1	1°	
	30′	2,6	1,1	0,6	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1		30′
2°		2,5	1,0	0,6	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	2°	
	30′	2,4	1,0	0,5	0,3	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	0,3		30′
3°		2,4	0,9	0,5	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	3°	
	30′	2,4	0,9	0,5	0,4	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7		30′
4°		2,3	0,9	0,5	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	4°	
	30′	2,2	0,8	0,5	0,5	0,5	0,6	0,7	0,9	1,0	1,2		30′
5°		2,1	0,8	0,6	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	5°	
	30′	2,1	0,8	0,6	0,6	0,7	1,0	1,1	1,3	1,6	1,8		30′
6°		2,0	0,8	0,7	0,7	0,9	1,1	1,4	1,6	1,9	2,2	6°	
	30′	2,0	0,9	0,7	0,8	1,1	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6		30′
7°		2,0	0,9	0,8	0,9	1,3	1,6	1,9	2,3	2,7	3,1	7°	
	30′	2,0	0,9	0,9	1,1	1,5	1,8	2,3	2,7	3,1	3,6		30′
8°		1,9	1,0	1,0	1,3	1,7	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	8°	
	30′	1,9	1,0	1,1	1,5	1,9	2,4	3,0	3,5	4,1	4,7		30′
9°		1,9	1,1	1,2	1,7	2,2	2,8	3,4	4,0	4,6	5,3	9°	
	30′	1,9	1,1	1,3	1,9	2,5	3,1	3,8	4,5	5,2	5,9		30′

Höhen-winkel.	50'	100'	150'	200'	250'	300'	350'	400'	450'	500'	Höhen-winkel.
10°	1',9	1',1	1',5	2',1	2',8	3',5	4',3	5',0	5',8	6',6	10°
30'	1,9	1,2	1,7	2,3	3,1	3,9	4,8	5,6	6,5	7,3	30'
11°	1,9	1,3	1,9	2,6	3,4	4,3	5,3	6,2	7,2	8,1	11°
30'	1,9	1,4	2,0	2,9	3,8	4,8	5,8	6,8	7,9	8,9	30'
12°	1,9	1,5	2,2	3,1	4,2	5,2	6,3	7,5	8,6	9,7	12°
30'	1,9	1,6	2,4	3,4	4,6	5,7	6,9	8,1	9,4	10,5	30'
13°	1,9	1,7	2,6	3,7	5,0	6,2	7,5	8,7	10,2	11,5	13°
30'	1,9	1,8	2,8	4,1	5,4	6,8	8,2	9,6	11,0	12,5	30'
14°	2,0	2,0	3,0	4,4	5,8	7,3	8,8	10,4	11,8	13,5	14°
30'	2,0	2,1	3,3	4,8	6,3	7,9	9,5	11,2	12,8	14,5	30'
15°	2,0	2,3	3,6	5.1	6,8	8,5	10,2	12,0	13,8	15,5	15°
30'	2,0	2,4	3,8	5,5	7,3	9,1	11,0	12,9	14,8	16,7	30'
16°	2,1	2,6	4,1	5,9	7,8	9,8	11,8	13,8	15,8	17,8	16°
30'	2,1	2.8	4,4	6,4	8,4	10,4	12,5	14,7	16,8	18,9	30'
17°	2,1	2,9	4,7	6,8	8,9	11,1	13,4	15,6	17,9	20,2	17°
30'	2,2	3,0	5,0	7,2	9,5	11,9	14,2	16,6	19,0	21,4	30'
18°	2,2	3,3	5,4	7,7	10,1	12,6	15,1	17,6	20,1	22,6	18°
30'	2,2	3,5	5,7	8,2	10,7	13.3	16,0	18,6	21,3	24,0	30'
19°	2,3	3,7	6,0	8,7	11,3	14,1	16,9	19,7	22,5	25,3	19°
30'	2,4	3,9	6,4	9,2	12,0	14,9	17,8	20,7	23,7	26,7	30'
20°	2,4	4,1	6,7	9,7	12,6	15,7	18,8	21,9	25,0	28,1	20°
30'	2,5	4,3	7,1	10,2	13,3	16,6	19,8	23,0	26,2	29,6	30'
21°	2,6	4,5	7,5	10,7	14,0	17,4	20,8	24,2	27,6	31,1	21°
30'	2,6	4,8	7,9	11,3	14,7	18,3	21.9	25,4	29,1	32,6	30'
22°	2,7	5,0	8,3	11,9	15,5	19,2	23,0	26,7	30,4	34,2	22°
30'	2,8	5,3	8,7	12,5	16,2	20,2	24,0	27,9	31,9	35,8	30'
23°	2,9	5,5	9,2	13,1	17,0	21,1	25,2	29,2	33,3	37,5	23°
30'	3,0	5,8	9,6	13,7	17,8	22,1	26,3	30,6	34,8	39,1	30'
24°	3,1	6,1	10,1	14,3	18,6	23,1	27,5	31,9	36,4	40,8	24°
30'	3,2	6,4	10,6	15,0	19,5	24,1	28,7	33,3	37,9	42,5	30'
25°	3,3	6,7	11,1	15,6	20,3	25,1	29,9	34,7	39,5	44,3	25°
30'	3,4	7,0	11,6	16,3	21,2	26 2	31,1	36,1	41,1	46,1	30'
26°	3,5	7,3	12,1	17,0	22,1	27,3	32,4	37,6	42,8	48,0	26°
30'	3,6	7,6	12,6	17,7	23,0	28,4	33,7	39,1	44,5	49,8	30'
27°	3,7	7,9	13,1	18,4	23,9	29,5	35,0	40,6	46,2	51,8	27°
30'	3,8	8,2	13,6	19,2	24,8	30,6	36,4	42,1	47,9	53,7	30'
28°	3,9	8,5	14,2	19,9	25,8	31,7	37,7	43,7	49,7	55,7	28°
30'	4,1	8,9	14,7	20,7	26,7	32,9	39,1	45,3	51,5	57,7	30'
29°	4,2	9,2	15,3	21,4	27,7	34,1	40,5	46,9	53,4	59,8	29°
30'	4,3	9,6	15,8	22,2	28,7	35,3	42,0	48,6	55,2	61,9	30'
30°	4,4	9,9	16,4	23,0	29,7	36,6	43,4	50,2	57,1	64,0	30°
30'	4,6	10,3	17,0	23,9	30,8	37,8	44,9	51,9	59,1	66,1	30'
31°	4,7	10,7	17,6	24,7	31,8	39,1	46,4	53,7	61,0	68,7	31°
30'	4,9	11,1	18,3	25,5	32,9	40,4	47,9	55,4	63,0	70,6	30'
32°	5,0	11,4	18,9	26,4	34,0	41,8	49,5	57,2	65,0	72,8	32°
30'	5,2	11,8	19,5	27,2	35,1	43,1	51,1	59,0	67,1	75,0	30'

Höhen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Höhen-winkel.
33°	5′,3	12′,2	20′,1	28′,1	36′,2	44′,5	52′,7	60′,9	69′,1	77′,3	33°
30′	5,5	12,6	20,8	29,0	37,3	45,8	54,3	62,7	71,2	79,7	30′
34°	5,6	13,1	21,5	29,9	38,5	47,2	55,9	64,6	73,4	82,1	34°
30′	5,8	13,5	22,2	30,7	39,7	48,6	57,6	66,6	76,5	84,5	30′
35°	6,0	13,9	22,8	31,7	40,9	50,0	59,3	68,5	77,7	86,9	35°
30′	6,2	14,3	23,5	32,7	42,1	51,5	61,0	70,4	80,0	89,4	30′
36°	6,3	14,8	24,4	33,7	43,3	53,0	62,7	72,4	82,2	91,9	36°

Höhen-winkel.	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Höhen-winkel.
1°	0′,1	0′,1	0′,0	0′,0	0′,0	0′,0	0′,1	0′,1	0′,1	0′,1	1°
30′	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	30′
2°	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	2°
30′	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	30′
3°	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	3°
30′	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	30′
4°	1,0	1,1	1,2	1,4	1,5	1,7	1,8	2,0	2,1	2,3	4°
30′	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,3	2,5	2,7	2,9	30′
5°	1,7	1,9	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9	3,1	3,4	3,6	5°
30′	2,1	2,3	2,5	2,8	3,0	3,3	3,6	3,8	4,1	4,4	30′
6°	2,5	2,8	3,0	3,3	3,7	4,0	4,3	4,6	4,9	5,2	6°
30′	2,9	3,3	3,6	4,0	4,3	4,7	5,1	5,4	5,8	6,0	30′
7°	3,5	3,9	4,2	4,7	5,1	5,5	5,9	6,3	6,7	7,1	7°
30′	4,0	4,5	4,9	5,4	5,9	6,3	6,8	7,3	7,7	8,2	30′
8°	4,6	5,1	5,6	6,2	6,7	7,2	7,8	8,3	8,8	9,4	8°
30′	5,2	5,8	6,4	7,0	7,6	8,2	8,8	9,4	10,0	10,6	30′
9°	5,9	6,6	7,2	7,9	8,5	9,2	9,9	10,6	11,2	11,9	9°
30′	6,6	7,4	8,1	8,8	9,5	10,3	11,1	11,8	12,5	13,3	30′
10°	7,4	8,2	9,0	9,8	10,6	11,5	12,3	13,1	13,9	14,7	10°
30′	8,2	9,1	10,0	10,8	11,8	12,7	13,6	14,5	15,4	16,3	30′
11°	9,1	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	14,9	15,9	17,7	17,9	11°
30′	10,0	11,0	12,0	13,1	14,2	15,3	16,3	17,4	19,3	19,5	30′
12°	10,9	12,0	13,2	14,4	15,5	16,7	17,8	19,0	20,8	21,3	12°
30′	11,8	13,1	14,3	15,7	16,8	18,1	19,4	20,6	21,9	23,1	30′
13°	12,9	14,2	15,4	16,9	18,2	19,6	21,0	22,3	23,7	25,0	13°
30′	13,9	15,3	16,8	18,2	19,7	21,2	22,6	24,1	25,4	27,0	30′
14°	15,0	16,6	18,1	19,6	21,2	22,8	24,4	25,9	27,5	29,1	14°
30′	16,1	17,8	19,4	21,1	22,8	24,5	26,2	27,8	29,5	31,2	30′
15°	17,2	19,1	20,8	22,6	24,4	26,2	28,1	29,8	31,6	33,4	15°
30′	18,5	20,3	22,3	24,2	26,1	28,1	29,9	31,8	33,7	35,7	30′
16°	19,7	21,8	23,8	25,8	28,0	29,9	32,0	34,0	36,0	38,1	16°
30′	21,0	23,2	25,3	27,6	29,5	31,8	34,0	36,1	38,3	40,5	30′
17°	22,4	24,7	26,9	29,2	31,2	33,8	36,1	38,3	40,6	42,9	17°
30′	23,8	26,2	28,5	31,0	33,3	35,8	38,2	40,6	43,1	45,5	30′
18°	25,3	27,7	30,2	32,8	35,3	37,9	40,5	43,0	45,6	48,1	18°
30′	26,6	29,3	31,9	34,7	37,4	40,0	42,8	45,4	48,1	50,8	30′

Höhenwinkel.	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Höhenwinkel.
19°	28′,1	30′,9	33′,6	36′,6	39′,4	42′,2	45′,1	47′,9	50′,8	53′,6	19°
30′	29,7	32,6	35,5	38,6	41,5	44,5	47,5	50,5	53,5	56,0	30′
20°	31,2	34,3	37,4	40,6	43,6	46,8	50,0	53,1	56,5	59,4	20°
30′	32,8	36,1	39,3	42,7	45,9	49,2	52,5	55,8	59,1	62,4	30′
21°	34,5	37,9	41,3	44,7	48,2	51,7	55,1	58,6	62,0	65,5	21°
30′	36,2	39,8	43,3	47,0	50,6	54,2	57,8	61,4	65,0	68,6	30′
22°.	37,9	41,7	45,4	49,2	53,0	56,1	60,5	64,4	68,0	71,8	22°
30′	39,7	43,6	47,5	51,5	55,5	59,4	63,3	67,2	71,2	75,1	30′
23°	41,6	45,6	49,6	53,7	57,8	62,0	66,1	70,2	74,3	78,5	23°
30′	43,3	47,6	51,8	56,2	60,4	64,7	69,0	73,3	77,6	81,9	30′
24°	45,2	49,7	54,1	58,6	63,0	67,5	72,0	76,4	80,9	85,2	24°
30′	47,1	51,8	56,4	61,1	65,7	70,3	75,0	79,6	84,3	89,0	30′
25°	49,1	53,9	58,7	63,6	68,4	73,2	78,0	82,8	87,7	92,6	25°
30′	51,2	56,1	61,1	66,2	71,1	76,1	81,2	86,2	91,2	96,3	30′
26°	53,1	58,3	63,5	68,8	74,0	79,1	84,4	89,6	94,8	100,1	26°
30′	55,2	60,6	66,0	71,4	76,8	82,2	87,7	93,1	98,5	103,9	30′
27°	57,3	62,9	68,5	74,1	79,7	85,3	91,0	96,6	102,2	107,8	27°
30′	59,5	65,2	70,9	76,9	82,7	88,5	94,3	100,2	105,9	111,8	30′
28°	61,7	67,7	73,6	79,7	85,7	91,7	97,8	103,8	109,8	115,8	28°
30′	63,9	70,1	76,3	82,6	88,8	95,0	101,2	107,4	113,7	119,9	30′
29°	66,2	72,6	79,0	85,5	91,9	98,3	104,8	111,2	117,6	124,1	29°
30′	68,5	75,1	81,7	88,4	95,1	101,7	108,3	115,0	121,7	128,4	30′
30°	70,8	77,7	84,5	91,4	98,3	105,1	112,0	118,9	125,0	132,7	30°
30′	73,2	80,3	87,3	94,5	101,8	108,6	115,7	122,8	129,8	137,0	30′
31°	75,6	82,9	90,1	97,5	104,8	112,1	119,5	126,8	134,1	141,5	31°
30′	78,0	85,5	93,0	100,7	108,2	115,8	123,4	130,9	138,4	146,0	30′
32°	80,5	88,3	95,7	103,9	111,6	119,4	127,2	135,0	142,7	150,6	32°
30′	83,0	91,0	99,0	107,1	115,1	123,1	131,1	139,1	147,1	155,1	30′
33°	85,5	93,8	102,1	110,4	118,6	126,8	135,1	143,3	151,6	159,9	33°
30′	88,2	96,7	105,1	113,6	122,1	130,6	139,1	147,6	156,1	164,7	30′
34°	90,8	99,5	108,2	117,0	125,7	134,5	143,3	152,0	160,7	169,5	34°
30′	93,4	102,3	111,3	120,4	129,4	138,4	147,4	156,4	165,4	174,4	30′
35°	96,1	106,5	114,5	123,9	133,1	142,2	151,6	160,8	170,1	179,3	35°
30′	98,9	109,3	117,8	127,4	136,9	146,3	155,8	165,3	174,8	184,4	30′
36°	101,6	114,4	121,1	130,9	140,6	150,4	160,2	169,9	179,6	189,9	36°

2. Senkung des Rohrs.

Tiefenwinkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Tiefenwinkel.
1°	2′,9	1′,4	1′,0	0′,7	0′,6	0′,5	0′,4	0′,3	0′,3	0′,3	1°
30′	3,0	1,5	1,0	0,8	0,6	0,6	0,5	0,5	0,5	0,4	30′
2°	3,1	1,6	1,2	0,9	0,7	0,7	0,7	0,7	0,6	0,6	2°
30′	3,2	1,7	1,3	1,1	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	30′
3°	3,3	1,9	1,4	1,2	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	3°
30′	3,4	2,0	1,6	1,4	1,2	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	30′

Tiefen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Tiefen-winkel.
4°	3′,5	2′,1	1′,7	1′,6	1′,4	1′,5	1′,6	1′,6	1′,7	1′,8	4°
30′	3,6	2,2	1,9	1,8	1,7	1,8	1,9	1,9	2,0	2,2	30′
5°	3,7	2,4	2,1	2,0	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6	5°
30′	3,9	2,6	2,3	2,2	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	3,0	30′
6°	4,0	2,7	2,5	2,5	2,4	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	6°
30′	4,1	2,9	2,7	2,7	2,7	3,1	3,3	3,5	3,8	4,0	30′
7°	4,2	3,1	2,9	3,0	3,1	3,5	3,7	4,0	4,3	4,5	7°
30′	4,4	3,3	3,2	3,3	3,4	4,0	4,2	4,5	4,8	5,1	30′
8°	4,5	3,5	3,4	3,6	3,8	4,4	4,6	5,0	5,4	5,8	8°
30′	4,6	3,7	3,7	3,9	4,1	4,8	5,1	5,6	6,0	6,5	30′
9°	4,8	3,9	4,0	4,3	4,5	5,3	5,7	6,2	6,7	7,2	9°
30′	4,9	4,1	4,3	4,6	4,9	5,8	6,2	6,8	7,4	8,0	30′
10°	5,1	4,3	4,6	5,0	5,4	6,3	6,8	7,5	8,1	8,8	10°
30′	5,2	4,5	4,9	5,4	5,8	6,8	7,4	8,2	8,9	9,6	30′
11°	5,4	4,8	5,2	5,8	6,3	7,3	8,0	8,9	9,7	10,5	11°
30′	5,6	5,0	5,5	6,2	6,8	7,8	8,7	9,6	10,5	11,4	30′
12°	5,8	5,3	5,8	6,6	7,3	8,4	9,4	10,4	11,3	12,3	12°
30′	5,9	5,5	6,2	7,0	7,8	9,0	10,2	11,2	12,2	13,3	30′
13°	6,1	5,8	6,5	7,5	8,4	9,7	10,9	12,0	13,1	14,3	13°
30′	6,2	6,1	6,9	8,0	8,9	10,4	11,8	12,8	14,1	15,4	30′
14°	6,4	6,4	7,3	8,5	9,5	11,0	12,7	13,7	15,1	16,5	14°
30′	6,6	6,7	7,7	9,0	10,1	11,7	13,6	14,7	16,1	17,6	30′
15°	6,8	7,0	8,1	9,5	10,7	12,5	14,5	15,6	17,2	18,8	15°
30′	7,0	7,3	8,5	10,0	11,3	13,2	15,4	16,6	18,3	20,0	30′
16°	7,2	7,6	8,9	10,5	12,0	14,0	16,3	17,6	19,4	21,2	16°
30′	7,3	7,9	9,4	11,1	12,7	14,8	17,2	18,6	20,5	22,5	30′
17°	7,5	8,2	9,8	11,7	13,4	15,6	18,1	19,7	21,7	23,8	17°
30′	7,8	8,5	10,3	12,3	14,1	16,5	18,9	20,7	22,9	25,1	30′
18°	8,0	8,9	10,8	12,8	14,9	17,4	19,6	21,8	24,2	26,5	18°
30′	8,2	9,2	11,2	13,5	15,6	18,2	20,5	23,0	25,5	27,9	30′
19°	8,4	9,6	11,7	14,2	16,3	19,1	21,6	24,2	26,8	29,4	19°
30′	8,6	9,9	12,2	14,8	17,1	20,0	22,7	25,4	28,1	30,9	30′
20°	8,8	10,3	12,7	15,4	17,9	21,0	23,8	26,7	29,5	32,4	20°
30′	9,0	10,7	13,3	16,1	18,7	22,0	24,9	27,9	30,9	34,0	30′
21°	9,2	11,1	13,8	16,8	19,5	23,0	26,1	29,2	32,4	35,6	21°
30′	9,4	11,4	14,3	17,5	20,4	24,0	27,2	30,5	33,8	37,2	30′
22°	9,7	11,8	14,9	18,2	21,2	25,0	28,4	31,9	35,3	38,8	22°
30′	9,9	12,2	15,5	18,9	22,1	26,0	29,6	33,3	36,9	40,5	30′
23°	10,1	12,6	16,0	19,7	23,0	27,1	30,9	34,7	38,5	42,3	23°
30′	10,4	13,0	16,6	20,4	24,0	28,2	32,1	36,1	40,1	44,1	30′
24°	10,6	13,5	17,2	21,2	24,9	29,3	33,4	37,6	41,7	45,9	24°
30′	10,9	13,9	17,8	22,0	25,9	30,5	34,8	39,1	43,4	47,7	30′
25°	11,1	14,3	18,4	22,8	26,8	31,6	36,1	40,6	45,1	49,6	25°
30′	11,4	14,8	19,1	23,6	27,8	32,8	37,5	42,1	46,8	51,5	30′
26°	11,7	15,2	19,7	24,4	28,8	34,0	38,8	43,7	48,5	53,4	26°
30′	11,9	15,7	20,3	25,2	29,8	35,2	40,2	45,3	50,3	55,4	30′

Tiefen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	Tiefen-winkel.
27°	12′,2	16′,1	21′,0	26′,1	30′,9	36′,4	41′,7	46′,9	52′,0	57′,4	27°
30′	12,4	16,6	21,7	26,9	31,9	37,7	43,1	48,6	54,0	59,5	30′
28°	12,7	17,1	22,3	27,8	33,0	39,0	44,6	50,3	55,9	61,6	28°
30′	12,9	17,6	23,0	28,7	34,1	40,3	46,1	52,0	57,8	63,7	30′
29°	13,2	18,1	23,7	29,6	35,2	41,6	47,6	53,7	59,7	65,8	29°
30′	13,4	18,5	24,4	30,5	36,3	42,9	49,2	55,4	61,6	68,0	30′
30°	13,7	19,0	25,1	31,4	37,4	44,3	50,7	57,3	63,6	70,2	30°
30′	14,0	19,5	25,8	32,4	38,6	45,6	52,3	59,0	65,7	72,4	30′
31°	14,3	20,0	26,6	33,3	39,8	47,0	54,0	60,9	67,8	74,7	31°
30′	14,6	20,5	27,3	34,3	41,0	48,5	55,6	62,7	69,9	77,0	30′
32°	14,9	21,1	28,1	35,3	42,2	49,9	57,3	64,6	72,0	79,4	32°
30′	15,2	21,6	28,8	36,3	43,4	51,3	58,9	66,5	74,1	81,8	30′
33°	15,5	22,1	29,6	37,3	44,6	52,8	61,6	68,5	76,3	84,2	33°
30′	15,8	22,6	30,4	38,3	45,9	54,3	62,4	70,4	78,5	86,6	30′
34°	16,1	23,2	31,2	39,3	47,2	55,8	64,1	72,3	80,7	89,1	34°
30′	16,4	23,8	32,0	40,4	48,5	57,3	65,9	74,3	83,0	91,6	30′
35°	16,7	24,3	32,8	41,4	49,7	58,9	67,7	76,5	85,3	94,1	35°
30′	17,0	24,9	33,6	42,5	51,0	60,5	69,5	78,6	87,6	96,7	30′
36°	17,3	25,5	34,4	43,6	52,2	62,0	71,3	80,7	89,9	99,3	36°

Tiefen-winkel.	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Tiefen-winkel.
1°	0′,3	0′,3	0′,2	0′,2	0′,2	0′,2	0′,2	0′,2	0′,2	0′,2	1°
30′	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	30′
2°	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	2°
30′	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	30′
3°	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	3°
30′	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,8	1,8	1,9	2,0	2,0	30′
4°	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,6	2,6	4°
30′	2,2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,2	3,3	30′
5°	2,7	2,8	3,0	3,1	3,3	3,4	3,6	3,7	3,9	4,1	5°
30′	3,2	3,4	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3	4,5	4,7	4,9	30′
6°	3,7	3,9	4,1	4,4	4,6	4,8	5,1	5,3	5,6	5,8	6°
30′	4,3	4,6	4,8	5,1	5,3	5,6	5,9	6,2	6,5	6,8	30′
7°	4,9	5,2	5,5	5,8	6,1	6,5	6,8	7,1	7,5	7,8	7°
30′	5,6	5,9	6,3	6,6	7,0	7,4	7,8	8,1	8,6	8,9	30′
8°	6,3	6,7	7,1	7,4	7,9	8,4	8,8	9,2	9,7	10,1	8°
30′	7,0	7,5	8,0	8,3	8,9	9,4	9,9	10,4	10,9	11,4	30′
9°	7,8	8,3	8,9	9,3	9,9	10,5	11,1	11,6	12,2	12,7	9°
30′	8,6	9,2	9,8	10,4	11,0	11,7	12,3	12,9	13,5	14,1	30′
10°	9,5	10,1	10,8	11,5	12,2	12,9	13,6	14,3	15,0	15,6	10°
30′	10,4	11,1	11,9	12,6	13,4	14,2	14,9	15,7	16,5	17,3	30′
11°	11,3	12,2	13,0	13,8	14,6	15,5	16,3	17,2	18,0	18,9	11°
30′	12,3	13,2	14,1	15,0	15,9	16,9	17,9	18,8	19,7	20,6	30′
12°	13,3	14,3	15,3	16,3	17,3	18,4	19,4	20,4	21,4	22,4	12°
30′	14,4	15,5	16,6	17,6	18,7	19,9	21,0	22,1	23,2	24,3	30′
13°	15,5	16,7	17,9	19,0	20,2	21,5	22,6	23,8	25,0	26,2	13°

Tiefen-winkel.	550′	600′	650′	700′	750′	800′	850′	900′	950′	1000′	Tiefen-winkel.
13° 30′	16′,6	17′,9	19′,2	20′,5	21′,8	23′,1	24′,4	25′,7	27′,0	28′,2	13° 30′
14°	17,8	19,2	20,6	22,0	23,3	24,8	26,2	27,6	29,0	30,3	14°
30′	19,1	20,6	22,1	23,5	25,0	26,6	28,0	29,5	31,0	32,5	30′
15°	20,4	22,0	23,6	25,1	26,7	28,4	29,9	31,6	33,2	34,7	15°
30′	21,7	23,4	25,1	26,7	28,5	30,2	31,9	33,7	35,3	37,1	30′
16°	23,0	24,9	26,7	28,5	30,3	32,2	34,0	35,8	37,6	39,5	16°
30′	24,4	26,4	28,3	30,2	32,1	34,2	36,1	38,0	39,9	41,8	30′
17°	25,8	27,9	30,0	32,0	34,1	36,2	38,3	40,3	42,4	44,3	17°
30′	27,3	29,5	31,7	33,8	36,0	38,3	40,5	42,7	44,9	47,1	30′
18°	28,8	31,1	33,4	35,7	38,1	40,5	42,8	45,1	47,5	49,9	18°
30′	30,4	32,8	35,3	37,7	40,1	42,7	45,1	47,6	50,1	52,6	30′
19°	32,0	34,6	37,2	39,7	42,3	45,0	47,5	50,1	52,8	55,3	19°
30′	33,6	36,3	39,1	41,7	44,5	47,3	50,0	52,7	55,5	58,2	30′
20°	35,3	38,2	41,0	43,8	46,7	49,6	52,5	55,4	58,3	61,2	20°
30′	37,0	40,0	43,0	46,0	49,1	52,1	55,1	58,2	61,2	64,2	30′
21°	38,7	41,9	45,1	48,2	51,4	54,7	57,8	61,0	64,2	67,4	21°
30′	40,5	43,9	47,2	50,4	53,8	57,2	60,5	63,9	67,2	70,6	30′
22°	42,3	45,9	49,3	52,7	56,3	59,8	63,3	66,8	70,3	73,8	22°
30′	44,2	47,9	51,5	55,1	58,8	62,5	66,1	69,8	73,5	77,1	30′
23°	46,1	49,9	53,8	57,5	61,3	65,3	69,0	72,9	76,7	80,5	23°
30′	48,0	52,0	56,1	59,9	63,9	68,1	72,0	76,0	80,0	84,0	30′
24°	50,0	54,2	58,4	62,4	66,6	70,9	75,0	79,2	83,4	87,5	24°
30′	52,1	56,4	60,7	65,0	69,3	73,8	78,1	82,5	86,8	91,1	30′
25°	54,1	58,6	63,2	67,6	72,1	76,8	81,3	85,8	90,2	94,8	25°
30′	56,2	60,9	65,7	70,2	74,9	79,8	84,5	89,1	93,8	98,5	30′
26°	58,3	63,2	68,2	72,9	77,8	82,8	87,7	92,6	97,5	102,3	26°
30′	60,5	65,5	70,7	75,7	80,8	85,9	91,0	96,1	101,2	106,3	30′
27°	62,7	67,9	73,3	78,5	83,8	89,0	94,3	99,6	104,9	110,2	27°
30′	65,0	70,3	75,9	81,3	86,8	92,3	97,8	103,3	108,8	114,2	30′
28°	67,2	72,9	78,6	84,2	89,9	95,6	101,3	107,0	112,7	118,3	28°
30′	69,5	75,4	81,3	87,1	93,0	99,0	104,8	110,7	116,6	122,4	30′
29°	71,9	78,0	84,1	90,1	96,2	102,4	108,4	114,5	120,6	126,6	29°
30′	74,4	80,6	86,9	93,1	99,4	105,8	112,0	118,4	124,7	130,9	30′
30°	76,8	83,2	89,8	96,1	102,7	109,3	115,7	122,3	128,8	135,3	30°
30′	79,2	85,9	92,7	99,3	106,0	112,8	119,5	126,3	133,0	139,7	30′
31°	81,7	88,6	95,6	102,4	109,4	116,4	123,3	130,3	137,2	144,2	31°
30′	84,2	91,4	98,6	105,6	112,8	120,1	127,2	134,4	141,6	148,7	30′
32°	86,8	94,2	101,6	108,9	116,2	123,8	131,1	138,6	146,0	153,3	32°
30′	89,4	96,9	104,7	112,2	119,8	127,5	135,1	142,8	150,4	158,0	30′
33°	92,0	99,5	107,8	115,5	123,4	131,4	139,2	147,1	154,9	162,8	33°
30′	94,7	102,3	110,9	118,9	127,0	135,2	143,3	151,4	159,5	167,6	30′
34°	97,4	105,2	114,1	122,3	130,7	139,1	147,4	155,8	164,1	172,4	34°
30′	100,1	108,2	117,3	125,8	134,4	143,1	151,6	160,2	168,8	177,4	30′
35°	102,9	111,2	120,6	129,3	138,1	147,1	155,9	164,7	173,6	182,4	35°
30′	105,7	114,3	123,9	132,9	142,0	151,2	160,2	169,3	178,4	187,4	30′
36°	108,6	117,4	127,3	136,4	145,8	155,2	164,5	174,0	183,2	192,5	36°

Tafel Nr. III.

Reductionen für den Ertel'schen Distanzmesser.

1. Erhebung des Rohrs.

Höhen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Höhen-winkel.
1°	0′,4	0′,2	0′,01	0′,03	0′,03	0′,04	0′,05	0′,05	0′,06	0′,06	0′,08	0′,1	1°
30′	0,3	0,1	0,01	0,05	0,05	0,07	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	30′
2°	0,3	0,1	0,02	0,08	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	2°
30′	0,3	0,1	0,05	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	30′
3°	0,3	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	3°
30′	0,3	0,2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	30′
4°	0,3	0,2	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,9	1,0	1,2	1,3	1,4	4°
30′	0,3	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,8	30′
5°	0,3	0,2	0,3	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1	2,2	5°
30′	0,3	0,3	0,4	0,7	1,0	1,2	1,5	1,7	2,0	2,2	2,5	2,7	30′
6°	0,3	0,3	0,5	0,8	1,2	1,4	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,2	6°
30′	0,3	0,4	0,7	1,0	1,4	1,7	2,1	2,4	2,8	3,2	3,5	3,8	30′
7°	0,3	0,5	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,7	4,1	4,4	7°
30′	0,3	0,6	0,9	1,4	1,9	2,3	2,8	3,2	3,7	4,2	4,7	5,1	30′
8°	0,4	0,6	1,1	1,6	2,2	2,6	3,2	3,7	4,3	4,8	5,3	5,8	8°
30′	0,4	0,7	1,2	1,8	2,5	3,0	3,6	4,2	4,8	5,4	6,0	6,5	30′
9°	0,4	0,8	1,4	2,1	2,8	3,4	4,0	4,7	5,4	6,1	6,7	7,3	9°
30′	0,5	0,9	1,6	2,3	3,1	3,8	4,5	5,3	6,0	6,8	7,5	8,2	30′
10°	0,5	1,0	1,8	2,6	3,5	4,2	5,1	5,9	6,7	7,5	8,3	9,1	10°
30′	0,6	1,2	2,0	2,9	3,8	4,7	5,6	6,5	7,4	8,3	9,2	10,0	30′
11°	0,6	1,3	2,2	3,2	4,2	5,2	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1	11,0	11°
30′	0,7	1,4	2,4	3,5	4,6	5,7	6,7	7,8	8,9	9,9	11,0	12,0	30′
12°	0,7	1,6	2,7	3,9	5,0	6,2	7,3	8,5	9,7	10,8	12,0	13,1	12°
30′	0,8	1,7	2,9	4,2	5,5	6,7	8,0	9,2	10,5	11,7	13,0	14,2	30′
13°	0,8	1,9	3,2	4,6	5,9	7,3	8,6	10,0	11,3	12,6	14,0	15,3	13°
30′	0,9	2,1	3,4	5,0	6,4	7,9	9,3	10,8	12,2	13,6	15,1	16,5	30′
14°	1,0	2,2	3,7	5,3	6,9	8,5	10,0	11,6	13,1	14,7	16,3	17,8	14°
30′	1,1	2,4	4,1	5,7	7,5	9,1	10,7	12,4	14,1	15,8	17,4	19,1	30′
15°	1,1	2,6	4,4	6,2	8,0	9,7	11,5	13,2	15,1	16,9	18,6	20,4	15°
30′	1,2	2,8	4,7	6,6	8,5	10,4	12,3	14,2	16,2	18,0	19,9	21,8	30′
16°	1,3	3,0	5,0	7,1	9,1	11,1	13,1	15,2	17,2	19,2	21,3	23,2	16°
30′	1,4	3,2	5,3	7,5	9,7	11,8	14,0	16,1	18,3	20,4	22,6	24,6	30′
17°	1,5	3,4	5,7	8,0	10,3	12,5	14,8	17,1	19,4	21,7	24,0	26,2	17°
30′	1,6	3,7	6,1	8,5	10,9	13,3	15,7	18,1	20,6	23,0	25,4	27,7	30′
18°	1,7	3,9	6,5	9,0	11,6	14,1	16,7	19,2	21,8	24,3	26,9	29,3	18°
30′	1,8	4,2	6,8	9,5	12,3	14,9	17,6	20,3	23,0	25,7	28,4	31,0	30′
19°	1,9	4,4	7,2	10,1	12,9	15,7	18,6	21,4	24,2	27,1	29,9	32,6	19°
30′	2,0	4,7	7,6	10,6	13,6	16,6	19,6	22,5	25,5	28,5	31,5	34,3	30′
20°	2,1	4,9	8,0	11,2	14,4	17,5	20,6	23,7	26,8	30,0	33,1	36,1	20°
30′	2,2	5,2	8,5	11,8	15,1	18,4	21,6	24,9	28,2	31,5	34,8	37,0	30′

Höhen-winkel.	50'	100'	150'	200'	250'	300'	350'	400'	450'	500'	550'	600'	Höhen-winkel.
21°	2',4	5',5	8',9	12',4	15',9	19',3	22',7	26',1	29',6	33',0	36',5	39',8	21°
30'	2,5	5,7	9,3	13,0	16,7	20,2	23,8	27,4	31,0	34,6	38,2	41,7	30'
22°	2,6	6,0	9,8	13,6	17,4	21,1	24,9	28,7	32,4	36,2	40,0	43,7	22°
30'	2,8	6,3	10,3	14,3	18,2	22,1	26,0	30,0	33,9	37,9	41,8	45,7	30'
23°	2,9	6,6	10,8	14,9	19,1	23,1	27,2	31,3	35,4	39,5	43,7	47,7	23°
30'	3,0	7,0	11,3	15,6	19,9	24,1	28,4	32,7	37,0	41,2	45,6	49,8	30'
24°	3,2	7,3	11,8	16,3	20,8	25,1	29,6	34,1	38,5	43,0	47,5	51,8	24°
30'	3,3	7,6	12,3	17,0	21,6	26,2	30,9	35,5	40,2	44,8	49,5	53,9	30'
25°	3,5	7,9	12,8	17,7	22,5	27,3	32,1	37,0	41,8	46,6	51,5	56,1	25°
30'	3,6	8,3	13,3	18,4	23,5	28,4	33,4	38,4	43,5	48,5	53,5	58,4	30'
26°	3,8	8,6	13,9	19,1	24,4	29,5	34,8	39,9	45,2	50,4	55,6	60,6	26°
30'	3,9	9,0	14,4	19,9	25,3	30,7	36,1	41,5	46,9	52,3	57,8	63,0	30'
27°	4,1	9,3	15,0	20,6	26,3	31,8	37,4	43,0	48,6	54,3	59,9	65,3	27°
30'	4,3	9,7	15,6	21,4	27,3	33,0	38,8	44,6	50,4	56,3	62,1	67,7	30'
28°	4,5	10,1	16,2	22,2	28,3	34,2	40,2	46,2	52,3	58,3	64,3	70,1	28°
30'	4,7	10,5	16,8	23,0	29,3	35,4	41,7	47,9	54,1	60,3	66,6	72,6	30'
29°	4,8	10,9	17,4	23,8	30,3	36,7	43,1	49,6	56,0	62,4	68,9	75,1	29°
30'	5,0	11,3	18,0	24,7	31,4	37,9	44,6	51,3	57,9	64,6	71,2	77,7	30'
30°	5,2	11,7	18,6	25,5	32,4	39,2	46,1	53,0	59,8	66,8	73,6	80,3	30°
30'	5,4	12,1	19,3	26,4	33,5	40,5	47,6	54,7	61,8	68,9	76,0	82,9	30'
31°	5,6	12,5	19,9	27,2	34,6	41,9	49,2	56,5	63,8	71,1	78,5	85,6	31°
30'	5,8	12,9	20,6	28,1	35,7	43,2	50,8	58,3	65,8	73,4	81,0	88,3	30'
32°	6,0	13,3	21,2	29,0	36,8	44,6	52,4	60,1	67,9	75,7	83,5	91,1	32°
30'	6,2	13,8	21,9	29,9	38,0	46,0	54,0	62,0	70,0	78,0	86,0	93,9	30'
33°	6,4	14,2	22,6	30,9	39,2	47,4	55,6	63,9	72,1	80,3	88,6	96,8	33°
30'	6,6	14,7	23,3	31,9	40,4	48,8	57,3	65,8	74,2	82,8	91,2	99,7	30'
34°	6,8	15,2	24,0	32,8	41,6	50,2	59,0	67,7	76,4	85,2	93,9	102,5	34°
30'	7,0	15,6	24,7	33,7	42,8	51,7	60,7	69,7	78,6	87,6	96,6	105,4	30'
35°	7,3	16,1	25,4	34,7	44,0	53,2	62,4	71,6	80,8	90,1	99,4	108,4	35°
30'	7,5	16,5	26,1	35,7	45,3	54,7	64,2	73,6	83,1	92,7	102,1	111,4	30'
36°	7,8	17,0	26,9	36,7	46,6	56,2	66,1	75,7	88,4	95,2	104,9	114,5	36°

2. Senkung des Rohrs.

Tiefen-winkel.	50'	100'	150'	200'	250'	300'	350'	400'	450'	500'	550'	600'	Tiefen-winkel.
1°	0',5	0',3	0',1	0',1	0',1	0',1	0',1	0',1	0',1	0',1	0',1	0',1	1°
30'	0,5	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	30'
2°	0,6	0,4	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	2°
30'	0,6	0,5	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6	30'
3°	0,7	0,5	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	3°
30'	0,7	0,6	0,5	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9	0,9	1,0	1,1	30'
4°	0,8	0,7	0,6	0,7	0,7	0,9	0,9	1,0	1,2	1,2	1,3	1,4	4°
30'	0,8	0,8	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,6	1,7	30'
5°	0,9	0,9	0,8	1,0	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	1,9	2,0	2,1	5°
30'	1,0	1,0	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6	30'

Tiefen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Tiefen-winkel.
6°	1′,1	1′,2	1′,1	1′,4	1′,6	1′,9	2,,1	2′,3	2′,5	2′,8	2′,9	3′,0	6°
30′	1,2	1,3	1,3	1.6	1,8	2,2	2,4	2,7	3,0	3,3	3,4	3,5	30′
7°	1,2	1,4	1,5	1,8	2,1	2,5	2,8	3,1	3,5	3,8	3,9	4,1	7°
30′	1,3	1,5	1,7	2,1	2,3	2,8	3,2	3,6	4,0	4,3	4,5	4,7	30′
8°	1,4	1,7	1,9	2,3	2,7	3,2	3,6	4,1	4,5	4,9	5,2	5,5	8°
30′	1,5	1,9	2,1	2,6	3,1	3,6	4,0	4,6	5,1	5,5	5,9	6,4	30′
9°	1,6	2,0	2,3	2,9	3,4	4,0	4,5	5,1	5,7	6,2	6,7	7,3	9°
30′	1,8	2,2	2.6	3,2	3,8	4,4	5,1	5,7	6,3	6,9	7,6	8,3	30′
10°	1,9	2,4	2,8	3,5	4.2	4,9	5,6	6,3	7,0	7,7	8,4	9,3	10°
30′	2,0	2,6	3,1	3,9	4,6	5,4	6,1	6,9	7,7	8,5	9,3	10,2	30′
11°	2,2	2,8	3.3	4,2	5,0	5,9	6,7	7,6	8,4	9,3	10,2	11,1	11°
30′	2,3	3,0	3,6	4,6	5,5	6,4	7,3	8,3	9,2	10,1	11,1	12,1	30′
12°	2,4	3,2	3,9	5,0	5,9	6.9	8,0	9,0	10,0	11,0	12,1	13,2	12°
30′	2,5	3,4	4,2	5,3	6,4	7,5	8,6	9,7	10,8	11,9	13,1	14,3	30′
13°	2,7	3,6	4,5	5,7	6,9	8,1	9,3	10,5	11,7	12,9	14,1	15,4	13°
30′	2,9	3,8	4,9	6,2	7,4	8,7	10,0	11,3	12,6	13,9	15,2	16,6	30′
14°	3,1	4,1	5,2	6,6	7,9	9,4	10,7	12,2	13,5	15,0	16,4	17,9	14°
30′	3,2	4,3	5,5	7,1	8,5	10,0	11,5	13,1	14,5	16,1	17,6	19,2	30′
15°	3,4	4,6	5,9	7,5	9,1	10,7	12,3	14,0	15,5	17,2	18,8	20,5	15°
30′	3,5	4,8	6,3	8,0	9,7	11,4	13,1	14,9	16.6	18,3	20,0	21,9	30′
16°	3,7	5,1	6,7	8,5	10,3	12,2	14,0	15,8	17 7	19,5	22,3	23,3	16°
30′	3,8	5,4	7,1	9,0	10,9	12,9	14,8	16,8	18,8	20,7	22,7	24,7	30′
17°	4,0	5,7	7,5	9,5	11,5	13,7	15,7	17,8	19,9	22.0	24,1	26,3	17°
30′	4,2	6,0	7,9	10,1	12,2	14,5	16,7	18,9	20,1	23,3	25,5	27,9	30′
18°	4,3	6,3	8,3	10,6	12,9	15,3	17,6	20,0	22,3	24,6	27,0	29,5	18°
30′	4,5	6,6	8,7	11,2	13.6	16,1	18,6	21,1	23,5	26,0	28,5	31,1	30′
19°	4,7	6,9	9,1	11,8	14,3	17.0	19,6	22,2	24,8	27,4	30.1	32,7	19°
30′	4,9	7,2	9,6	12,4	15,1	17.9	20,6	23,3	26,1	28,8	31,6	34,4	30′
20°	5,1	7,5	10,0	13,0	15,8	18,8	21,6	24,4	27,4	30,3	33,2	36,2	20°
30′	5,2	7,9	10,5	13,6	16.7	19,7	22,7	25,7	28,8	31,8	34,9	38,0	30′
21°	5,4	8,2	11,0	14,3	17,4	20,6	23,8	27,0	30,2	33,4	36,6	39,9	21°
30′	5,6	8,5	11,6	14,9	18,2	21,6	24,9	28,3	31,6	35,0	38,3	41,8	30′
22°	5,8	8,9	12,1	15,6	19,0	22,6	26,0	29,6	33,0	36,6	40,1	43,7	22°
30′	6,0	9,3	12,6	16,3	19,8	23,6	27,2	30,9	34,5	38,2	41,9	45,7	30′
23°	6,2	9,6	13,1	17,0	20,7	24,6	28,4	32,3	36,1	39,9	43,8	47,8	23°
30′	6,4	10,0	13,6	17,7	21,6	25,6	29,6	33,7	38,7	41,7	45,7	49,8	30′
24°	6,6	10,4	14 2	18,4	22,5	26,7	30,9	35,1	39,3	43,4	47,6	51,9	24°
30′	6,9	10,8	14,7	19,1	23,4	27,8	32,1	36,5	40,9	45,2	49,6	54,1	30′
25°	7,1	11,2	15,3	19,9	24,3	28,9	33,4	38,0	42,5	47,0	51,6	56,3	25°
30′	7,3	11,6	15,9	20,6	25,3	30,1	34,8	39,5	44,2	48,9	53,6	58,5	30′
26°	7,5	12,0	16,5	21,4	26,2	31,2	36,1	41,0	45,9	50,8	55,7	60,8	26°
30′	7,8	12,4	17,1	22,2	27,2	32,4	37,4	42,6	47,6	52,7	57,8	63,1	30′
27°	8,0	12,8	17,7	23,0	28,2	33,6	38,8	44,2	49,4	54,7	60,0	65,5	27°
30′	8,2	13,2	18,3	23,8	29,2	34,8	40,2	45,8	51,2	56,7	62,2	67,9	30′
28°	8,5	13,7	19,0	24,7	30,2	36,0	41,7	47,4	53,1	58,7	64,4	70,3	28°
30′	8,7	14,1	19,6	25,8	31,3	37,3	43,1	49,0	55,0	60,8	66,7	72,8	30′

Tiefen-winkel.	50′	100′	150′	200′	250′	300′	350′	400′	450′	500′	550′	600′	Tiefen-winkel.
29°	8′,9	14′,6	20′,3	26′,4	32′,4	38′,6	44′,6	50′,7	56′,9	62′,9	69′,0	75′,3	29°
30′	9,2	15,0	20,9	27,2	33,5	39,9	46,1	52,4	58,8	65,1	71,4	77,9	30′
30°	9,4	15,5	21,6	28,1	34,6	41,2	47,6	54,2	60,8	67,2	73,8	80,5	30°
30′	9,7	15,9	22,3	29,0	35,7	42,5	49,2	56,0	62,8	69,4	76,2	83,1	30′
31°	9,9	16,4	23,0	29,9	36,8	43,8	50,8	57,8	64,8	71,7	78,7	85,8	31°
30′	10,2	16,9	23,7	30,9	38,0	45,2	52,4	59,6	66,8	73,9	81,2	88,5	30′
32°	10,5	17,4	24,4	31,9	39,1	46,6	54,0	61,4	68,8	76,2	83,7	91,3	32°
30′	10,7	17,9	25,1	32,8	40,3	48,0	55,6	63,3	70,9	78,6	86,2	94,1	30′
33°	11,0	18,4	25,8	33,7	41,5	49,4	57,3	65,2	73,0	80,9	88,8	96,9	33°
30′	11,3	18,9	26,6	34,7	42,7	50,9	59,0	67,1	75,2	83,3	91,4	99,8	30′
34°	11,5	19,4	27,3	35,7	43,9	52,4	60,7	69,1	77,4	85,7	94,1	102,7	34°
30′	11,8	19,9	28,1	36,7	45,2	53,9	62,4	71,1	79,6	88,2	96,8	105,6	30′
35°	12,1	20,4	28,8	37,7	46,4	55,4	64,2	73,1	81,9	90,7	99,6	108,6	35°
30′	12,3	20,9	29,6	38,7	47,7	56,9	66,1	75,1	84,1	93,2	102,3	111,6	30′
36°	12,6	21,5	30,4	39,7	49,0	58,4	68,1	77,1	86,3	95,8	105,1	114,7	36°

Tafel Nr. IV.

Zu Stampfer's Distanzmesser; Werthe von $\frac{324}{o - u}$.

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
1,00	324,00		1,20	270,00		1,40	231,43	
1,01	320,79	0,29	1,21	267,77	0,21	1,41	229,79	0,15
1,02	317,65	0,59	1,22	265,58	0,42	1,42	228,17	0,31
1,03	314,56	0,88	1,23	263,42	0,62	1,43	226,57	0,46
1,04	311,54	1,18	1,24	261,29	0,83	1,44	225,00	0,62
1,05	308,57	1,47	1,25	259,20	1,04	1,45	223,45	0,77
1,06	305,66	1,76	1,26	257,14	1,25	1,46	221,92	0,93
1,07	302,80	2,06	1,27	255,12	1,45	1,47	220,41	1,08
1,08	300,00	2,35	1,28	253,13	1,66	1,48	218,92	1,23
1,09	297,95	2,65	1,29	251,16	1,87	1,49	217,45	1,39
1,10	294,54		1,30	249,23		1,50	216,00	
1,11	291,89	0,25	1,31	247,33	0,18	1,51	214,57	0,14
1,12	289,29	0,49	1,32	245,46	0,36	1,52	213,16	0,27
1,13	287,73	0,74	1,33	243,61	0,53	1,53	211,76	0,40
1,14	284,21	0,98	1,34	241,79	0,71	1,54	210,39	0,54
1,15	281,74	1,23	1,35	240,00	0,89	1,55	209,03	0,68
1,16	279,31	1,47	1,36	238,24	1,07	1,56	207,69	0,81
1,17	276,92	1,72	1,37	236,50	1,25	1,57	206,37	0,94
1,18	274,58	1,96	1,38	234,78	1,42	1,58	205,06	1,08
1,19	272,27	2,21	1,39	233,09	1,60	1,59	203,77	1,22

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
1,60	202,50		2,00	162,00		2,40	135,00	
1,61	201,21	0,12	2,01	161,18	0,08	2,41	134,44	0,05
1,62	200,00	0,24	2,02	160,20	0,15	2,42	133,88	0,11
1,63	198,77	0,36	2,03	159,61	0,23	2,43	133,34	0,16
1,64	197,56	0,48	2,04	158,82	0,31	2,44	132,79	0,22
1,65	196,36	0,60	2,05	158,05	0,39	2,45	132,25	0,27
1,66	195,18	0,71	2,06	157,28	0,46	2,46	131,71	0,32
1,67	194,01	0,83	2,07	156,53	0,54	2,47	131,18	0,38
1,68	192,86	0,95	2,08	155,77	0,62	2,48	130,64	0,43
1,69	191,72	1,07	2,09	155,03	0,69	2,49	130,12	0,49
1,70	190,59		2,10	154,28		2,50	129,60	
1,71	189,47	0,10	2,11	153,56	0,07	2,51	129,09	0,05
1,72	188,37	0,21	2,12	152,83	0,14	2,52	128,57	0,10
1,73	187,28	0,32	2,13	152,12	0,21	2,53	128,07	0,15
1,74	186,21	0,42	2,14	151,40	0,28	2,54	127,56	0,20
1,75	185,14	0,53	2,15	150,70	0,35	2,55	127,06	0,25
1,76	184,09	0,64	2,16	150,00	0,42	2,56	126,56	0,30
1,77	183,05	0,74	2,17	149,31	0,49	2,57	126,07	0,35
1,78	182,02	0,85	2,18	148,62	0,56	2,58	125,58	0,40
1,79	181,01	0,95	2,19	147,95	0,63	2,59	125,10	0,45
1,80	180,00		2,20	147,27		2,60	124,62	
1,81	179,01	0,09	2,21	146,61	0,06	2,61	124,14	0,05
1,82	178,02	0,19	2,22	145,95	0,13	2,62	123,66	0,09
1,83	177,05	0,28	2,23	145,29	0,19	2,63	123,20	0,14
1,84	176,09	0,38	2,24	144,64	0,26	2,64	122,73	0,18
1,85	175,14	0,47	2,25	144,00	0,32	2,65	122,27	0,23
1,86	174,19	0,57	2,26	143,36	0,38	2,66	121,80	0,28
1,87	173,26	0,66	2,27	142,73	0,45	2,67	121,35	0,32
1,88	172,34	0,76	2,28	142,10	0,51	2,68	120,90	0,37
1,89	171,43	0,85	2,29	141,49	0,58	2,69	120,45	0,42
1,90	170,53		2,30	140,87		2,70	120,00	
1,91	169,63	0,08	2,31	140,26	0,06	2,71	119,56	0,04
1,92	168,75	0,17	2,32	139,66	0,12	2,72	119,12	0,08
1,93	167,88	0,26	2,33	139,06	0,18	2,73	118,68	0,13
1,94	167,01	0,34	2,34	138,46	0,23	2,74	118,25	0,17
1,95	166,15	0,43	2,35	137,88	0,29	2,75	117,82	0,21
1,96	165,31	0,51	2,36	137,29	0,35	2,76	117,39	0,26
1,97	164,47	0,60	2,37	136,71	0,41	2,77	116,97	0,30
1,98	163,64	0,68	2,38	136,13	0,47	2,78	116,55	0,34
1,99	162,81	0,77	2,39	135,57	0,53	2,79	116,13	0,39

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
2,80	115,71		3,20	101,25		3,60	90,00	
2,81	115,33	0,04	3,21	100,94	0,03	3,61	89,75	0,02
2,82	114,89	0,08	3,22	100,62	0,06	3,62	89,50	0,05
2,83	114,49	0,12	3,23	100,31	0,09	3,63	89,26	0,07
2,84	114,08	0,16	3,24	100,00	0,12	3,64	89,01	0,09
2,85	113,69	0,20	3,25	99,69	0,15	3,65	88,77	0,12
2,86	113,29	0,24	3,26	99,39	0,18	3,66	88,52	0,14
2,87	112,89	0,28	3,27	99,08	0,21	3,67	88,28	0,17
2,88	112,50	0,32	3,28	98,78	0,24	3,68	88,04	0,19
2,89	112,11	0,36	3,29	98,48	0,28	3,69	87,81	0,22
2,90	111,72		3,30	98,18		3,70	87,57	
2,91	111,34	0,04	3,31	97,89	0,03	3,71	87,33	0,02
2,92	110,96	0,07	3,32	97,59	0,06	3,72	87,10	0,05
2,93	110,58	0,11	3,33	97,30	0,09	3,73	86,86	0,07
2,94	110,20	0,15	3,34	97,01	0,12	3,74	86,63	0,09
2,95	109,83	0,19	3,35	96,72	0,14	3,75	86,40	0,12
2,96	109,46	0,22	3,36	96,43	0,17	3,76	86,17	0,14
2,97	109,09	0,26	3,37	96,14	0,20	3,77	85,94	0,16
2.98	108,72	0,30	3,38	95,86	0,23	3,78	85,71	0,18
2,99	108,36	0,33	3,39	95,58	0,26	3,79	85,94	0,21
3,00	108,00		3,40	95,29		3,80	85,26	
3,01	107,64	0,03	3.41	95,02	0,03	3,81	85,04	0,02
3,02	107,28	0,07	3,42	94,74	0,05	3,82	84,82	0,04
3,03	106,93	0,10	3,43	94,46	0,08	3,83	84,60	0,06
3,04	106,58	0,14	3,44	94,19	0,11	3,84	84,38	0,09
3,05	106,23	0,17	3,45	93,91	0,14	3,85	84,16	0,11
3,06	105,88	0,21	3,46	93,64	0,16	3,86	83,94	0,13
3,07	105,54	0,24	3,47	93,37	0.19	3,87	83,72	0,15
3,08	105,20	0,28	3,48	93,10	0,22	3,88	83,50	0,17
3,09	104.86	0,31	3,49	92,84	0,24	3,89	83,29	0,20
3,10	104,52		3,50	92,57		3,90	83,08	
3,11	104,18	0,03	3,51	92,31	0,02	3,91	82,86	0,02
3,12	103,85	0,06	3,52	92,05	0,05	3,92	82,65	0,04
3,13	103,52	0,10	3,53	91,79	0,08	3,93	82,44	0,06
3,14	103,18	0,13	3,54	91,53	0,10	3,94	82,23	0,08
3,15	102,86	0,16	3,55	91,27	0,13	3,95	82,03	0,10
3,16	102,53	0,20	3,56	91,01	0,15	3,96	81,82	0,12
3,17	102,21	0,23	3,57	90,76	0,18	3,97	81,61	0,14
3,18	101,89	0,26	3,58	90,50	0,20	3,98	81,41	0,17
3,19	101,57	0,29	3,59	90,25	0,23	3,99	81,20	0,19

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
4,00	81,00		4,40	73,64		4 80	67,50	
4,01	80,79	0,02	4,41	73,47	0,02	4,81	67,36	0,01
4,02	80,59	0,04	4,42	73,30	0,03	4,82	67,22	0,03
4,03	80,39	0,06	4,43	73,14	0,05	4,83	67,08	0,04
4,04	80,20	0,08	4,44	72,97	0,06	4,84	66,94	0,06
4,05	80,00	0,09	4,45	72,81	0,08	4,85	66,80	0,07
4,06	79,80	0,12	4,46	72,65	0,10	4,86	66,67	0,08
4,07	79,61	0,14	4,47	72,49	0,11	4,87	66,53	0,10
4,08	79,41	0,16	4,48	72,32	0,13	4,88	66,39	0,11
4,09	79,22	0,18	4,49	72,16	0,15	4,89	66,26	0,12
4,10	79,03		4,50	72,00		4,90	66,12	
4,11	78,83	0,02	4,51	71,84	0,02	4,91	65,99	0,01
4,12	78,64	0,04	4,52	71,68	0,03	4,92	65,85	0,03
4,13	78,45	0,06	4,53	71,52	0,05	4,93	65,72	0,04
4,14	78,26	0,08	4,54	71,36	0,06	4,94	65,59	0,05
4,15	78,07	0,09	4,55	71,21	0,08	4,95	65,46	0,07
4,16	77,88	0,11	4,56	71,05	0,09	4,96	65,32	0,08
4,17	77,70	0,13	4,57	70,90	0,11	4,97	65,19	0,09
4,18	77,51	0,15	4,58	70,74	0,12	4,98	65,06	0,10
4,19	77,33	0,17	4,59	70,59	0,14	4,99	64,93	0,12
4,20	77,14		4,60	70,44		5,00	64,80	
4,21	76,96	0,02	4,61	70,28	0,02	5,01	64,67	0,01
4,22	76,78	0,04	4,62	70,13	0,03	5,02	64,54	0,02
4,23	76,60	0,05	4,63	69,98	0,04	5,03	64,41	0,04
4,24	76,42	0,07	4,64	69,83	0,06	5,04	64,29	0,05
4,25	76,24	0,09	4,65	69,68	0,08	5,05	64,16	0,06
4,26	76,06	0,10	4,66	69,53	0,09	5,06	64,03	0,08
4,27	75,88	0,12	4,67	69,38	0,10	5,07	63,91	0,09
4,28	75,70	0,14	4,68	69,23	0,12	5,08	63,78	0,10
4,29	75,53	0,16	4,69	69,08	0,14	5,09	63,66	0,11
4,30	75,35		4,70	68,94		5,10	63,53	
4,31	75,18	0,02	4,71	68,79	0,01	5,11	63,41	0,01
4,32	75,00	0,03	4,72	68,64	0,03	5,12	63,28	0,02
4,33	74,83	0,05	4,73	68,50	0,04	5,13	63,16	0,04
4,34	74,66	0,07	4,74	68,36	0,06	5,14	63,04	0,05
4,35	74,48	0,08	4,75	68,21	0,07	5,15	62,91	0,06
4,36	74,31	0,10	4,76	68,07	0,09	5,16	62,79	0,07
4,37	74,14	0,12	4,77	67,93	0,10	5,17	62,67	0,08
4,38	73,97	0,14	4,78	67,78	0,12	5,18	62,55	0,10
4,39	73,80	0,15	4,79	67,64	0,13	5,19	62,43	0,11

o — u	Distanz.	Theile. Prop.-	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
5,20	62,31		5,60	57,86		6,00	54,00	
5,21	62,19	0,01	5,61	57,75	0,01	6,01	53,91	0,01
5,22	62,07	0,02	5,62	57,65	0,02	6,02	53,82	0,02
5,23	61,95	0,04	5,63	57,55	0,03	6,03	53,73	0,03
5,24	61,83	0,05	5,64	57,45	0,04	6,04	53,64	0,04
5,25	61,72	0,06	5,65	57,35	0,05	6,05	53,55	0,04
5,26	61,60	0,07	5,66	57,24	0,06	6,06	53,47	0,05
5,27	61,48	0,08	5,67	57,14	0,07	6,07	53,37	0,06
5,28	61,36	0,09	5,68	57,04	0,08	6,08	53,29	0,07
5,29	61,25	0,11	5,69	56,94	0,09	6,09	53,20	0,08
5,30	61,13		5,70	56,84		6,10	53,12	
5,31	61,02	0,01	5,71	56,74	0,01	6,11	53,03	0,01
5,32	60,90	0,02	5,72	56,64	0,02	6,12	52,94	0,02
5,33	60,79	0,03	5,73	56,54	0,03	6,13	52,86	0,02
5,34	60,68	0,04	5,74	56,45	0,04	6,14	52,77	0,03
5,35	60,56	0,06	5,75	56,35	0,05	6,15	52,68	0,04
5,36	60,45	0,07	5,76	56,25	0,06	6,16	52,60	0,05
5,37	60,34	0,08	5,77	56,15	0,07	6,17	52,51	0,06
5,38	60,22	0,09	5,78	56,06	0,08	6,18	52,43	0,07
5,39	60,11	0,10	5,79	55,96	0,09	6,19	52,34	0,08
5,40	60,00		5,80	55,86		6,20	52,26	
5,41	59,89	0,01	5,81	55,76	0,01	6,21	52,17	0,01
5,42	59,78	0,02	5,82	55,67	0,02	6,22	52,09	0,02
5,43	59,67	0,03	5,83	55,57	0,03	6,23	52,01	0,02
5,44	59,56	0,04	5,84	55,48	0,04	6,24	51,92	0,03
5,45	59,45	0,05	5,85	55,38	0,05	6,25	51,84	0,04
5,46	59,34	0,06	5,86	55,29	0,06	6,26	51,76	0,05
5,47	59,23	0,08	5,87	55,20	0,07	6,27	51,68	0,06
5,48	59,12	0,09	5,88	55,10	0,08	6,28	51,59	0,07
5,49	59,02	0,10	5,89	55,01	0,08	6,29	51,51	0,07
5,50	58,91		5,90	54,92		6,30	51,43	
5,51	58,80	0,01	5,91	54,82	0,01	6,31	51,35	0,01
5,52	58,70	0,02	5,92	54,73	0,02	6,32	51,27	0,02
5,53	58,59	0,03	5,93	54,64	0,03	6,33	51,18	0,02
5,54	58,48	0,04	5,94	54,55	0,04	6,34	51,10	0,03
5,55	58,38	0,05	5,95	54,45	0,05	6,35	51,02	0,04
5,56	58,27	0,06	5,96	54,36	0,06	6,36	50,94	0,05
5,57	58,17	0,07	5,97	54,27	0,06	6,37	50,86	0,06
5,58	58,06	0,08	5,98	54,18	0,07	6,38	50,78	0,06
5,59	57,96	0,09	5,99	54,09	0,08	6,39	50,70	0,07

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
6,40	50,62		6,80	47,65		7,20	45,00	
6,41	50,55	0,01	6,81	47,58	0,01	7,21	44,94	0,01
6,42	50,47	0,02	6,82	47,51	0,01	7,22	44,88	0,01
6,43	50,39	0,02	6,83	47,44	0,02	7,23	44,81	0,02
6,44	50,31	0,03	6,84	47,37	0,03	7,24	44,75	0,02
6,45	50,23	0,04	6,85	47,30	0,03	7,25	44,69	0,03
6,46	50,16	0,05	6,86	47,23	0,04	7,26	44,63	0,04
6,47	50,08	0,05	6,87	47,16	0,05	7,27	44,56	0,04
6,48	50,00	0,06	6,88	47,09	0,06	7,28	44,51	0,05
6,49	49,92	0,07	6,89	47,02	0,06	7,29	44,44	0,06
6,50	49,85		6,90	46,96		7,30	44,38	
6,51	49,77	0,01	6,91	46,89	0,01	7,31	44,32	0,01
6,52	49,69	0,02	6,92	46,82	0,01	7,32	44,26	0,01
6,53	49,62	0,02	6,93	46,75	0,02	7,33	44,20	0,02
6,54	49,54	0,03	6,94	46,69	0,03	7,34	44,14	0,02
6,55	49,47	0,04	6,95	46,62	0,03	7,35	44,08	0,03
6,56	49,39	0,04	6,96	46,55	0,04	7,36	44,02	0,04
6,57	49,32	0,05	6,97	46,48	0,05	7,37	43,96	0,04
6,58	49,24	0,06	6,98	46,42	0,05	7,38	43,90	0,05
6,59	49,16	0,07	6,99	46,35	0,06	7,39	43,84	0,05
6,60	49,09		7,00	46,29		7,40	43,78	
6,61	49,02	0,01	7,01	46,22	0,01	7,41	43,72	0,01
6,62	48,94	0,01	7,02	46,15	0,01	7,42	43,67	0,01
6,63	48,87	0,02	7,03	46,09	0,02	7,43	43,61	0,02
6,64	48,79	0,03	7,04	46,02	0,03	7,44	43,55	0,02
6,65	48,72	0,04	7,05	45,96	0,03	7,45	43,49	0,03
6,66	48,65	0,04	7,06	45,89	0,04	7,46	43,43	0,03
6,67	48,58	0,05	7,07	45,84	0,05	7,47	43,37	0,04
6,68	48,50	0,06	7,08	45,76	0,05	7,48	43,32	0,05
6,69	48,43	0,06	7,09	45,70	0,06	7,49	43,25	0,05
6,70	48,36		7,10	45,63		7,50	43,20	
6,71	48,29	0,01	7,11	45,57	0,01	7,51	43,14	0,00
6,72	48,21	0,01	7,12	45,51	0,01	7,52	43,08	0,01
6,73	48,14	0,02	7,13	45,44	0,02	7,53	43,03	0,02
6,74	48,07	0,03	7,14	45,38	0,02	7,54	42,97	0,02
6,75	48,01	0,04	7,15	45,32	0,03	7,55	42,91	0,03
6,76	47,93	0,04	7,16	45,25	0,04	7,56	42,86	0,03
6,77	47,86	0,05	7,17	45,19	0,04	7,57	42,80	0,04
6,78	47,79	0,06	7,18	45,13	0,05	7,58	42,74	0,04
6,79	47,72	0,06	7,19	45,06	0,06	7,59	42,69	0,05

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
7,60	42,63		8,00	40,50		8,40	38,57	
7,61	42,58	0,00	8,01	40,45	0,00	8,41	38,53	0,00
7,62	42,52	0,01	8,02	40,40	0,01	8,42	38,48	0,01
7,63	42,46	0,02	8,03	40,34	0,01	8,43	38,43	0,01
7,64	42,41	0,02	8,04	40,29	0,02	8,44	38,39	0,02
7,65	42,35	0,03	8,05	40,25	0,02	8,45	38,34	0,02
7,66	42,30	0,03	8,06	40,20	0,03	8,46	38,30	0,03
7,67	42,24	0,04	8,07	40,15	0,03	8,47	38,25	0,03
7,68	42,19	0,04	8,08	40,10	0,04	8,48	38,20	0,04
7,69	42,13	0,05	8,09	40,05	0,04	8,49	38,16	0 04
7,70	42,08		8,10	40,00		8,50	38,12	
7,71	42,02	0,00	8,11	39,95	0,00	8,51	38,07	0,00
7,72	41,97	0,01	8,12	39,90	0,01	8,52	38,03	0,01
7,73	41,91	0,02	8,13	39,85	0,01	8,53	37,98	0,01
7,74	41,86	0,02	8,14	39,80	0,02	8,54	37,94	0,02
7,75	41,81	0,03	8,15	39,75	0,02	8,55	37,89	0,02
7,76	41,75	0,03	8,16	39,71	0,03	8,56	37,85	0,03
7,77	41,70	0,04	8,17	39,66	0,03	8,57	37,81	0,03
7,78	41,65	0,04	8,18	39,61	0,04	8,58	37,76	0,04
7,79	41,59	0,05	8,19	39,56	0,04	8,59	37,72	0,04
7,80	41,54		8,20	39,51		8,60	37,68	
7,81	41,48	0,00	8,21	39,46	0,00	8,61	37,63	0,00
7,82	41,43	0,01	8,22	39,42	0,01	8,62	37,59	0,01
7,83	41,38	0,02	8,23	39,37	0,01	8,63	37,54	0,01
7,84	41,33	0,02	8,24	39,32	0,02	8,64	37,50	0,02
7,85	41,27	0,03	8,25	39,27	0,02	8,65	37,46	0,02
7,86	41,22	0,03	8,26	39,23	0,03	8,66	37,41	0,03
7,87	41,17	0,04	8,27	39,18	0,03	8,67	37,37	0,03
7,88	41,12	0,04	8,28	39,13	0,04	8,68	37,33	0,04
7,89	41,06	0,05	8,29	39,08	0,04	8,69	37,28	0,04
7,90	41,01		8,30	39,04		8,70	37,24	
7,91	40,96	0,00	8,31	38,99	0,00	8,71	37,20	0,00
7,92	40,91	0,01	8,32	38,94	0,01	8,72	37,16	0,01
7,93	40,86	0,01	8,33	38,90	0,01	8,73	37,11	0,01
7,94	40,81	0,02	8,34	38,85	0,02	8,74	37,07	0,02
7,95	40,76	0,02	8,35	38,80	0,02	8,75	37,03	0,02
7,96	40,70	0,03	8,36	38,76	0,03	8,76	36,99	0,02
7,97	40,65	0,03	8,37	38,71	0,03	8,77	36,94	0,03
7,98	40,60	0,04	8,38	38,66	0,04	8,78	36,90	0,03
7,99	40,55	0,05	8,39	38,62	0,04	8,79	36,86	0,04

o — u	Distanz.	Prop.-Theile.	o — u	Distanz.	Prop.-Theile	o — u	Distanz.	Prop.-Theile.
8,80	36,82		9,20	35,22		9,60	33,75	
8,81	36,78	0,00	9,21	35,18	0,00	9,61	33,72	0,00
8,82	36,74	0,01	9,22	35,14	0,01	9,62	33,68	0,01
8,83	36,69	0,01	9,23	35,10	0,01	9,63	33,64	0,01
8,84	36,65	0,02	9,24	35,07	0,01	9,64	33,61	0,01
8,85	36,61	0,02	9,25	35,03	0,02	9,65	33,58	0,02
8,86	36,57	0,02	9,26	34,99	0,02	9,66	33,54	0,02
8,87	36,53	0,03	9,27	34,95	0,02	9,67	33,52	0,02
8,88	36,49	0,03	9,28	34,91	0,03	9,68	33,47	0,03
8,89	36,45	0,04	9,29	34,88	0,03	9,69	33,44	0,03
8,90	36,40		9,30	34,84		9,70	33,40	
8,91	36,36	0,00	9,31	34,80	0,00	9,71	33,37	0,00
8,92	36,32	0,01	9,32	34,76	0,01	9,72	33,33	0,01
8,93	36,28	0,01	9,33	34,73	0,01	9,73	33,31	0,01
8,94	36,24	0,02	9,34	34,69	0,01	9,74	33,27	0,01
8,95	36,20	0,02	9,35	34,65	0,02	9,75	33,23	0,02
8,96	36,16	0,02	9,36	34,62	0,02	9,76	33,20	0,02
8,97	36,12	0,03	9,37	34,58	0,02	9,77	33,16	0,02
8,98	36,08	0,03	9,38	34,54	0,03	9,78	33,13	0,03
8,99	36,04	0,04	9,39	34,51	0,03	9,79	33,10	0,03
9,00	36,00		9,40	34,47		9,80	33,06	
9,01	35,96	0,00	9,41	34,43	0,00	9,81	33,03	0,00
9,02	35,92	0,01	9,42	34,40	0,01	9,82	32,99	0,01
9,03	35,88	0,01	9,43	34,36	0,01	9,83	32,96	0,01
9,04	35,84	0,02	9,44	34,32	0,01	9,84	32,93	0,01
9,05	35,80	0,02	9,45	34,29	0,02	9,85	32,89	0,02
9,06	35,76	0,02	9,46	34,25	0,02	9,86	32,86	0,02
9,07	35,72	0,03	9,47	34,21	0,02	9,87	32,83	0,02
9,08	35,68	0,03	9,48	34,18	0,03	9,88	32,79	0,03
9,09	35,64	0,03	9,49	34,15	0,03	9,89	32,76	0,03
9,10	35,60		9,50	34,11		9,90	32,73	
9,11	35,56	0,00	9,51	34,07	0,00	9,91	32,69	0,00
9,12	35,53	0,01	9,52	34,03	0,01	9,92	32,66	0,01
9,13	35,49	0,01	9,53	34,00	0,01	9,93	32,63	0,01
9,14	35,45	0,01	9,54	33,96	0,01	9,94	32,60	0,01
9,15	35,41	0,02	9,55	33,93	0,02	9,95	32,56	0,02
9,16	35,37	0,02	9,56	33,89	0,02	9,96	32,53	0,02
9,17	35,33	0,02	9,57	33,86	0,02	9,97	32,50	0,02
9,18	35,29	0,03	9,58	33,82	0,03	9,98	32,46	0,03
9,19	35,26	0,03	9,59	33,79	0,03	9,99	32,43	0,03

Tafel Nr. V.

Zu Stampfer's Distanzmesser; Werthe von $\frac{0,0356\ (o + u - 2m)}{o - u}$.

o — u	o + u — 2m									
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
1,0	0,14	0,28	0,43	0,57	0,71	0,85	1,00	1,14	1,28	1,42
1,05	0,13	0,26	0,41	0,54	0,68	0,82	0,95	1,09	1,22	1,36
1,1	0,13	0,26	0,39	0,52	0,65	0,78	0,91	1,04	1,17	1,30
1,15	0,12	0,25	0,37	0,50	0,62	0,74	0,87	1,00	1,12	1,24
1,2	0,12	0,24	0,36	0,47	0,59	0,71	0,83	0,95	1,07	1,19
1,25	0,11	0,23	0,34	0,46	0,57	0,68	0,80	0,91	1,03	1,14
1,3	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66	0,77	0,88	0,99	1,10
1,35	0,11	0,21	0,32	0 42	0,53	0,63	0,74	0,84	0,95	1,06
1,4	0,10	0,20	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,92	1,02
1,45	0,10	0,19	0,30	0,39	0,49	0,59	0,69	0,79	0,89	0,98
1,5	0,10	0,19	0,29	0,38	0,47	0,57	0,67	0,76	0,86	0,95
1,6	0,09	0,18	0,27	0,36	0,44	0,53	0,62	0,71	0,80	0,89
1,7	0,08	0,17	0,25	0,34	0,42	0,50	0,59	0,67	0,75	0,84
1,8	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,47	0,55	0,63	0,71	0,79
1,9	0,07	0,15	0,22	0,30	0,38	0,45	0,53	0,60	0,67	0,75
2,0	0,07	0,14	0,21	0,28	0,36	0,43	0,50	0,57	0,64	0,71
2,1	0,07	0,13	0,20	0,27	0,34	0,41	0,47	0,55	0,61	0,68
2,2	0,06	0,13	0,19	0,26	0,32	0,39	0,45	0,52	0,58	0,65
2,3	0,06	0,12	0,19	0,25	0,31	0,37	0,43	0,50	0,56	0,62
2,4	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,35	0,41	0,47	0,53	0,59
2,6	0,05	0,11	0,16	0,22	0,27	0,33	0,38	0,44	0,49	0,55
2,8	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,36	0,41	0,46	0,51
3,0	0,05	0,09	0,14	0,19	0,24	0,28	0,33	0,38	0,43	0,47
3,5	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,33	0,37	0,41
4,0	0,04	0,07	0,11	0,14	0,18	0,21	0,25	0,28	0,32	0,36
4,5	0,03	0,06	0,10	0,13	0,16	0,19	0,22	0,25	0,29	0,32
5,0	0,03	0,06	0,09	0,11	0,14	0,17	0,20	0,23	0,26	0,28
6,0	0,02	0,05	0,07	0,09	0,12	0,14	0,17	0,19	0,21	0,24
7,0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
8,0	0,02	0,04	0,05	0,07	0,09	0,11	0,12	0,14	0,16	0,18
9,0	0,01	0,03	0,05	0,06	0,08	0,09	0,11	0,13	0,14	0,16
10,0	0,01	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,10	0,11	0,13	0,14

o — u	o + u — 2m									
	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
1,0	1,57	1,71	1,85	1,99	2,14	2,28	2,42	2,56	2,70	2,85
1,05	1,50	1,63	1,76	1,90	2,04	2,17	2,31	2,40	2,58	2,72
1,1	1,42	1,55	1,68	1,81	1,94	2,07	2,20	2,33	2,46	2,59
1,15	1,36	1,49	1,60	1,74	1,86	1,98	2,11	2,23	2,36	2,48
1,2	1,31	1,42	1,54	1,66	1,78	1,90	2,02	2,14	2,26	2,37
1,25	1,25	1,37	1,48	1,60	1,71	1,82	1,94	2,05	2,17	2,28
1,3	1,20	1,31	1,42	1,53	1,64	1,75	1,86	1,97	2,08	2,19
1,35	1,16	1,26	1,37	1,48	1,58	1,69	1,79	1,90	2,00	2,11
1,4	1,12	1,22	1,32	1,42	1,52	1,63	1,73	1,83	1,93	2,03
1,45	1,08	1,18	1,28	1,38	1,47	1,57	1,67	1,77	1,87	1,97
1,5	1,04	1,14	1,24	1,33	1,42	1,52	1,61	1,71	1,81	1,90
1,6	0,98	1,07	1,16	1,25	1,33	1,42	1,51	1,60	1,69	1,78
1,7	0,92	1,01	1,09	1,17	1,26	1,34	1,42	1,51	1,59	1,68
1,8	0,87	0,96	1,04	1,11	1,19	1,26	1,34	1,42	1,50	1,58
1,9	0,82	0,90	0,98	1,05	1,12	1,20	1,27	1,35	1,42	1,50
2,0	0,78	0,85	0,92	1,00	1,07	1,14	1,21	1,28	1,35	1,42
2,1	0,75	0,81	0,88	0,95	1,02	1,09	1,15	1,22	1,29	1,35
2,2	0,71	0,78	0,84	0,91	0,97	1,04	1,10	1,17	1,23	1,29
2,3	0,68	0,74	0,80	0,87	0,93	1,00	1,05	1,12	1,18	1,24
2,4	0,65	0,71	0,77	0,83	0,89	0,95	1,01	1,07	1,13	1,19
2,6	0,60	0,66	0,71	0,77	0,82	0,87	0,93	0,99	1,04	1,10
2,8	0,56	0,61	0,66	0,71	0,76	0,81	0,86	0,91	0,97	1,02
3,0	0,52	0,57	0,62	0,66	0,71	0,76	0,81	0,85	0,90	0,95
3,5	0,45	0,49	0,53	0,57	0,61	0,65	0,69	0,73	0,77	0,81
4,0	0,39	0,43	0,46	0,50	0,53	0,57	0,60	0,64	0,68	0,71
4,5	0,35	0,38	0,41	0,44	0,48	0,51	0,54	0,57	0,60	0,63
5,0	0,31	0,34	0,37	0,40	0,43	0,45	0,48	0,51	0,54	0,57
6,0	0,26	0,28	0,31	0,33	0,36	0,38	0,40	0,43	0,45	0,47
7,0	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,39	0,41
8,0	0,20	0,21	0,23	0,25	0,27	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
9,0	0,17	0,19	0,21	0,22	0,24	0,25	0,27	0,28	0,30	0,32
10,0	0,16	0,17	0,18	0,20	0,21	0,23	0,24	0,25	0,27	0,28

Tafel Nr. VI.

Zu Stampfer's Distanzmesser; Werthe von $-\frac{0{,}0031\ (h-u)^2}{o-u}$.

o — u	h — u									
	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
1,0	0,05	0,11	0,20	0,31	0,45	0,61	0,80	1,00	1,24	1,50
1,05	0,05	0,10	0,19	0,30	0,43	0,58	0,76	0,96	1,18	1,43
1,1	0,05	0,10	0,18	0,28	0,41	0,55	0,72	0,91	1,13	1,36
1,15	0,04	0,10	0,17	0,27	0,39	0,53	0,69	0,87	1,08	1,31
1,2	0,04	0,09	0,16	0,26	0,37	0,51	0,66	0,84	1,03	1,25
1,25	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,80	1,00	1,20
1,3	0,04	0,09	0,15	0,24	0,34	0,47	0,61	0,77	0,95	1,15
1,35	0,04	0,08	0,15	0,23	0,33	0,45	0,59	0,74	0,92	1,11
1,4	0,04	0,08	0,14	0,22	0,32	0,43	0,57	0,72	0,89	1,07
1,45	0,03	0,08	0,14	0,21	0,31	0,42	0,55	0,69	0,86	1,04
1,5	0,03	0,08	0,13	0,20	0,30	0,40	0,53	0 67	0,83	1,00
1,6	0,03	0,07	0,12	0,19	0,28	0,38	0,50	0,63	0,77	0,94
1,7	0,03	0,07	0,12	0,18	0,26	0,36	0,47	0,59	0,73	0,88
1,8	0,03	0,06	0,11	0,17	0,25	0,34	0,44	0,56	0,69	0,83
1,9	0,03	0,06	0,10	0,16	0,24	0,32	0,42	0,53	0,65	0,79
2,0	0,02	0,06	0,10	0,16	0,22	0,30	0,40	0,50	0,64	0,75
2,1	0,02	0,05	0,09	0,15	0,21	0,29	0,38	0,48	0,59	0,72
2,2	0,02	0,05	0,09	0,14	0,20	0,28	0,36	0,46	0,56	0,68
2,3	0,02	0,05	0,09	0,14	0,19	0,26	0,34	0,44	0,54	0,65
2,4	0,02	0,05	0,08	0,13	0,19	0,25	0,33	0,42	0,52	0,62
2,6	0.02	0,04	0,08	0,12	0,17	0,23	0,30	0,39	0,48	0,58
2,8	0,02	0,04	0,07	0,11	0,16	0,22	0,28	0,36	0,44	0,54
3,0	0,02	0,04	0,07	0,10	0,15	0,20	0,26	0,33	0,41	0,50
3,5	0,01	0,03	0,06	0,09	0,13	0,17	0,23	0,29	0,35	0,43
4,0	0,01	0,03	0,05	0,08	0,11	0,15	0,20	0,24	0,31	0,37
4,5	0,01	0,03	0,04	0,07	0,10	0,13	0,18	0,22	0,28	0,33
5,0	0,01	0,02	0,04	0,06	0,09	0,12	0,16	0,20	0,25	0,30
6,0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,07	0,10	0,13	0,17	0,21	0,25
7,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,09	0,11	0,14	0,18	0,21
8,0	0,01	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,13	0,16	0,19
9,0	0,01	0,01	0,02	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,14	0,17
10,0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15

Tafel Nr. VII.

Capillardepressionen der Barometer, in Millimetern ausgedrückt.

Halbm. der Röhre.	Höhe der Quecksilberkuppe in Millimetern.											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
mm												
1,0	1,268	2,460	3,516	4,396	5,085	—	—	—	—	—	—	—
1,2	0,876	1,715	2,484	3,162	3,728	4,190	—	—	—	—	—	—
1,4	0,638	1,256	1,836	2,363	2,825	3,218	3,542	—	—	—	—	—
1,6	0,484	0,955	1,404	1,820	2,196	2,528	2,812	3,050	—	—	—	—
1,8	0,378	0,747	1,103	1,437	1,746	2,024	2,270	2,483	—	—	—	—
2,0	0,302	0,598	0,885	1,158	1,413	1,648	1,859	2,046	2,348	—	—	—
2,2	0,245	0,487	0,723	0,948	1,161	1,360	1,541	1,705	1,978	—	—	—
2,4	0,203	0,403	0,599	0,787	0,966	1,135	1,292	1,436	1,680	1,866	—	—
2,6	0,170	0,337	0,502	0,661	0,813	0,958	1,093	1,218	1,436	1,608	—	—
2,8	0,143	0,285	0,425	0,560	0,691	0,815	0,932	1,041	1,235	1,392	1,511	—
3,0	0,122	0,243	0,362	0,478	0,591	0,698	0,800	0,896	1,068	1,210	1,322	—
3,2	0,105	0,209	0,312	0,412	0,509	0,602	0,691	0,776	0,928	1,057	1,161	1,238
3,4	0,091	0,181	0,269	0,356	0,441	0,523	0,601	0,675	0,810	0,926	1,021	1,095
3,6	0,079	0,157	0,234	0,310	0,384	0,455	0,524	0,590	0,710	0,814	0,901	0,970
3,8	0,069	0,137	0,205	0,271	0,336	0,399	0,459	0,517	0,624	0,718	0,797	0,861
4,0	0,060	0,120	0,180	0,238	0,295	0,350	0,404	0,455	0,551	0,635	0,707	0,766

Tafel Nr. VIII.

Erste hypsometrische Tafel: Werthe von A und A′.

T + t R°.	A. Meter.	A′. Par. Fuss.	T + t R°.	A. Meter.	A′. Par. Fuss.	T + t R°.	A. Meter.	A′. Par. Fuss.
— 16°	4,24976	4,73809	— 3°	4,26301	4,75134	+ 10°	4,27587	4,76420
— 15	4,25079	4,73912	— 2	4,26401	4,75234	+ 11	4,27684	4,76517
— 14	4,25182	4,74015	— 1	4,26501	4,75334	+ 12	4,27781	4,76614
— 13	4,25285	4,74118	0	4,26601	4,75434	+ 13	4,27878	4,76711
— 12	4,25388	4,74221	+ 1	4,26701	4,75533	+ 14	4,27975	4,76808
— 11	4,25490	4,74323	+ 2	4,26800	4,75632	+ 15	4,28071	4,76904
— 10	4,25592	4,74425	+ 3	4,26899	4,75731	+ 16	4,28167	4,77000
— 9	4,25694	4,74527	+ 4	4,26998	4,75830	+ 17	4,28263	4,77096
— 8	4,25796	4,74629	+ 5	4,27097	4,75929	+ 18	4,28359	4,77192
— 7	4,25897	4,74730	+ 6	4,27196	4,76028	+ 19	4,28455	4,77288
— 6	4,25998	4,74831	+ 7	4,27294	4,76126	+ 20	4,28550	4,77383
— 5	4,26099	4,74932	+ 8	4,27392	4,76224	+ 21	4,28645	4,77478
— 4	4,26200	4,75033	+ 9	4,27490	4,76322	+ 22	4,28740	4,77573
— 3	4,26301	4,75134	+ 10	4,27587	4,76420	+ 23	4,28835	4,77668

T + t. R°.	A. Meter.	A'. Par. Fuss	T + t. R°.	A. Meter.	A'. Par. Fuss.	T + t. R°.	A. Meter.	A'. Par. Fuss.
+ 23°	4,28835	4,77668	+ 32°	4,29680	4,78513	+ 41°	4,30508	4,79342
+ 24	4,28930	4,77763	+ 33	4,29773	4,78606	+ 42	4,30599	4,79433
+ 25	4,29025	4,77858	+ 34	4,29866	4,78699	+ 43	4,30690	4,79524
+ 26	4,29119	4,77952	+ 35	4,29958	4,78791	+ 44	4,30781	4,79614
+ 27	4,29213	4,78046	+ 36	4,30050	4,78883	+ 45	4,30871	4,79704
+ 28	4,29307	4,78140	+ 37	4,30142	4,78975	+ 46	4,30961	4,79794
+ 29	4,29401	4,78234	+ 38	4,30234	4,79067	+ 47	4,31051	4,79884
+ 30	4,29494	4,78327	+ 39	4,30326	4,79159	+ 48	4,31141	4,79974
+ 31	5,29587	4,78420	+ 40	4,30417	4,79251	+ 49	4,31231	4,80064
+ 32	4,29680	4,78513	+ 41	4.30508	4,79342	+ 50	4,31321	4,80153

Tafel Nr. IX.

Zweite hypsom. Tafel: Werthe von $\log G = \log (1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)$.

ψ +	log G.	ψ −	ψ +	log G.	ψ −	ψ +	log G.	ψ −	ψ +	log G.	ψ −	ψ +	log G.	ψ −
0°	0,00114	90°	10°	0,00107	80°	20°	0,00087	70°	30°	0,00057	60°	40°	0,00020	50°
1	114	89	11	106	79	21	85	69	31	54	59	41	16	49
2	114	88	12	104	78	22	82	68	32	50	58	42	12	48
3	114	87	13	103	77	23	79	67	33	46	57	43	8	47
4	113	86	14	101	76	24	76	66	34	43	56	44	4	46
5	112	85	15	99	75	25	73	65	35	39	55	45	0	45
6	112	84	16	97	74	26	70	64	36	35	54			
7	111	83	17	95	73	27	67	63	37	31	53			
8	110	82	18	92	72	28	64	62	38	28	52			
9	109	81	19	90	71	29	60	61	39	24	51			

Tafel Nr. X.

Dritte hypsometrische Tafel: Werthe von $\log Z = \log \left(1 + \frac{2z + h}{r}\right)$

in Einheiten der 5 Dezimale.

log h.	0m	100m	200m	300m	400m	500m	600m	700m	800m	900m	1000m	1200m	1500m	2000m	log h'.
2,0	1	2	3	5	6	8	9	10	12	13	14	17	21	28	2,5
2,2	1	2	4	5	7	8	9	11	12	13	15	17	22	28	2,7
2,4	2	3	4	6	7	9	10	11	13	14	15	18	22	29	2,9
2,6	3	4	5	7	8	10	11	12	14	15	16	19	23	30	3,1
2,8	4	6	7	9	10	11	13	14	15	17	18	21	25	32	3,3
3,0	7	8	10	11	12	14	15	16	18	19	20	23	27	34	3,5
3,2	11	12	14	15	16	18	19	20	22	23	25	27	31	38	3,7
3,4	17	18	20	21	22	24	25	27	28	29	31	34	38	44	3,9
3,6	27	29	30	31	33	34	35	37	38	39	41	44	48	54	4,1
3,8	43	44	46	47	48	50	51	52	54	55	56	59	64	70	4,3
4,0	68	69	71	72	73	75	76	78	79	80	82	85	89	95	4,5

Tafel Nr. XI.

Vierte hypsometrische Tafel: Spannung des Wasserdampfs.

A. Achtzigtheiliges Thermometer und Pariser Linien.

Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.
	‴		‴		‴		‴		‴		‴		‴
−15°	0,453	−9°	0,846	−3°	1,518	+3°	2,628	+9°	4,393	+15°	7,134	+21°	11,259
−14	0,504	−8	0,935	−2	1,669	+4	2,869	+10	4,775	+16	7,712	+22	12,119
−13	0,560	−7	1,032	−1	1,830	+5	3,130	+11	5,179	+17	8,330	+23	13,034
−12	0,622	−6	1,139	0	2,006	+6	3,412	+12	5,620	+18	8,992	+24	14,009
−11	0,690	−5	1,255	+1	2,197	+7	3,715	+13	6,089	+19	9,699	+25	15,048
−10	0,764	−4	1,381	+2	2,403	+8	4,046	+14	6,593	+20	10,454	+26	16,088

B. Hunderttheiliges Thermometer und Millimeter.

Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.	Temp.	Spann.
	mm		mm		mm		mm		mm		mm		mm
−15°	1,403	−8°	2,471	−1°	4,205	+6°	6,939	+13°	11,130	+20°	17,396	+27°	26,547
−14	1,525	−7	2,671	0	4,525	+7	7,436	+14	11,882	+21	18,505	+28	28,148
−13	1,655	−6	2,886	+1	4,867	+8	7,964	+15	12,677	+22	19,675	+29	29,832
−12	1,796	−5	3,115	+2	5,231	+9	8,525	+16	13,519	+23	20,909	+30	31,602
−11	1,947	−4	3,361	+3	5,619	+10	9,126	+17	14,409	+24	22,211	+31	33,464
−10	2,109	−3	3,624	+4	6,032	+11	9,751	+18	15,351	+25	23,582	+32	35,419
−9	2,284	−2	3,905	+5	6,471	+12	10,421	+19	16,345	+26	25,026	+33	37,473

Tafel Nr. XII.

Fünfte hypsometrische Tafel: Werthe von μ (t — t′) b.

A. Achtzigtheiliges Thermometer und Pariser Linien.

b.	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
‴	‴	‴	‴	‴	‴	‴	‴	‴	‴	‴
240	0,24	0,48	0,72	0,96	1,20	1,44	1,68	1,92	2,16	2,40
250	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
260	0,26	0,52	0,78	1,04	1,30	1,56	1,82	2,08	2,34	2,60
270	0,27	0,54	0,81	1,08	1,35	1,62	1,89	2,16	2,43	2,70
280	0,28	0,56	0,84	1,12	1,40	1,68	1,96	2,24	2,52	2,80
290	0,29	0,58	0,87	1,16	1,45	1,74	2,03	2,32	2,61	2,90
300	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00
310	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55	1,86	2,17	2,48	2,79	3,10
320	0,32	0,64	0,96	1,28	1,60	1,92	2,24	2,56	2,88	3,20
330	0,33	0,66	0,99	1,32	1,65	1,98	2,31	2,64	2,97	3,30
340	0,34	0,68	1,02	1,36	1,70	2,04	2,38	2,72	3,06	3,40

B. Hunderttheiliges Thermometer und Millimeter.

b.	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
550	0,44	0,88	1,32	1,76	2,20	2,64	3,08	3,52	3,96	4,40
570	0,46	0,91	1,37	1,82	2,28	2,74	3,19	3,65	4,10	4,56
590	0,47	0,94	1,42	1,89	2,36	2,83	3,30	3,78	4,25	4,72
610	0,49	0,98	1,46	1,95	2,44	2,93	3,41	3,90	4,39	4,88

b.	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
630	0,50	1,01	1,51	2,01	2,52	3,02	3,53	4,03	4,53	5,04
650	0,52	1,04	1,56	2,08	2,60	3,12	3,64	4,16	4,68	5,20
670	0,53	1,07	1,61	2,14	2,68	3,21	3,75	4,29	4,82	5,36
690	0,55	1,10	1,65	2,21	2,76	3,31	3,86	4,41	4,97	5,52
710	0,57	1,13	1,70	2,27	2,84	3,41	3,97	4,54	5,11	5,68
730	0,58	1,17	1,75	2,33	2,92	3,50	4,09	4,67	5,25	5,84
750	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,46	6,00
770	0,62	1,23	1,85	2,46	3,08	3,69	4,31	4,93	5,54	6,16

Tafel Nr. XIII.

Sechste hypsometrische Tafel: Werthe von log $(1 + \frac{3}{8}\varphi)$.

A. Luft- und Dunstdruck in Pariser Linien.

b.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
'''										
240	0,00068	0,00136	0,00203	0,00271	0,00338	0,00405	0,00472	0,00540	0,00606	0,00673
250	65	130	195	260	324	389	453	518	582	646
260	63	125	188	250	312	374	437	498	560	622
270	60	121	181	241	301	362	422	482	543	603
280	58	116	174	233	291	349	407	465	523	582
290	56	112	168	225	281	337	393	449	505	562
300	54	108	163	217	271	326	380	434	486	543
310	52	105	157	210	263	315	368	420	473	525
320	51	102	153	203	254	305	356	407	458	509
330	49	99	148	197	247	296	345	395	444	493
340	48	96	144	191	239	287	335	383	431	479

B. Luft- und Dunstdruck in Millimetern.

b.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mm										
550	0,00030	0,00059	0,00089	0,00118	0,00148	0,00177	0,00207	0,00236	0,00266	0,00295
570	29	57	86	115	143	171	200	228	257	285
590	28	55	83	110	138	165	193	220	248	275
610	27	53	80	107	133	160	187	213	240	267
630	26	52	77	103	129	155	181	207	233	258
650	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
670	24	48	73	97	121	146	170	194	219	243
690	23	47	71	94	118	141	165	189	212	236
710	23	46	69	92	115	138	160	183	206	229
730	22	45	67	89	111	134	156	178	201	223
750	22	43	65	87	108	130	152	174	195	217
770	21	42	63	84	106	127	148	169	190	211

Tafel Nr. XIV.

Für den Stromquadranten; Werthe von $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$.

α	log $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	log $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	log $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$
1° 0′	9,12096	0,1321	8° 0′	9,57390	0,3749	15° 0′	9,71402	0,5176
10	9,15444	0,1427	10	9,57844	0,3788	10	9,71654	0,6206
20	9,18344	0,1526	20	9,58288	0,3827	20	9,71903	0,5236
30	9,20903	0,1618	30	9,58725	0,3866	30	9,72149	0,5266
40	9,23192	0,1706	40	9,59153	0,3904	40	9,72393	0,5296
50	9,25263	0,1789	50	9,59573	0,3942	50	9,72635	0,5325
2 0	9,27154	0,1869	9 0	9,59985	0,3980	16 0	9,72875	0,5355
10	9,28394	0,1945	10	9,60391	0,4017	10	9,73112	0,5384
20	9,30504	0,2019	20	9,60789	0,4054	20	9,73347	0,5413
30	9,32004	0,2089	30	9,61180	0,4091	30	9,73580	0,5442
40	9,33408	0,2158	40	9,61565	0,4127	40	9,73811	0,5471
50	9,34726	0,2225	50	9,61943	0,4163	50	9,74040	0,5500
3 0	9,35970	0,2289	10 0	9,62316	0,4199	17 0	9,74267	0,5529
10	9,37146	0,2352	10	9,62682	0,4235	10	9,74492	0,5558
20	9,38262	0,2413	20	9,63043	0,4270	20	9,74715	0,5587
30	9,39424	0,2473	30	9,63398	0,4305	30	9,74936	0,5615
40	9,40337	0,2531	40	9,63748	0,4340	40	9,75155	0,5643
50	9,41305	0,2589	50	9,64093	0,4374	50	9,75373	0,5672
4 0	9,42232	0,2644	11 0	9,64432	0,4409	18 0	9,75589	0,5700
10	9,43121	0,2699	10	9,64767	0,4443	10	9,75803	0,5728
20	9,43976	0,2753	20	9,65097	0,4477	20	9,76015	0,5756
30	9,44799	0,2805	30	9,65423	0,4511	30	9,76226	0,5784
40	9,45592	0,2857	40	9,65743	0,4544	40	9,76435	0,5812
50	9,46358	0,2908	50	9,66061	0,4577	50	9,76642	0,5840
5 0	9,47097	0,2958	12 0	9,66373	0,4610	19 0	9,76848	0,5868
10	9,47813	0,3007	10	9,66682	0,4643	10	9,77053	0,5896
20	9,48506	0,3055	20	9,66987	0,4676	20	9,77256	0,5923
30	9,49179	0,3103	30	9,67288	0,4708	30	9,77457	0,5951
40	9,49831	0,3150	40	9,67585	0,4741	40	9,77657	0,5978
50	9,50465	0,3196	50	9,67878	0,4773	50	9,77856	0,6006
6 0	9,51081	0,3242	13 0	9,68168	0,4805	20 0	9,78053	0,6033
10	9,51680	0,3287	10	9,68454	0,4837	10	9,78249	0,6060
20	9,52264	0,3332	20	9,68738	0,4868	20	9,78143	0,6087
30	9,52833	0,3375	30	9,69017	0,4900	30	9,78637	0,6115
40	9,53387	0,3419	40	9,69294	0,4931	40	9,78829	0,6142
50	9,53929	0,3462	50	9,69568	0,4962	50	9,79019	0,6169
7 0	9,54457	0,3504	14 0	9,69838	0,4993	21 0	9,79209	0,6196
10	9,54973	0,3546	10	9,70106	0,5024	10	9,79397	0,6223
20	9,55478	0,3587	20	9,70371	0,5055	20	9,79584	0,6249
30	9,55971	0,3628	30	9,70633	0,5085	30	9,79770	0,6276
40	9,56454	0,3669	40	9,70892	0,5116	40	9,79954	0,6303
50	9,56927	0,3709	50	9,71147	0,5146	50	9,80138	0,6330

α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$
22° 0′	9,80320	0,6356	29° 40′	9,87779	0,7547	44° 0′	9,99242	0,9827
10	9,80502	0,6383	50	9,87926	0,7573	30	9,99621	0,9913
20	9,80682	0,6409	30 0	9,88072	0,7598	45 0	0,00000	1,0000
30	9,80861	0,6436	10	9,88217	0,7624	30	0,00379	1,0088
40	9,81039	0,6462	20	9,88362	0,7649	46 0	0,00758	1,0176
50	9,81216	0,6489	30	9,88507	0,7675	30	0,01137	1,0265
23 0	9,81392	0,6515	40	9,88651	0,7700	47 0	0,01517	1,0355
10	9,81567	0,6541	50	9,88795	0,7726	30	0,01897	1,0446
20	9,81742	0,6568	31 0	9,88938	0,7751	48 0	0,02278	1,0539
30	9,81915	0,6594	10	9,89081	0,7777	30	0,02659	1,0631
40	9,82087	0,6620	20	9,89224	0,7803	49 0	0,03042	1,0726
50	9,82258	0,6646	30	9,89366	0,7828	30	0,03425	1,0821
24 0	9,82429	0,6672	40	9,89507	0,7854	50 0	0,03809	1,0917
10	9,82598	0,6698	50	9,89648	0,7879	30	0,04195	1,1014
20	9,82767	0,6725	32 0	9,89789	0,7905	51 0	0,04581	1,1113
30	9,82935	0,6751	10	9,89930	0,7930	30	0,04969	1,1212
40	9,83102	0,6777	20	9,90070	0,7956	52 0	0,05359	1,1313
50	9,83268	0,6803	30	9,90209	0,7982	30	0,05751	1,1415
25 0	9,83433	0,6829	40	9,90348	0,8007	53 0	0,06144	1,1520
10	9,83598	0,6855	50	9,90487	0,8033	30	0,06539	1,1625
20	9,83762	0,6880	33 0	9,90626	0,8059	54 0	0,06937	1,1732
30	9,83925	0,6906	10	9,90764	0,8084	30	0,07336	1,1840
40	9,84087	0,6932	20	9,90901	0,8110	55 0	0,07738	1,1950
50	0,84248	0,6958	30	9,91039	0,8136	30	0,08143	1,2062
26 0	9,84409	0,6984	40	9,91176	0,8161	56 0	0,08550	1,2176
10	8,84569	0,7009	50	9,91313	0,8187	30	0,08961	1,2292
20	9,84728	0,7035	34 0	9,91449	0,8213	57 0	0,09374	1,2409
30	9,84887	0,7061	30	9,91856	0,8290	30	0,09790	1,2529
40	9,85044	0,7087	35 0	9,92261	0,8368	58 0	0,10210	1,2650
50	9,85202	0,7112	30	9,92663	0,8446	30	0,10634	1,2774
27 0	9,85358	0,7138	36 0	9,93063	0,8524	59 0	0,11061	1,2901
10	9,85514	0,7164	30	9,93460	0,8602	30	0,11492	1,3029
20	9,85669	0,7189	37 0	9,93855	0,8681	60 0	0,11928	1,3161
30	9,85824	0,7215	30	9,94249	0,8760	30	0,12368	1,3295
40	9,85977	0,7240	38 0	9,94640	0,8839	61 0	0,12812	1,3431
50	9,86131	0,7266	30	9,95030	0,8919	30	0,13262	1,3571
28 0	9,86283	0,7292	39 0	9,95418	0,8999	62 0	0,13716	1,3714
10	9,86436	0,7317	30	9,95805	0,9079	30	0,14171	1,3858
20	9,86587	0,7343	40 0	9,96190	0,9160	63 0	0,14642	1,4010
30	9,86738	0,7368	30	9,96575	0,9242	30	0,15113	1,4162
40	9,86888	0,7394	41 0	9,96958	0,9323	64 0	0,15591	1,4319
50	9,87038	0,7420	30	9,97340	0,9406	30	0,16075	1,4480
29 0	9,87187	0,7445	42 0	9,97722	0,9489	65 0	0,16566	1,4644
10	9,87336	0,7471	30	9,98102	0,9572	30	0,17065	1,4813
20	9,87484	0,7496	43 0	9,98483	0,9657	66 0	0,17571	1,4987
30	9,87632	0,7522	30	9,98862	0,9741	30	0,18085	1,5165

α	$\log \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	α	$\log \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$	$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$
67° 0′	0,18607	1,4349	70° 0′	0,21946	1,6575	73° 0′	0,25733	1,8086
30	0,19139	1,5538	30	0,22542	1,6804	30	0,26420	1,8373
68 0	0,19679	1,5732	71 0	0,23151	1,7042	74 0	0,27125	1,8675
30	0,20230	1,5933	30	0,23774	1,7288	30	0,27850	1,8989
69 0	0,20791	1,6140	72 0	0,24411	1,7543	75 0	0,28597	1,9318
30	0,21363	1,6354	30	0,25064	1,7809	30	0,29367	1,9664
						76 0	0,30161	2,0027

Tafel Nr. XV.

Für den Reichenbach'schen Strommesser; Werthe von $\sqrt{h'}$.

h′	$\log \sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h′	$\log \sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h′	$\log \sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$
0′,005	8,84948	0,0707	0′,21	9,66105	0,4582	0′,51	9,85382	0,7142
0,010	9,00000	0,1000	0,22	9,67117	0,4690	0,52	9,85799	0,7211
0,015	9,08778	0,1224	0,23	9,68088	0,4796	0,53	9,86213	0,7280
0,020	9,15045	0,1414	0,24	9,69011	0,4899	0,54	9,86617	0,7348
0,025	9,19893	0,1581	0,25	9,69897	0,5000	0,55	9,87017	0,7416
0,030	9,23855	0,1732	0,26	9,70748	0,5099	0,56	9,87407	0,7483
0,035	9,27207	0,1871	0,27	9,71567	0,5196	0,57	9,87789	0,7549
0,040	9,30103	0,2000	0,28	9,72354	0,5291	0,58	9,88167	0,7615
0,045	9,32674	0,2122	0,29	9,73118	0,5385	0,59	9,88542	0,7681
0,050	9,34947	0,2236	0,30	9,73846	0,5476	0,60	9,88908	0,7746
0,055	9,37014	0,2345	0,31	9,74562	0,5567	0,61	9,89265	0,7810
0,060	9,38881	0,2448	0,32	9,75251	0,5656	0,62	9,89619	0,7874
0,065	9,40637	0,2549	0,33	9,75921	0,5744	0,63	9,89933	0,7931
0,070	9,42259	0,2646	0,34	9,76574	0,5831	0,64	9,90309	0,8000
0,075	9,43743	0,2738	0,35	9,77203	0,5916	0,65	9,90644	0,8062
0,080	9,45148	0,2828	0,36	9,77815	0,6000	0,66	9,90977	0,8124
0,085	9,46464	0,2915	0,37	9,78405	0,6082	0,67	9,91302	0,8185
0,090	9,47712	0,3000	0,38	9,78986	0,6164	0,68	9,91624	0,8246
0,095	9,48883	0,3082	0,39	9,79553	0,6245	0,69	9,91939	0,8306
0,10	9,49996	0,3162	0,40	9,80099	0,6324	0,70	9,92252	0,8366
0,11	9,52283	0,3333	0,41	9,80638	0,6403	0,71	9,92562	0,8426
0,12	9,53958	0,3464	0,42	9,81164	0,6481	0,72	9,92865	0,8485
0,13	9,55690	0,3605	0,43	9,81670	0,6557	0,73	9,93166	0,8544
0,14	9,57299	0,3741	0,44	9,82171	0,6633	0,74	9,93460	0,8602
0,15	9,58805	0,3873	0,45	9,82659	0,6708	0,75	9,93752	0,8660
0,16	9,60206	0,4000	0,46	9,83136	0,6782	0,76	9,94037	0,8717
0,17	9,61521	0,4123	0,47	9,83601	0,6855	0,77	9,94325	0,8775
0,18	9,62757	0,4242	0,48	9,84061	0,6928	0,78	9,94606	0,8832
0,19	9,63929	0,4358	0,49	9,84510	0,7000	0,79	9,94880	0,8888
0,20	9,65050	0,4472	0,50	9,84948	0,7071	0,80	9,95153	0,8944

h'	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h'	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$	h'	log $\sqrt{h'}$	$\sqrt{h'}$
0',82	9,95689	0,9055	0',90	9,97713	0,9487	0',98	9,99559	0,9899
0,84	9,96213	0,9165	0,92	9,98191	0,9592	1,00	10,00000	1,0000
0,86	9,96727	0,9274	0,94	9,98655	0,9695	1,02	10,05045	1,1414
0,88	9,97225	0,9381	0,96	9,99114	0,9798	1,04	10,30103	1,2000

Tafel Nr. XVI.

Coordinaten für Kreisbögen; die Tangenten als Abscissen-Axen. [1]

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	100	125	150	175	200	250	300	350	400	450
10	0,51	0,41	0,34	0,29	0,25	0,21	0,17	0,15	0,14	0,12
20	2,02	1,62	1,34	1,15	1,00	0,81	0,67	0,58	0,51	0,45
30	4,61	3,66	3,04	2,59	2,27	1,83	1,51	1,29	1,12	1,11
40	8,35	6,58	5,44	4,64	4,04	3,23	2,68	2,30	2,01	1,78
50	13,40	10,44	8,58	7,30	6,35	5,06	4,20	3,59	3,14	2,79
60	20,00	15,35	12,53	10,61	9,22	7,31	6,07	5,19	4,53	4,02
70	28,59	21,44	17,34	14,61	12,64	10,00	8,29	7,08	6,18	5,48
80	40,00	28,96	23,12	19,36	16,70	13,15	10,87	9,27	8,09	7,17
90	56,41	38,26	30,00	24,92	21,40	16,77	13,82	11,77	10,27	9,10
100	.	50,00	39,80	31,39	26,80	20,87	17,16	14,59	12,71	11,26
110	.	65,63	48,02	38,90	32,97	25,51	20,90	17,74	15,43	13,66
120	.	.	60,00	47,62	40,00	30,69	25,05	21,22	18,43	16,30
130	.	.	.	57,85	48,02	36,46	29,63	25,04	21,72	19,19
140	.	.	.	.	57,17	42,88	34,68	29,22	25,31	22,34
150	.	.	.	.	67,72	50,00	40,20	33,78	29,19	25,74
160	.	.	.	.	80,00	57,91	46,23	38,72	33,39	29,41
170	.	.	.	.	.	66,67	52,82	44,06	37,93	33,35
180	.	.	.	.	.	76,52	60,00	49,84	42,79	37,56
190	.	.	.	.	.	.	67,84	56,07	48,12	42,08
200	.	.	.	.	.	.	76,40	62,78	53,59	46,89

Abscissen.	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
25	0,63	0,56	0,53	0,48	0,45	0,41	0,39	0,37	0,35	0,33
50	2,51	2,28	2,10	1,93	1,80	1,67	1,56	1,48	1,40	1,32
75	5,68	5,14	4,71	4,34	4,04	3,76	3,53	3,32	3,13	2,97
100	10,11	9,17	8,40	7,74	7,18	6,70	6,28	5,91	5,56	5,29
125	15,96	14,40	13,17	12,14	11,26	10,49	9,83	9,25	8,72	8,26

[1] Es versteht sich wohl von selbst, dass die Halbmesser und Coordinaten in einer und derselben Längeneinheit angegeben sind.

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
150	23,03	20,85	19,05	17,54	16,27	15,16	14,18	13,34	12,58	11,92
175	31,63	28,59	26,10	24,00	22,23	20,70	19,38	18,21	17,18	16,26
200	41,75	37,62	34,33	31,53	29,17	27,16	25,40	23.87	22,52	21,30
225	53,49	48,13	43,79	40,19	37,15	34,55	32,29	30,32	28,58	27,04
250	66,99	60,10	54,56	50,00	46,56	42,90	40,06	37,60	35,42	33,49
275	82,42	73,69	66,73	61,04	56,28	52,24	48,75	45,72	43,05	40,26
300	100,00	89,02	80,39	73,37	67,54	62,62	58,38	54,69	51,48	48,61
325	120,03	106,30	95,65	87.09	80,03	74,08	68,97	64,59	60,74	57,32
350	142,93	125,74	112,68	102.28	93,79	86,68	80,62	75,41	70,87	66,83
375	169,28	147,67	131,63	119,08	108,93	100,48	93,33	87,20	81,85	77,15
400	200,00	172,51	152,78	137,65	125,54	115,57	107,18	100,00	93,77	88,32
425	236,61	200,90	176,48	158,20	143,79	132,04	122,23	113,88	106,67	100,37
450	282,05	233,78	203,14	180,96	163,81	150,00	138,56	128,88	120,58	113,34
475	343,87	272,74	233,43	206,30	185,83	169,59	156,28	145,11	135,56	127,28
500	.	320,88	268,34	234,67	210,11	190,98	175,50	162,62	151,66	142,23
525	.	.	.	.	230,56	214,39	196,37	181,52	167,31	158,25
550	.	.	.	.	266,99	240,10	219,06	201,93	187,60	175,40
575	.	.	.	.	.	.	.	.	207,63	193,75
600	.	.	.	.	.	.	.	.	229,17	213,45
625	.	.	.	.	.	.	.	.	.	234,55

Abscissen	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
50	1,25	1,14	1,04	0,96	0,89	0,83	0,78	0,73	0,70	0,66
100	5,00	4,55	4,17	3,85	3,58	3,33	3,13	2,94	2,78	2,63
150	11,30	10,28	9,41	8,68	8,06	7,52	7,05	6,63	6,26	5,93
200	20,22	18,33	16,79	15,48	14,36	13,39	12,55	11,80	11,14	10,56
250	31,78	28,79	26,33	24,27	22,50	20,98	19,65	18,48	17,45	16,52
300	46,06	41,70	38,10	35,09	32,52	30,30	28,37	26,68	25,18	23,83
350	63,26	57,17	52,17	48.00	44,45	41,40	38,75	36,42	34,36	32,51
400	83.48	75,31	68,63	63,07	58,36	54,32	50,81	47,73	45,00	42,58
450	106,92	96,26	87,57	80,37	74,29	69,09	64,58	60,64	57,16	54,06
500	133,98	120,20	109,13	100,00	92,33	85,78	80,13	75,19	70,84	66,97
550	164,84	147,30	133,46	122,08	112,56	104,47	97,50	91,43	86,09	81,35
600	200,00	178,04	160,77	146,74	135,09	125,23	116,76	109,40	102,94	97,23
650	240,08	212,59	191,29	174,70	160,04	140,15	137,98	129,17	121,46	114,64
700	.	.	225,32	202,03	187,57	173,35	161,25	150,81	141,69	133,65
750	.	.	.	.	217,84	200,96	186,67	174,38	163,69	154,29
800	.	.	.	.	.	231,14	215,36	200,00	187,55	176,63
850	.	.	.	.	.	.	.	227,76	213,34	200,74
900	.	.	.	.	.	.	.	.	241,15	226,68
950	.	.	.	.	.	.	.	.	.	254, 55

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900
50	0,62	0,60	0,57	0,54	0,52	0,50	0,48	0,46	0,45	0,43
100	2,50	2,38	2,27	2,18	2,08	2,00	1,93	1,85	1,79	1,73
150	5,63	5,37	5,12	4,90	4,69	4,50	4,33	4,17	4,02	3,88
200	10,03	9,55	9,11	8,71	8,33	8,01	7,71	7,42	7,15	6,90
250	15,69	14,93	14,25	13,63	13,06	12,53	12,05	11,60	11,18	10,80
300	22,63	21,54	20,55	19,65	18,82	18,07	17,37	16,72	16,12	15,56
350	30,86	29,37	28,02	26,79	25,66	24,62	23,67	22,78	21,96	21,20
400	40,41	38,45	36,67	35,05	33,57	32,21	30,95	29,79	28,72	27,72
450	51,28	48,78	46,52	44,45	42,57	40,83	39,24	37,76	36,40	35,13
500	63,51	60,39	57,57	55,01	52,66	50,51	48,53	46,70	45,00	43,43
550	77,11	73,30	69,86	66,72	63,87	61,25	58,84	56,61	54,55	52,63
600	92,12	87,55	83,40	79,64	76,21	73,07	70,12	67,51	65,04	62,75
650	108,57	103,13	98,22	93,76	89,70	85,98	82,56	79,41	76,49	73,78
700	126,50	120,10	114,33	109,11	104,35	100,00	96,00	92,32	88,91	85,75
750	145,95	138,50	131,79	125,72	120,20	115,15	110,52	106,25	102,32	98,63
800	166,97	158,35	150,61	143,61	137,26	131,45	126,14	121,20	116,72	112,50
850	189,61	179,71	170,84	162,83	155,57	148,94	142,87	137,28	132,14	127,37
900	213,94	202,63	192,51	183,30	175,14	167,62	160,74	154,42	148,59	143,19
950	240,03	227,17	215,69	205,36	195,98	187,53	179,77	172,65	166,09	160,02
1000	267,95	253,38	240,41	228,77	218,26	208,71	200,00	192,01	184,66	177,87
1050	297,80	281,35	266,74	253,66	241,88	231,19	221,45	212,53	204,33	196,76
1100	.	.	294,74	280,10	266,93	255,01	244,16	234,23	225,15	216,72
1150	.	.	.	.	293,46	280,20	268,15	257,15	247,06	237,76
1200	.	.	.	.	.	.	293,49	281,32	270,18	259,92

Abscissen.	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900
50	0,42	0,40	0,39	0,38	0,37	0,36	0,35	0,34	0,33	0,32
100	1,67	1,61	1,56	1,52	1,47	1,43	1,39	1,35	1,32	1,28
150	3,77	3,63	3,52	3,41	3,31	3,22	3,13	3,04	2,96	2,89
200	6,67	6,46	6,26	6,07	5,89	5,72	5,56	5,41	5,26	5,13
250	10,43	10,10	9,78	9,48	9,20	8,94	8,69	8,46	8,23	8,02
300	14,83	14,20	14,09	13,66	13,26	12,88	12,52	12,18	11,87	11,56
350	20,49	19,82	19,20	18,99	18,06	17,55	17,05	16,59	16,15	15,75
400	26,79	25,92	25,10	24,33	23,61	22,93	22,29	21,68	21,11	20,57
450	33,94	32,83	31,80	30,83	29,91	29,05	28,24	27,47	26,74	26,05
500	41,96	40,59	39,30	38,10	36,97	35,90	34,89	33,94	33,04	32,18
550	50,85	49,18	47,62	46,16	44,78	43,49	42,26	41,11	40,01	38,91
600	60,61	58,62	56,75	55,00	53,36	51,81	50,35	48,97	47,67	46,43
650	71,26	68,91	66,71	64,65	62,71	60,89	59,17	57,54	56,00	54,55
700	82,81	80,07	77,50	75,10	72,81	70,71	68,71	66,82	65,03	63,33
750	95,26	92,09	89,13	86,36	83,75	81,30	78,99	76,81	74,75	72,80

Abscissen	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900
800	108,63	105,00	101,61	98,44	95,46	92,80	90,01	87,52	85,14	82,93
850	122,94	118,81	114,96	111,35	107,96	104,78	101,79	98,96	96,29	93,76
900	138,18	133,52	129,17	125,10	121,28	117,69	114,31	111,13	108,12	105,27
950	154,72	149,15	144,27	139,70	135,42	131,39	127,61	124,04	120,67	117,48
1000	171,57	165,72	160,26	155,16	150,38	145,90	141,68	187,70	133,94	130,39
1050	189,75	183,24	177,17	171,50	166,20	161,21	156,53	152,11	147,95	144,00
1100	208,94	201,73	195,00	188,73	182,86	177,85	172,17	167,30	162,69	158,34
1150	229,20	221,20	213,78	206,86	200,39	194,32	188,62	183,25	178,19	173,40
1200	250,45	241,68	233,52	225,92	218,80	212,14	205,89	200,00	194,45	189,17
1250	272,82	263,19	254,24	245,90	238,12	230,83	223,98	217,45	211,48	205,75
1300	.	.	275,96	266,85	258,34	250,39	242,92	235,70	229,29	223,05
1350	.	.	298,71	288,77	279,50	270,84	262,71	255,08	247,89	241,11
1400	.	.	322,50	311,69	301,61	292,20	283,38	275,10	367,30	259,95
1450	.	.	.	.	.	.	.	.	287,52	262,86
1500	.	.	.	.	.	.	.	.	308,58	299,96

Abscissen.	4000	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700	4800	4900
50	0,31	0,31	0,30	0,29	0,28	0,28	0,27	0,27	0,26	0,26
100	1,25	1,22	1,19	1,16	1,14	1,11	1,09	1,06	1,04	1,02
150	2,81	2,75	2,68	2,62	2,56	2,50	2,43	2,40	2,34	2,30
200	5,00	4,88	4,77	4,65	4,55	4,45	4,36	4,26	4,16	4,08
250	7,82	7,63	7,45	7,27	7,11	6,95	6,80	6,65	6,51	6,38
300	11,27	10,99	10,73	10,48	10,24	10,01	9,79	9,59	9,39	9,19
350	15,34	14,97	14,61	14,27	13,94	13,63	13,33	13,05	12,78	12,52
400	20,05	19,56	19,09	18,65	18,22	17,81	17,42	17,05	16,70	16,35
450	25,39	24,77	24,18	23,61	23,07	22,56	22,06	21,59	21,14	20,71
500	31,36	30,60	29,92	29,19	28,50	27,86	27,26	26,67	26,11	25,58
550	37,99	37,06	36,17	35,32	34,51	33,74	33,00	32,29	31,61	30,97
600	45,26	44,14	43,08	42,07	41,10	40,18	39,30	38,45	37,65	36,87
650	53,17	51,85	50,60	49,41	48,28	47,19	46,16	45,16	44,21	43,30
700	61,73	60,20	58,84	57,36	56,04	54,78	53,57	52,42	51,32	50,26
750	70,94	69,18	67,51	65,91	64,39	62,94	61,55	60,23	58,97	57,74
800	80,82	78,81	76,90	75,07	73,34	71,68	70,10	68,59	67,14	65,75
850	91,36	89,09	86,91	84,85	82,88	81,01	79,22	77,50	75,86	74,29
900	102,56	100,00	97,56	95,24	93,04	90,92	88,90	86,98	85,13	83,36
950	114,45	111,58	108,85	106,26	103,78	101,45	99,17	97,01	94,95	92,97
1000	127,02	123,82	120,79	117,90	115,14	112,52	110,01	107,62	105,32	103,12
1050	140,27	136,73	133,37	130,17	127,10	124,21	121,44	118,79	116,25	113,82
1100	154,22	150,32	146,67	143,08	139,71	136,51	133,46	130,54	127,74	125,07
1150	168,33	164,58	160,51	156,63	152,94	149,42	146,07	142,86	139,80	136,86

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	4000	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700	4800	4900
1200	184,25	179,54	175,08	170,85	166,80	162,93	159,28	155,77	152,42	149,22
1250	200,33	195,20	190,32	185,70	181,29	177,10	173,09	169,27	165,62	162,12
1300	217,15	211,56	206,25	201,22	196,43	191,87	187,57	183,36	179,40	175,60
1350	235,70	228,63	222,88	217,41	212,22	207,27	202,56	198,06	193,75	189,64
1400	253,00	246,43	240,20	234,29	228,67	223,32	218,22	213,35	208,70	204,26
1450	272,07	264,96	258,24	251,85	245,79	240,01	234,51	229,26	224,25	219,45
1500	291,90	284,24	276,99	270,11	263,58	257,36	251,44	245,79	240,40	235,24
1550	312,52	304,28	296,48	289,08	282,05	275,37	269,01	262,94	257,15	251,61
1600	333,94	325,08	316,70	308,76	301,22	294,05	287,23	280,72	274,52	273,92

Abscissen.	5000	5100	5200	5300	5400	5500	5600	5700	5800	5900
50	0,25	0,25	0,24	0,24	0,23	0,23	0,22	0,22	0,21	0,21
100	1,00	0,98	0,96	0,94	0,93	0,91	0,89	0,88	0,86	0,85
150	2,25	2,21	2,16	2,12	2,08	2,05	2,01	1,97	1,94	1,91
200	4,00	3,92	3,85	3,78	3,71	3,65	3,57	3,51	3,45	3,39
250	6,25	6,13	6,01	5,90	5,79	5,69	5,58	5,47	5,39	5,30
300	9,01	8,83	8,66	8,50	8,34	8,19	8,04	7,90	7,76	7,64
350	12,26	12,03	11,79	11,57	11,35	11,15	10,95	10,76	10,57	10,39
400	16,12	15,71	15,39	15,12	14,84	14,57	14,30	14,06	13,81	13,58
450	20,29	19,89	19,31	19,14	18,78	18,44	18,11	17,79	17,48	17,19
500	25,06	24,57	24,09	23,64	23,20	22,74	22,37	21,97	21,59	21,22
550	30,34	29,76	29,17	28,62	28,08	27,57	27,08	26,60	26,14	25,69
600	36,13	35,42	34,73	34,07	33,44	32,83	32,24	31,67	31,12	30,59
650	42,43	41,59	40,79	40,01	39,26	38,56	37,85	37,18	36,54	35,91
700	49,24	48,27	47,33	46,43	45,56	44,73	43,92	43,15	42,40	41,67
750	56,57	55,45	54,37	53,34	52,34	51,38	50,45	49,56	48,70	47,86
800	64,42	63,14	61,89	60,73	59,59	58,49	57,44	56,42	55,44	54,49
850	72,78	71,33	69,94	68,60	67,32	66,08	64,89	63,73	62,62	61,55
900	81,67	80,03	78,48	76,97	75,53	74,14	72,80	71,50	70,26	69,05
950	91,08	89,26	87,49	85,84	84,22	82,67	81,17	79,73	78,33	76,99
1000	101,02	99,00	97,06	95,19	93,40	91,67	90,01	88,40	86,96	85,36
1050	111,49	109,25	107,11	105,05	103,07	101,12	99,32	97,55	95,83	94,19
1100	122,50	120,04	117,68	115,41	112,22	111,12	109,10	107,15	105,27	103,45
1150	134,07	131,35	128,71	126,27	123,88	121,57	119,35	117,21	115,15	113,16
1200	146,14	143,19	140,36	137,60	135,02	132,51	130,08	127,75	125,50	123,32
1250	158,77	155,56	152,48	149,62	146,91	143,93	141,29	138,75	136,30	133,94
1300	171,96	168,47	165,12	161,89	158,79	155,85	152,98	150,23	147,57	145,00
1350	185,90	181,92	178,20	174,82	171,47	168,26	165,16	162,18	159,30	156,53
1400	200,00	195,92	191,99	188,25	184,64	181,17	177,84	174,60	171,50	168,51
1450	214,87	210,47	206,25	202,21	198,32	194,58	190,86	187,51	184,17	180,96

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von									
	5000	5100	5200	5300	5400	5500	5600	5700	5800	5900
1500	230,30	225,58	221,04	216,69	212,51	208,51	204,63	200,91	197,32	193,86
1550	246,36	241,25	236,39	231,72	227,24	222,93	218,78	214,79	210,95	207,24
1600	262,91	257,48	252,28	247,28	242,48	237,87	233,44	229,17	225,06	221,09
1650	280,10	274,29	268,73	263,38	258 26	253,34	248,50	244,04	239,65	235,42
1700	297,88	291,68	285,74	280,04	274,58	269,32	264,37	259,41	254,73	250,22

Abscissen.	6000	6100	6200	6300	6400	6500	6600	6700	6800	6900
50	0,21	0,21	0,20	0,20	0,20	0,19	0,19	0,19	0,18	0,18
100	0,83	0,82	0,81	0,79	0,78	0,77	0,76	0,75	0,74	0,73
150	1,88	1,84	1,82	1,79	1,76	1,73	1,71	1,68	1,65	1,63
200	3,33	3,28	3,23	3,18	3,13	3,08	3,03	2,99	2,94	2,90
250	5,21	5,13	5,04	4,96	4,89	4,81	4,74	4,67	4,60	4,53
300	7,50	7,38	7,26	7,15	7,03	6,93	6,82	6,72	6,70	6,53
350	10,22	10,05	9,89	9,73	9,58	9,44	9,29	9,15	9,01	8,88
400	13,35	13,13	12,92	12,71	12,51	12,42	12,13	11,95	11,78	11,60
450	16,90	16,62	16,35	16,09	15,84	15,60	15,36	15,13	14,91	14,69
500	20,87	20,53	20,19	19,87	19,56	19,26	18,97	18,68	18,41	18,14
550	25,26	24,85	24,44	24,05	23,68	23,31	22,96	22,61	22,28	21,96
600	30,08	29,58	29,10	28,64	28,19	27,75	27,33	26,82	26,52	26,14
650	35,31	34,73	34,17	33,62	33,09	32,58	32,09	31,60	31,14	30,68
700	40,97	40,30	39,64	39,01	38,40	37,80	37,23	36,67	36,13	35,60
750	47,06	46,28	45,53	44,80	44,10	43,41	42,75	42,11	41,49	40,88
800	53,57	52,69	51,84	51,00	50,20	49,42	48,67	47,78	47,22	46,54
850	60,51	59,51	58,54	57,61	56,70	55,82	54,97	54,14	53,33	52,56
900	67,89	66,76	65,66	64,62	63,60	62,61	61,65	60,72	59,82	58,95
950	75,66	74,43	73,21	72,04	70,90	69,80	68,73	67,69	66,69	65,71
1000	83,92	82,53	81,18	79,87	78,61	77,38	76,20	75,05	73,93	72,85
1050	92,59	91,05	89,56	88,12	86,72	85,52	84,06	82,79	81,56	80,36
1100	101,78	100 00	98,36	96,78	95,24	93,75	92,31	90,91	89,71	88,23
1150	111,24	109,38	107,59	105,85	104,17	102,54	100,95	99,43	97,95	96,51
1200	121,23	119,20	117,24	115,34	113,51	111,73	110,16	108,34	106,72	105,15
1250	131,65	129,45	127,32	125,25	123,26	121,32	119,45	117,64	115,88	114,17
1300	142,53	140,14	137,82	135,57	133,42	131,33	129,30	127,33	125,42	123,57
1350	153,85	151,26	148,76	146,34	144,00	141,74	139,54	137,42	135,36	133,36
1400	165,61	162,83	160,13	157,53	155,00	152,56	150,19	147,90	145,68	143,52
1450	177,85	174,84	171,94	169,14	166,22	163,70	161,25	158,78	156,40	154,08
1500	190,52	187,30	184,19	181,18	178,26	175,45	172,71	170,07	167,50	165,02
1550	203,67	200,21	196,88	193,65	190,53	187,51	184,59	181,76	179,01	176,35
1600	217,27	213,58	210,01	206,56	203,23	200,00	196,88	193,85	190,91	188,08
1650	231,73	227,39	223,59	219,91	216,35	212,91	209,58	206,35	203,22	200,19
1700	245,87	241,67	237,62	233 70	229,89	226,25	222,70	219,26	215,93	212,70

Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von				Abscissen.	Ordinaten für einen Halbmesser von			
	7000	8000	9000	10000		7000	8000	9000	10000
50	0,18	0,16	0,14	0,12	1050	79,20	69,21	61,46	55,28
100	0,72	0,63	0,56	0,50	1100	87,00	75,99	67,48	60,68
150	1,61	1,41	1,25	1,13	1150	95,11	83 09	73,78	66,35
200	2,86	2,50	2,22	2,00	1200	103,62	90,50	80,36	72,26
250	4,47	3,91	3,47	3,13	1250	112,51	98,26	87,23	78,43
300	6,43	5,63	5,00	4,50	1300	121,77	106,24	94,39	84,86
350	8,76	7,58	6,81	6,13	1350	131,42	114,73	101,83	91,54
400	11,44	9,09	8,89	8,00	1400	141,43	123,45	109,56	98,58
450	14,48	12,67	11,26	10,13	1450	151,83	132,51	117,57	105,68
500	17,88	15,64	13,90	12,51	1500	162,60	141,88	125,88	113,14
550	21,64	18,93	16,82	15,14	1550	173,76	151,59	134,48	120,86
600	25,76	22,53	20,02	18,01	1600	185,31	161,63	143,36	128,83
650	30,25	26,45	23,50	21,15	1650	197,23	172,01	152,55	137,06
700	35,09	30,68	27,26	24,53	1700	209,57	182,71	162,01	145,56
750	40,30	35,24	31,31	28,17	1750	222,28	193,75	171,78	154,32
800	45,87	40,01	35,63	32,05	1800	235,39	205,13	181,84	163,33
850	51,80	45,28	40,23	36,19	1850	248,89	216,85	192,19	172,61
900	58,10	50,79	45,11	40,58	1900	262,79	228,90	202,84	182,16
950	64,76	56,61	50,07	45,23	1950	277,09	241,30	213,79	191,97
1000	71,80	62,75	55,73	50,13	2000	291,80	254,03	225,04	202,04

Tafel Nr. XVII.

Ordinaten für Kreisbögen; die Sehnen als Abscissen-Axen.

1. Bogenlänge = 50 Einheiten.

Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate	
	zu 1/2 b.	zu 1/4 b.		zu 1/2 b.	zu 1/4 b.		zu 1/2 b	zu 1/4 b.
1000	0,31	0,24	1200	0,26	0,19	1400	0,22	0,17
20	0,31	0,23	20	0,26	0,19	20	0,22	0,17
40	0,30	0,22	40	0,25	0,19	40	0,22	0,16
60	0,29	0,22	60	0,25	0,18	60	0,22	0,16
80	0,29	0,22	80	0,25	0,18	80	0,21	0,16
1100	0,28	0,21	1300	0,24	0,18	1500	0,21	0,16
20	0,28	0,21	20	0,24	0,18	20	0,21	0,16
40	0,28	0,21	40	0,23	0,18	40	0,20	0,15
60	0,27	0,20	60	0,23	0,17	60	0,20	0,15
80	0,27	0,20	80	0,23	0,17	80	0,20	0,15

Halb-messer.	Ordinate		Halb-messer.	Ordinate		Halb-messer.	Ordinate	
	zu 1/2 b.	zu 1/4 b.		zu 1/2 b.	zu 1/4 b.		zu 1/2 b.	zu 1/4 b.
1600	0,19	0,15	2400	0,13	0,10	3200	0,10	0,05
20	0,19	0,15	20	0,13	0,10	20	0,10	0,05
40	0,19	0,14	40	0,13	0,10	40	0,10	0,05
60	0,19	0,14	60	0,13	0,10	60	0,10	0,05
80	0,18	0,14	80	0,13	0,09	80	0,09	0,05
1700	0,18	0,14	2500	0,13	0,09	3300	0,09	0,05
20	0,18	0,14	20	0,12	0,09	20	0,09	0,05
40	0,18	0,14	40	0,12	0,09	40	0 09	0,05
60	0,18	0,13	60	0,12	0,09	60	0,09	0,05
80	0,18	0,13	80	0,12	0,09	80	0 09	0,05
1800	0,17	0,13	2600	0,12	0,09	3400	0,09	0,05
20	0,17	0,13	20	0,12	0,09	20	0,09	0,04
40	0,17	0,13	40	0,12	0,09	40	0,09	0,04
60	0,17	0,13	60	0,12	0 09	60	0,09	0,04
80	0,17	0,13	80	0,12	0,09	80	0,09	0,04
1900	0,17	0,12	2700	0,12	0,09	3500	0,09	0,04
20	0,17	0,12	20	0,12	0,09	20	0,09	0,04
40	0,16	0,12	40	0,11	0,09	40	0,09	0,04
60	0,16	0,12	60	0,11	0,08	60	0,09	0,04
80	0,16	0,12	80	0,11	0,08	80	0,09	0,04
2000	0,16	0,12	2800	0,11	0,08	3600	0,09	0,04
20	0,16	0,12	20	0,11	0,07	20	0,09	0,04
40	0,16	0.12	40	0,11	0,07	40	0,09	0,04
60	0,15	0,12	60	0,11	0,07	60	0,09	0,04
80	0,15	0,11	80	0,11	0,07	80	0,09	0,04
2100	0,15	0,11	2900	0,11	0,07	3700	0,09	0,04
20	0,15	0,11	20	0,11	0,07	20	0,08	0,04
40	0,15	0,11	40	0,11	0,07	40	0,08	0,04
60	0,15	0,11	60	0,11	0,07	60	0,08	0,03
80	0,14	0,11	80	0,10	0,07	80	0,08	0,03
2200	0,14	0,11	3000	0,10	0,06	3800	0,08	0,03
20	0,14	0,11	20	0,10	0,06	20	0,08	0,03
40	0,14	0,11	40	0,10	0,06	40	0,08	0,03
60	0,14	0,11	60	0,10	0,06	60	0,08	0,03
80	0,14	0,10	80	0,10	0,06	80	0,08	0,03
2300	0,14	0,10	3100	0,10	0,06	3900	0,08	0,03
20	0,13	0,10	20	0,10	0,06	20	0,08	0,03
40	0,13	0,10	40	0,10	0,06	40	0,08	0,03
60	0,13	0,10	60	0,10	0,06	60	0,08	0,03
80	0,13	0,10	80	0,10	0,06	80	0,08	0,03
						4000	0,08	0,03

2. Bogenlänge = 100 Einheiten.

Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate	
	zu 1/2 b.	zu 1/4 b.		zu 1/2 b.	zu 1/4 b.		zu 1/2 b.	zu 1/4 b.
1000	1,25	0,94	1800	0,69	0,52	2600	0,48	0,36
20	1,22	0,92	20	0,69	0,52	20	0,48	0,36
40	1,20	0,90	40	0,68	0,51	40	0,47	0,36
60	1,18	0,88	60	0,67	0,51	60	0,47	0,35
80	1,16	0,87	80	0,67	0,50	80	0,47	0,35
1100	1,14	0,85	1900	0,66	0,49	2700	0,46	0,35
20	1.12	0,84	20	0,65	0,49	20	0,46	0,35
40	1,10	0,82	40	0,65	0,48	40	0,46	0,34
60	1,08	0,81	60	0,64	0,48	60	0,45	0,34
80	1,06	0,79	80	0,63	0,47	80	0,45	0,34
1200	1,04	0,78	2000	0,63	0,47	2800	0,45	0,34
20	1,02	0,77	20	0,62	0.47	20	0,44	0,33
40	1,01	0,76	40	0,61	0,46	40	0,44	0,33
60	0,99	0,74	60	0,61	0,46	60	0,44	0,33
80	0,98	0,73	80	0,60	0,45	80	0,43	0,33
1300	0,96	0,72	2100	0,60	0,45	2900	0,43	0,32
20	0,95	0,71	20	0,59	0,44	20	0,43	0,32
40	0,93	0,70	40	0,58	0,44	40	0.43	0,32
60	0,92	0,69	60	0,58	0,43	60	0,42	0,32
80	0,91	0,68	80	0,57	0,43	80	0,42	0,31
1400	0,89	0,67	2200	0,57	0,43	3000	0,42	0,31
20	0,88	0,66	20	0,56	0,42	20	0.41	0,31
40	0,87	0,65	40	0,56	0,42	40	0,41	0,31
60	0,86	0,64	60	0,55	0,42	60	0,41	0,31
80	0,85	0,63	80	0,55	0,41	80	0,40	0,30
1500	0,83	0,62	2300	0,54	0,41	3100	0,40	0,30
20	0,82	0,62	20	0,54	0,40	20	0,40	0,30
40	0,81	0,61	40	0,53	0,40	40	0.40	0,30
60	0,80	0,60	60	0,53	0,40	60	0,39	0,30
80	0,79	0,59	80	0,52	0,39	80	0,39	0,29
1600	0,78	0,58	2400	0,52	0,39	3200	0,39	0,29
20	0,77	0,58	20	0,52	0,39	20	0,39	0,29
40	0,76	0,57	40	0,51	0,38	40	0.39	0,29
60	0,75	0,56	60	0,51	0,38	60	0,38	0,29
80	0,74	0,56	80	0,50	0,38	80	0,38	0,29
1700	0,73	0,55	2500	0,50	0,37	3300	0.38	0.28
20	0,73	0,54	20	0,50	0,37	20	0 38	0,28
40	0,72	0.54	40	0,49	0,37	40	0,38	0,28
60	0,71	0,53	60	0,49	0,37	60	0.37	0,28
80	0,70	0,53	80	0,48	0,36	80	0,37	0,28

Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate		Halbmesser.	Ordinate	
	zu 1/2 b.	zu 1/4 b.		zu 1/2 b.	zu 1/4 b.		zu 1/2 b.	zu 1/4 b.
3400	0,37	0,28	4200	0,30	0,22	5000	0,25	0,19
20	0,37	0,28	20	0,30	0,22	20	0,25	0,19
40	0,36	0,27	40	0,30	0,22	40	0,25	0,19
60	0,36	0,27	60	0,29	0,22	60	0,25	0,19
80	0,36	0,27	80	0,29	0,22	80	0,25	0,19
3500	0,36	0,27	4300	0,29	0,22	5100	0,25	0,19
20	0,36	0,27	20	0,29	0,22	20	0,24	0,18
40	0,36	0,27	40	0,29	0,22	40	0,24	0,18
60	0,35	0,27	60	0,29	0,22	60	0,24	0,18
80	0,35	0,26	80	0,28	0,21	80	0,24	0,18
3600	0,35	0,26	4400	0,28	0,21	5200	0,24	0,18
20	0,35	0,26	20	0,28	0,21	20	0,24	0,18
40	0,34	0,26	40	0,28	0,21	40	0,24	0,18
60	0,34	0,26	60	0,28	0,21	60	0,24	0,18
80	0,34	0,26	80	0,28	0,21	80	0,24	0,18
3700	0,34	0,25	4500	0,28	0,21	5300	0,24	0,18
20	0,34	0,25	20	0,28	0,21	20	0,23	0,18
40	0,33	0,25	40	0,28	0,21	40	0,23	0,18
60	0,33	0,25	60	0,27	0,21	60	0,23	0,18
80	0,33	0,25	80	0,27	0,20	80	0,23	0,17
3800	0,33	0,25	4600	0,27	0,20	5400	0,23	0,17
20	0,33	0,25	20	0,27	0,20	20	0,23	0,17
40	0,33	0,24	40	0,27	0,20	40	0,23	0,17
60	0,32	0,24	60	0,27	0,20	60	0,23	0,17
80	0,32	0,24	80	0,27	0,20	80	0,23	0,17
3900	0,32	0,24	4700	0,27	0,20	5500	0,23	0,17
20	0,32	0,24	20	0,26	0,20	20	0,23	0,17
40	0,32	0,24	40	0,26	0,20	40	0,23	0,17
60	0,31	0,24	60	0,26	0,20	60	0,22	0,17
80	0,31	0,24	80	0,26	0,20	80	0,22	0,17
4000	0,31	0,23	4800	0,26	0,20	5600	0,22	0,17
20	0,31	0,23	20	0,26	0,20	20	0,22	0,17
40	0,31	0,23	40	0,26	0,20	40	0,22	0,17
60	0,31	0,23	60	0,26	0,19	60	0,22	0,17
80	0,31	0,23	80	0,26	0,19	80	0,22	0,17
4100	0,31	0,23	4900	0,26	0,19	5700	0,22	0,17
20	0,30	0,23	20	0,25	0,19	20	0,22	0,16
40	0,30	0,23	40	0,25	0,19	40	0,22	0,16
60	0,30	0,23	60	0,25	0,19	60	0,22	0,16
80	0,30	0,23	80	0,25	0,19	80	0,22	0,16
						5800	0,22	0,16

Tafel Nr. XVIII.

Correspondirende geographische Breiten.

Geographische Breite.		Geographische Breite.		Geographische Breite.	
Kugel.	Ellipsoid.	Kugel.	Ellipsoid.	Kugel.	Ellipsoid.
46° 40′	46° 41′ 24″,75	47° 58′	47° 59′ 34″,84	49° 16′	49° 17′ 43″,88
42	43 25,02	48 0	48 1 35,09	18	19 44,09
44	45 25,29	2	3 35,33	20	21 44,31
46	47 25,56	4	5 35,58	22	23 44,53
48	49 25.83	6	7 35,82	24	25 44,74
50	51 26,10	8	9 36,06	26	27 44,96
52	53 26,37	10	11 36,30	28	29 45,17
54	55 26.64	12	13 36,54	30	31 45,39
56	57 26,91	14	15 36,78	32	33 45,60
58	59 27,17	16	17 37,02	34	35 45,81
47 0	47 1 27,44	18	19 37,26	36	37 46,02
2	3 27,70	20	21 37 50	38	39 46,23
4	5 27,97	22	23 37.74	40	41 46,44
6	7 28,23	24	25 37,97	42	43 46,65
8	9 28,49	26	27 38,21	44	45 46,86
10	11 28,76	28	29 38,44	46	47 47,07
12	13 29,02	30	31 38.68	48	49 47,28
14	15 29,28	32	33 38,91	50	51 47,48
16	17 29,54	34	35 39,14	52	53 47,69
18	19 29,80	36	37 39,38	54	55 47,89
20	21 30,06	38	39 39,61	56	57 48,10
22	23 30,32	40	41 39,84	58	59 48,30
24	25 30,57	42	43 40,07	50 0	50 1 48,51
26	27 30,83	44	45 40,30	2	3 48,71
28	29 31,09	46	47 40,53	4	5 48,91
30	31 31,34	48	49 40.76	6	7 49,11
32	33 31,60	50	51 40,98	8	9 49,31
34	35 31,85	52	53 41,21	10	11 49,51
36	37 32,10	54	55 41,44	12	13 49,71
38	39 32,36	56	57 41,66	14	15 49,91
40	41 32,61	58	59 41,89	16	17 50,11
42	43 32,86	49 0	49 1 42,11	18	19 50,31
44	45 33,11	2	3 42,33	20	21 50,50
46	47 33,36	4	5 42,56	22	23 50,70
48	49 33,61	6	7 42.78	24	25 50,90
50	51 33,86	8	9 43,00	26	27 51,09
52	53 34,10	10	11 43,22	28	29 51,28
54	55 34,35	12	13 43,44	30	31 51,47
56	57 34,60	14	15 43,66	32	33 61,66

Geographische Breite.			Geographische Breite.			Geographische Breite.		
Kugel.	Ellipsoid.		Kugel.	Ellipsoid.		Kugel.	Ellipsoid.	
50° 34′	50° 35′	51″,86	52° 2′	52° 3′	59″,60	53° 30′	53° 32′	6″,02
36	37	52,04	4	5	59,76	32	34	6,15
38	39	52,23	6	7	59,92	34	36	6,28
40	41	52,43	8	10	0,08	36	38	6,41
42	43	52,61	10	12	0,24	38	40	6,54
44	45	52,80	12	14	0,39	40	42	6,66
46	47	52,99	14	16	0,55	42	44	6,79
48	49	53,18	16	18	0,71	44	46	6,92
50	51	53,36	18	20	0,86	46	48	7,04
52	53	53,55	20	22	1,02	48	50	7,17
54	55	53,73	22	24	1,17	50	52	7,29
56	57	53,92	24	26	1,33	52	54	7,42
58	59	54,10	26	28	1,48	54	56	7,54
51 0	51 1	54,28	28	30	1,63	56	58	7,66
2	3	54,46	30	32	1,78	58	54 0	7,79
4	5	54,64	32	34	1,93	54 0	2	7,91
6	7	54,82	34	36	2,08	2	4	8,03
8	9	55,00	36	38	2,23	4	6	8,15
10	11	55,18	38	40	2,38	6	8	8,27
12	13	55,36	40	42	2,53	8	10	8,39
14	15	55,54	42	44	2,68	10	12	8,51
16	17	55,72	44	46	2,83	12	14	8,62
18	19	55,90	46	48	2,97	14	16	8,74
20	21	56,07	48	50	3,12	16	18	8,86
22	23	56,24	50	52	3,26	18	20	8,97
24	25	56,42	52	54	3,41	20	22	9,09
26	27	56,59	54	56	3,55	22	24	9,20
28	29	56,76	56	58	3,69	24	26	9,31
30	31	56,94	58	53 0	3,84	26	28	9,43
32	33	57,11	53 0	2	3,98	28	30	9,54
34	35	57,28	2	4	4,12	30	32	9,65
36	37	57,45	4	6	4,26	32	34	9,76
38	39	57,62	6	8	4,40	34	36	9,87
40	41	57,79	8	10	4,54	36	38	9,98
42	43	57,95	10	12	4,67	38	40	10,09
44	45	58,12	12	14	4,81	40	42	10,19
46	47	58,29	14	16	4,95	42	44	10,30
48	49	58,45	16	18	5,08	44	46	10,41
50	51	58,62	18	20	5,22	46	48	10,52
52	53	58,78	20	22	5,35	48	50	10,62
54	55	58,95	22	24	5,49	50	52	10,73
56	57	59,11	24	26	5,62	52	54	10,83
58	59	59,27	26	28	5,75	54	56	10,93
52 0	52 1	59,44	28	30	5,89	56	58	11,03

Geographische Breite.		Geographische Breite.		Geographische Breite.	
Kugel.	Ellipsoid.	Kugel.	Ellipsoid	Kugel.	Ellipsoid.
54° 58′	55° 0′ 11″,14	56° 12′	56° 14′ 14″,45	57° 26′	57° 28′ 16″,88
55 0	2 11,24	14	16 14,53	28	30 16,93
2	4 11,34	16	18 14,61	30	32 16,99
4	6 11,44	18	20 14,68	32	34 17,04
6	8 11,54	20	22 14,76	34	36 17,09
8	10 11,64	22	24 14,83	36	38 17,14
10	12 11,74	24	26 14,91	38	40 17,19
12	14 11,83	26	28 14,98	40	42 17,24
14	16 11,93	28	30 15,05	42	44 17,29
16	18 12,03	30	32 15,12	44	46 17,34
18	20 12,12	32	34 15,20	46	48 17,39
20	22 12,21	34	36 15,27	48	50 17,44
22	24 12,31	36	38 15,34	50	52 17,48
24	26 12,41	38	40 15,41	52	54 17,53
26	28 12,50	40	42 15,48	54	56 17,57
28	30 12,59	42	44 15,54	56	58 17,62
30	32 12,68	44	46 15,61	58	58 0 17,66
32	34 12,77	46	48 15,68	58 0	2 17,71
34	36 12,86	48	50 15,74	2	4 17,75
36	38 12,95	50	52 15,81	4	6 17,79
38	40 13,04	52	54 15,87	6	8 17,83
40	42 13,13	54	56 15,94	8	10 17,87
42	44 13,22	56	58 16,00	10	12 17,89
44	46 13,30	58	57 0 16,07	12	14 17,95
46	48 13,39	57 0	2 16,13	14	16 17,99
48	50 13,48	2	4 16,19	16	18 18.03
50	52 13,56	4	6 16,25	18	20 18,07
52	54 13.65	6	8 16,31	20	22 18,11
54	56 13,73	8	10 16,37	22	24 18,14
56	58 13,81	10	12 16,43	24	26 18,18
58	56 0 13,89	12	14 16,49	26	28 18,21
56 0	2 13,97	14	16 16,55	28	30 18,25
2	4 14,06	16	18 16,60	30	32 18,28
4	6 14,14	18	20 16,66	32	34 18,31
6	8 14,22	20	22 16,72	34	36 18,35
8	10 14,30	22	24 16,77	36	38 18,38
10	12 14,37	24	26 16,83	38	40 18,41
				40	42 18,44

Tafel Nr. XIX.

Mittlere astronomische Refraction nach Bessel.

Scheinbare Höhe.		Refraction.			Scheinbare Höhe.		Refraction.			Scheinbare Höhe.		Refraction.		
0°	0'	34'	54",1	124",9	6°	40'	7'	39",2	10",0	13°	20'	3'	58",8	2",9
	10	32	49,2	116,9		50	7	29,2	9,5		30	3	55,9	2,9
	20	30	52,3	108,8	7	0	7	19,7	9,2		40	3	53,0	2,8
	30	29	3,5	100,8		10	7	10,5	8,8		50	3	50,2	2,8
	40	27	22,7	92,9		20	7	1,7	8,4	14	0	3	47,4	5,3
	50	25	49,8	85,2		30	6	53,3	8,2		20	3	42,1	5,1
1	0	24	24,6	77,9		40	6	45,1	7,9		40	3	37,0	4,9
	10	23	6,7	71,1		50	6	37,2	7,6	15	0	3	32,1	4,7
	20	21	55,6	64,7	8	0	6	29,6	7,3		20	3	27,4	4,5
	30	20	50,9	59,0		10	6	22,3	7,1		40	3	22,9	4,3
	40	19	51,9	53,9		20	6	15,2	6,8	16	0	3	18,6	4,1
	50	18	58,0	49,4		30	6	8,4	6,6		20	3	14,5	4,0
2	0	18	8,6	45,6		40	6	1,8	6,4		40	3	10,5	3,9
	10	17	23,0	42,3		50	5	55,4	6,1	17	0	3	6,6	3,7
	20	16	40,7	39,8	9	0	5	49,3	6,0		20	3	2,9	3,6
	30	16	0,9	37,5		10	5	43,3	5,7		40	2	59,3	3,5
	40	15	23,4	35,6		20	5	37,6	5,6	18	0	2	55,8	3,3
	50	14	47,8	33,2		30	5	32,0	5,5		20	2	52,5	3,2
3	0	14	14,6	30,9		40	5	26,5	5,2		40	2	49,3	3,2
	10	13	43,7	28,7		50	5	21,3	5,1	19	0	2	46,1	3,0
	20	13	15,0	26,7	10	0	5	16,2	5,0		20	2	43,1	2,9
	30	12	48,3	24,6		10	5	11,2	4,8		40	2	40,2	2,9
	40	12	23,7	23,0		20	5	6,4	4,7	20	0	2	37,3	2,8
	50	12	0,7	21,8		30	5	1,7	4,5		20	2	34,5	2,6
4	0	11	38,9	20,6		40	4	57,2	4,4		40	2	31,9	2,6
	10	11	18,3	19,7		50	4	52,8	4,3	21	0	2	29,3	2,5
	20	10	58,6	19,0	11	0	4	48,5	4,2		20	2	26,8	2,5
	30	10	39,6	18,4		10	4	44,3	4,1		40	2	24,3	2,4
	40	10	21,2	17,9		20	4	40,2	3,9	22	0	2	21,9	2,3
	50	10	3,3	16,8		30	4	36,3	3,9		20	2	19,6	2,2
5	0	9	46,5	15,6		40	4	32,4	3,7		40	2	17,4	2,2
	10	9	30,9	14,9		50	4	28,7	3,7	23	0	2	15,2	2,2
	20	9	16,0	14,1	12	0	4	25,0	3,6		20	2	13,0	2,1
	30	9	1,9	13,5		10	4	21,4	3,4		40	2	10,9	2,0
	40	8	48,4	12,8		20	4	18,0	3,4	24	0	2	8,9	1,9
	50	8	35,6	12,3		30	4	14,6	3,3		20	2	7,0	1,9
6	0	8	23,3	11,7		40	4	11,3	3,2		40	2	5,1	1,9
	10	8	11,6	11,3		50	4	8,1	3,2	25	0	2	3,2	1,8
	20	8	0,3	10,8	13	0	4	4,9	3,1		20	2	1,4	1,8
	30	7	49,5	10,3		10	4	1,8	3,0		40	1	59,6	1,8

Scheinbare Höhe.	Refraction.		Scheinbare Höhe.	Refraction.		Scheinbare Höhe.	Refraction.	
26° 0′	1′ 57″,8	1″,7	37° 0′	1′ 16″,5	0″,9	58°	36″,1	1″,4
20	1 56,1	1,7	20	1 15,6	0,9	59	34,7	1,4
40	1 54,4	1,6	40	1 14,7	0,9	60	33,3	1,3
27 0	1 52,8	1,6	38 0	1 13,8	0,9	61	32,0	1,3
20	1 51,2	1,5	20	1 12,9	0,9	62	30,7	1,3
40	1 49,7	1,5	40	1 12,0	0,8	63	29,4	1,2
28 0	1 48,2	1,5	39 0	1 11,2	0,8	64	28,2	1,3
20	1 46,7	1,4	20	1 10,3	0,8	65	26,9	1,2
40	1 45,3	1,5	40	1 9,5	0,8	66	25,7	1,2
29 0	1 43,8	1,4	40 0	1 8,7	0,8	67	24,5	1,2
20	1 42,4	1,4	20	1 7,9	0,8	68	23,3	1,1
40	1 41,0	1,3	40	1 7,1	0,8	69	22,2	1,2
30 0	1 39,7	1,3	41 0	1 6,3	0,8	70	21,0	1,1
20	1 38,4	1,3	20	1 5,5	0,8	71	19,9	1,1
40	1 37,1	1,3	40	1 4,7	0,7	72	18,8	1,1
31 0	1 35,8	1,3	42 0	1 4,0		73	17,7	1,1
20	1 34,5	1,2				74	16,6	1,1
40	1 33,3	1,2	42°	64″,0	2″,2	75	15,5	1,0
32 0	1 32,1	1,2	43	61,8	2,1	76	14,5	1,1
20	1 30,9	1,1	44	59,7	2,0	77	13,4	1,1
40	1 29,8	1,1	45	57,7	2,0	78	12,3	1,1
33 0	1 28,7	1,1	46	55,7	1,9	79	11,2	1,0
20	1 27,6	1,1	47	53,8	1,9	80	10,2	1,1
40	1 26,5	1,1	48	51,9	1,7	81	9,1	1,0
34 0	1 25,4	1,1	49	50,2	1,8	82	8,1	1,0
20	1 24,3	1,0	50	48,4	1,7	83	7,1	1,0
40	1 23,3	1,0	51	46,7	1,6	84	6,1	1,0
35 0	1 22,3	1,0	52	45,1	1,6	85	5,1	1,0
20	1 21,3	1,0	53	43,5	1,6	86	4,1	1,0
40	1 20,3	1,0	54	41,9	1,5	87	3,1	1,0
36 0	1 19,3	1,0	55	40,4	1,5	88	2,1	1,0
20	1 18,3	0,9	56	38,9	1,4	89	1,1	1,0
40	1 17,4	0,9	57	37,5	1,4	90	0,0	

Tafel Nr. XX.

Längen der Parallelgrade in geographischen Meilen.

Geogr. Breite.	Länge des Parallel-grads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallel-grads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallel-grads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallel-grads.
0°	15,000	2°	14,990	4°	14,963	6°	14,918
30′	14,999	30′	14,986	30′	14,954	30′	14,904
1	14,998	3	14,979	5	14,944	7	14,888
30	14,994	30	14,972	30	14,931	30	14,871

Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.	Geogr. Breite.	Länge des Parallelgrads.
8°	14,853	28° 30'	13,182	49°	9,841	69° 30'	5,253
30'	14,835	29	13,119	30'	9,742	70	5,130
9	14,815	30	13,055	50	9,642	30	5,007
30	14,794	30	12,990	30	9,541	71	4,884
10	14,771	30	12,924	51	9,440	30	4.759
30	14 748	31	12,857	30	9,338	72	4,636
11	14,724	30	12,789	52	9,234	30	4,522
30	14,698	32	12,721	30	9,131	73	4,385
12	14,672	30	12,651	53	9,027	30	4,260
30	14,644	33	12,580	30	8,922	74	4,134
13	14,615	30	12,508	54	8,817	30	4,008
30	14,585	34	12,436	30	8,699	75	3,882
14	14,554	30	12,362	55	8,604	30	3,756
30	14,522	35	12,287	30	8,496	76	3,629
15	14,488	30	12,212	56	8,388	30	3,502
30	14,454	36	12,153	30	8,279	77	3,374
16	14,418	30	12,058	57	8,169	30	3,247
30	14,382	37	11,980	30	8,059	78	3,119
17	14,344	30	11,900	58	7,949	30	2,990
30	14,305	38	11,820	30	7,837	79	2,862
18	14,265	30	11,739	59	7,726	30	2,733
30	14,224	39	11,657	30	7,613	80	2,605
19	14,182	30	11,574	60	7,500	30	2,476
30	14,139	40	11,491	30	7,386	81	2,346
20	14,095	30	11,406	61	7,272	30	2,217
30	14,050	41	11,321	30	7,157	82	2,0-8
21	14,006	30	11,234	62	7,042	30	1,958
30	13,956	42	11,147	30	6,926	83	1,828
22	13,907	30	11,059	63	6,810	30	1.698
30	13,858	43	10,970	30	6,693	84	1,568
23	13,807	30	10,881	64	6,575	30	1,438
30	13,755	44	10,790	30	6,458	85	1,307
24	13,703	30	10,699	65	6,339	30	1,177
30	13,649	45	10,607	30	6,220	86	1,046
25	13,605	30	10,514	66	6,101	30	0,916
30	13,538	46	10,419	30	5,981	87	0,785
26	13,482	30	10,325	67	5,861	30	0,654
30	13,424	47	10,230	30	5,740	88	0 523
27	13,365	30	10,134	68	5,619	30	0,393
30	13,305	48	10,037	30	5,497	89	0,262
28	13,244	30	9,939	69	5,375	30	0,131
						90	0,000

Tafel Nr. XXI.

Halbmesser der Parallelkreise in conischen Kartennetzen.

Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen	Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen.	Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen	Geogr. Breite.	Halbmesser in geog. Meilen.
5°	9823,4	24°	1930,3	43°	921,6	62°	457,0
30'	8925,6	30'	1885,9	30'	905,6	30'	447,4
6	8177,0	25	1843,0	44	989,9	63	437,9
30	7543,2	30	1801,8	30	874,6	30	428,5
7	6999,6	26	1762,1	45	859,4	64	419,2
30	6528,1	30	1723,8	30	844,6	30	409,9
8	6115,2	27	1686,7	46	829,9	65	400,8
30	5750,6	30	1651,0	30	815,6	30	391,7
9	5426,3	28	1616,4	47	801,4	66	382,6
30	5135,8	30	1582,9	30	787,5	30	373,7
10	4874,1	29	1550,5	48	773,8	67	364,8
30	4637,1	30	1519,0	30	760,4	30	356,0
11	4421,4	30	1488,6	49	747,1	68	347,2
30	4224,3	30	1459,0	30	734,0	30	338,5
12	4043,3	31	1430,3	50	721,2	69	329,9
30	3876,7	30	1402,5	30	708,5	30	321,3
13	3722,6	32	1375,4	51	696,0	70	312,8
30	3579,8	30	1349,0	30	683,6	30	304,3
14	3447,0	33	1323,4	52	671,5	71	295,9
30	3323,2	30	1298,5	30	659,5	30	287,6
15	3207,5	34	1274,2	53	647,6	72	279,2
30	3099,0	30	1250,5	30	635,9	30	271,0
16	2997,2	35	1227,4	54	624,4	73	262,8
30	2901,4	30	1204,9	30	613,0	30	254,5
17	2811,1	36	1182,9	55	601,8	74	246,4
30	2725,8	30	1161,5	30	590,7	30	238,3
18	2645,1	37	1140,5	56	579,7	75	230,2
30	2568,6	30	1120,0	30	568,8	30	222,2
19	2496,0	38	1100,0	57	558,1	76	214,3
30	2427,0	30	1080,5	30	547,5	30	206,3
20	2361,3	39	1061,3	58	537,0	77	198,4
30	2298,7	30	1342,6	30	526,7	30	190,5
21	2238,9	40	1024,2	59	516,4	78	182,7
30	2181,8	30	1006,3	30	506,2	30	174,9
22	2127,2	41	988,7	60	496,2	79	167,0
30	2074,9	30	971,4	30	486,2	30	159,3
23	2024,7	42	954,5	61	476,5	80	151,5
30	1976,6	30	937,9	30	466,6	30	143,5

Tafel Nr. XXII.

Gattung und Höhe der Schrift für Plan- und Karten-Objecte.

Gegenstände	1/5000		1/10000		1/20000	1/50000	1/100000	1/200000	
	Schrift.	Höhe.	Schrift.	Höhe	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Schrift.	Höhe.
		'''		'''	'''	'''	'''		'''
Abtei	S. R	1,1	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	L. R	0,3
Anlage	L. R	0,8	L. R	0,5	0,4	0,3	0,2	—	—
Allee	T. C	0,7	T. C	0,5	0,3	0,3	0,2	—	—
Abhang des Gebirges	L. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Bahnhof	L. R	0,6	L. R	0 4	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Baum, ausgezeichneter, isolirter	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Bad, grosses	L. R	2,0	S R	1,3	1,0	0 8	0,6	T. C	0,5
„ kleines	S. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Batterie	T. C	0,5	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Benennungen von Feld, Wiesen, Reben etc.	L. R	1,0	L. R	0,6	0,5	0,4	0,3	—	—
Bergwerke	T. C	0,4	T. C	0 3	0,2	0,2	0,2	—	—
Berg, grosser	L. R	1,3	L. R	0,9	0,7	0,5	0,3	T. C	0,3
Bemerkungen	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Brücke, grosse	L. R	0,6	S. R	0,4	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
„ kleine	T. C	0,4	T. C	0 3	0,2	0,2	0,2	—	–
Brunnen	T. C	0,3	T. C	0 2	0,2	0,2	0,2	—	—
Bach, grosser	S. R	0,7	S. R	0,5	0,4	0,3	0,3	—	—
„ kleiner	L. R	0,5	L. R	0,4	0,3	0,3	0,3	—	—
Canal	S. R	1,0	S. R	0,8	0,6	0,5	0,3	—	—
Capelle	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Chaussee	S. R	0,8	S. R	0,6	0,5	0,4	0,3	—	—
Damm, grosser	S. R	0,6	S. R	0,5	0,4	0,3	0,2	T. C	0,2
„ kleiner	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Dorf über 400 Einwohner	S. R	2,0	S. R	1,3	1,0	0,8	0,5	T. C	0,4
„ unter 400 Einwohner	S. R	1,5	S. R	1,0	0,7	0,6	0,4	T. C	0,3
Eisenbahn	S. R	0,8	S. R	0.6	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
Eisenhammer, grosser	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
„ kleiner	S. R	0,7	S. R	0,5	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Eiskeller	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Engpass	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Ebene, grosse	L. C	2,5	L. C	1,7	0,2	1,0	0,7	L. C	0,7
„ gewöhnliche	S. R	2,0	S. R	1,3	1,0	0,8	0,5	L. R	0,5
Fahrt	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Flecken oder Marktflecken	L. C	2,5	L. C	1,7	1,3	1,0	0,7	L. C	0,6
Fabrik	T. C	0,5	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2

Gegenstände.	1/5000		1/10000		1/20000	1/50000	1/100000	1/200000	
	Schrift.	Höhe.	Schrift.	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Schrift.	Höhe.
		'''		'''	'''	'''	'''		'''
Fluss, grosser	L. C	2,0	L. C	1,3	1,0	0,8	0,5	S. R	0,4
„ kleiner	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
Fussweg	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Garten	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Gebirgskette	L. C	2,0	L. C	2,0	1,5	0,2	0,8	S. R	0,7
Glashütte	L. R	0,7	L. R	0,5	0,3	0,3	0,2	L. R	0,2
Graben	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Grenzen	L. R	0,7	L. R	0,5	0,5	0,4	0,3	—	—
Grenzstein	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Haide	L. R	1,3	L. R	0,9	0,7	0,5	0,3	T. C	0,3
Häuser, einzelne	T. C	0,5	T. C	0,3	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
Höhle	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Hof	L. R	0,6	L. R	0,4	0,3	0,2	0,2	—	—
Hügel, einzelner	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Hütte	T. C	0 3	T. C	0,2	0 2	0,2	0,2	—	—
Insel, grosse	L. R	1,3	L. R	0,9	0,7	0,5	0,3	L. R	0,3
„ kleine	L. R	0,7	L. R	0,5	0,3	0,3	0,2	L. R	0,2
Kirche	S. R	0,7	S. R	0,5	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Kloster	L. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Kreuz	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Lache	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Lager	S. R	1,3	S. R	0,9	0,7	0,5	0,3	T. C	0,3
Magazin	T. C	0,4	T. C	0,3	0 2	0,2	0,2	T. C	0,2
Massstab	L. C	0,9	L. R	0,6	0,6	0,6	0,6	S. R	0,6
Mineralquelle	L. R	0,7	T. C	0,5	0,3	0,3	0,2	T. C	0,2
Monument, einzeln stehendes	S. R	0,6	S. R	0,4	0,3	0,2	0,2	S. R	0,2
Mühle	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Obstgarten	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	T. C	0,2
Pfarrhof	S. R	1,0	S. R	0,8	0,6	0,5	0,4	T. C	0 4
Quelle eines Baches	S. R	0,7	S. R	0,5	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
Redoute	S. R	0,5	S. R	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Sandbank	L. R	1,0	L. R	0,8	0,6	0,5	0,4	T. C	0,3
Sandgrube	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Schenke	T. C	0 5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Steinbruch	T. C	0,3	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Schloss	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
Schleuse	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
See, grosser	L. C	2,0	L. C	1,3	1,0	0,8	0,5	T. C	0,3
„ kleiner (auf Bergen)	S. R	0,6	S. R	0,4	0,3	0,2	0,2	T. C	0,2
Sumpf	L. R	1,0	L. R	0,8	0,6	0,5	0,4	T. C	0,3
Saline, grosse	L. R	1,0	L. R	0,7	0,5	0,4	0,3	T. C	0,2
„ kleine	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—

Gegenstände.	1/5000		1/10000		1/20000	1/50000	1/100000	1/200000	
	Schrift.	Höhe.	Schrift.	Höhe.	Höhe.	Höhe.	Höhe	Schrift.	Höhe.
		'''		'''	'''	'''	'''		'''
Sägmühle	T. C	0,4	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Stadt über 5000 Einw. .	S. C	4,0	S. C	2,7	2,0	1,6	1,1	S. C	0,9
„ unter 5000 Einw. .	S. C	3,0	S. C	2,0	1,5	1,2	0,8	L. C	0,7
Signal, grosses	T. C	0,8	T. C	0,5	0,4	0,3	0,2	—	—
„ kleines	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Thurm	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Thal	L. C	3,0	L. C	2,5	2,0	1,5	1,0	—	—
Vorstadt	L. C	2,0	L. C	1,3	1,0	0,8	0,5	S. R	0,4
Wald, grosser	L. C	2,0	L. C	1,3	1,0	0,8	0,5	—	—
„ gewöhnlicher . .	L. R	1,5	L. R	1,0	1,0	0,8	0,6	L. R	0,5
„ kleiner	L. R	1,0	L. R	0,8	0,6	0,5	0,3	T. C	0,3
Weiher, grosser . . .	L. C	2,0	L. C	1,3	1,0	0,8	0,6	S. R	0,6
„ kleiner . . .	L. R	0,6	T. C	0,4	0,3	0,2	0,2	—	—
Weide	T. C	1,0	T. C	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Wiesen	L. R	1,0	L R	0,8	0,6	0,4	0,3	—	—
Wildbach	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Wasserwerk, grosses . .	S. R	1,0	S. R	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
„ kleines . .	L. R	0,7	L. R	0,5	0,3	0,3	0,2	—	—
Weiler	T. C	1,0	T. C	0,7	0,5	0,4	0,3	—	—
Weg	T. C	0,6	T. C	0,4	0,3	0,2	0,2	—	—
Zugrippung	T. C	0,5	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—
Zollstätte	T. C	0,3	T. C	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Ziegelhütte	T. C	0,3	T. C	0,3	0,2	0,2	0,2	—	—

Alphabetisches Sachregister.

Die Zahlen bedeuten die Seiten.

A.

U.

V.

W.

Z.

Berichtigung.

Seite 773 in der Erklärung zur Tafel Nr. X lies auf der ersten, vorletzten und letzten Zeile log Z statt log z.



